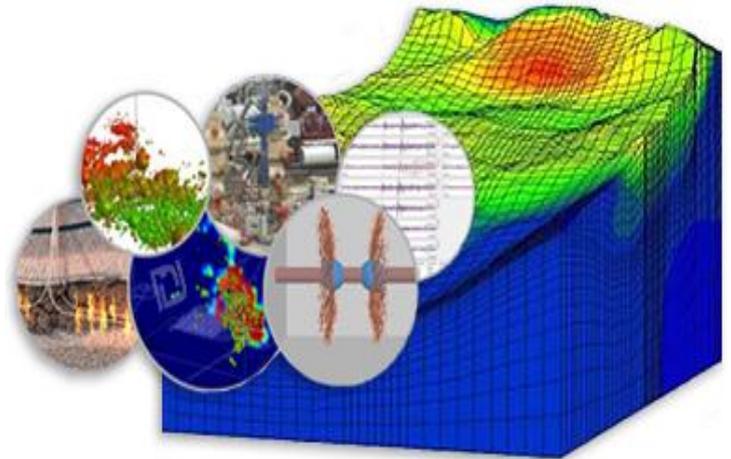
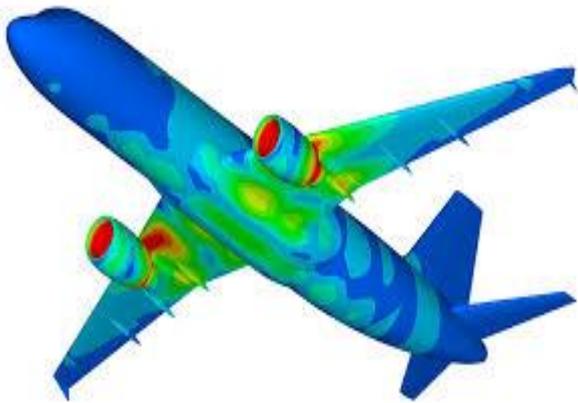




UNIVERSITE BATNA 2
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil



Résumé du cours de Méthode des Éléments Finis



Mr YAHIAOUI DJARIR
Année universitaire 2019-2020

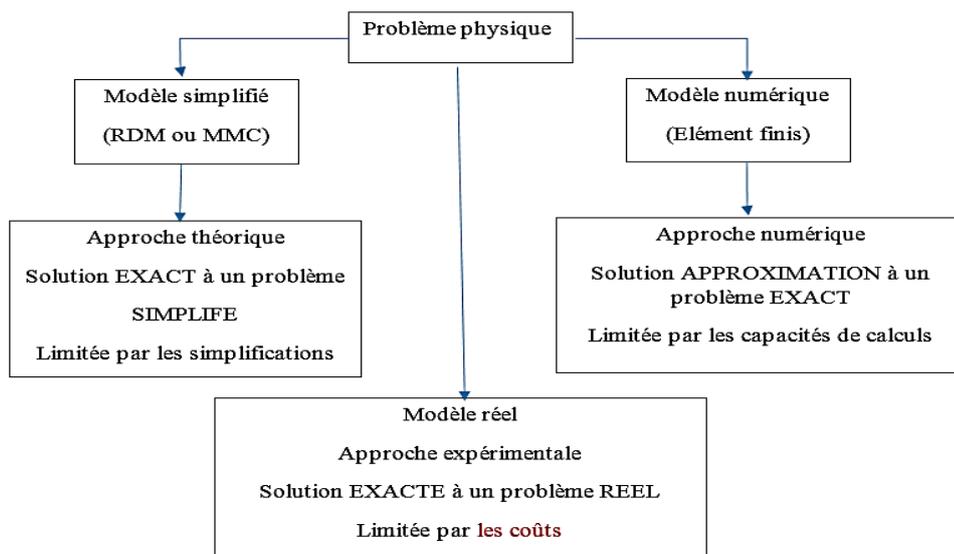
PRINCIPES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Introduction

La Méthode des éléments finis est une technique numérique pour trouver des solutions approximatives d'équations différentielles partielles. Il résulte de la nécessité de résoudre des problèmes complexes dans le domaine élasticité ou plastique et d'analyse structurelle en génie civil, mécanique et aérospatial. Dans une simulation structurelle, La Méthode des éléments finis aide à produire des visualisations de la rigidité et la résistance de la structure. Cela contribue également à minimiser le poids du matériau et son coût des structures. Et permet une visualisation détaillée et indique la répartition des contraintes et des déformations dans les éléments structurelle.

1.1 Du problème physique au modèle mathématique ou numérique

Nous partons d'un problème physique, le cadre précis de l'étude est défini par les hypothèses simplificatrices qui permettent de définir un modèle mathématique. La difficulté pour l'ingénieur est de savoir choisir parmi les lois de la physique celles dont les équations traduiront avec la précision voulue la réalité du problème physique. Un bon choix doit donner une réponse acceptable pour des efforts de mise en œuvre non prohibitifs. Les différentes étapes d'analyse d'un problème physique s'organisent suivant le processus schématisé par la figure suivante :



ÉLÉMENT BARRE

Introduction

Nous nous intéressons ici aux structures composées de barres droites sollicitées uniquement en traction ou compression. Ce sont des "treillis", structures formées de barres liées entre elles par des liaisons de type "rotule", "pivot" ou "articulation" et chargée par des forces s'exerçant uniquement au niveau des liaisons.

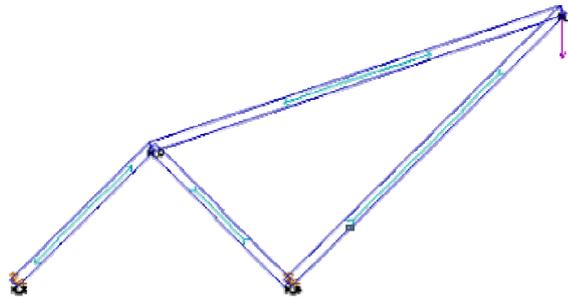


Figure 3-1 Treillis de barres articulées sous une charge ponctuelle

Pour dériver la matrice de rigidité d'un élément barres élastiques linéaires en utilisant les étapes générales décrites au chapitre 2. Nous allons inclure une introduction à la fois sur un système local et global des coordonnées. Et discuterons également de la transformation d'un vecteur du système de coordonnées local vers un système de coordonnées globales.

3.1 Dérivation matrice de la rigidité pour un élément barre dans les coordonnées locales

En considérant un élément barre élastique d'une section transversale constante comme illustré dans la figure 3-2. La barre est soumise à des forces de traction T dirigées vers le long de l'axe local de la barre et appliquées aux nœuds 1 et 2.

A est la section constante de l'élément barre, E le module d'élasticité, et L la longueur initiale. Les degrés de liberté nodaux sont des déplacements axiaux locaux représentés par u_1 et u_2 comme indiqués dans la figure 3-2.

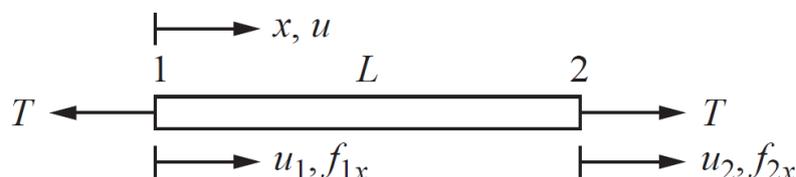


Figure 3-2 Barre soumise à des forces de traction T; Les déplacements nodaux positifs et les forces sont tous dans la direction x locale

D'après la loi de Hooke [Équation. (a)] et la relation déformation-déplacement [Équation. (b)], nous écrivons

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (a)$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (b)$$

D'après l'équilibre de la force, nous avons

$$A\sigma_x = T = \text{constant} \quad (c)$$

Pour une barre avec des charges appliquées uniquement aux extrémités. En utilisant l'équation (b) dans l'équation (a) et ensuite l'équation (a) dans l'équation (c) et en différenciant par rapport à x, on obtient l'équation différentielle régissant la barre avec un comportement élastique linéaire comme suit

$$\frac{d}{dx} \left(AE \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (d)$$

u est la fonction de déplacement axial sur le long de l'élément dans la direction x et A et E seront supposés constants sur toute la longueur de la barre.

Les hypothèses suivantes sont utilisées pour dériver la matrice de la rigidité des éléments barres:

1. La barre ne peut supporter la force de cisaillement ou le moment de flexion, c'est-à-dire

$$f_{1y} = 0, f_{2y} = 0, m_1 = 0 \text{ et } m_2 = 0.$$

2. Tous les effets des déplacements transversaux sont ignorés.

3. La loi de Hooke s'applique ; C'est-à-dire que la contrainte axiale σ_x est liée à la déformation axiale ε_x par $\sigma_x = E\varepsilon_x$.

4. Aucune charge intermédiaire appliquée.

Étape 1 Sélectionner du type d'élément

Représentez la barre avec numérotation les nœuds à chaque extrémité (Figure 3-2).

Étape 2 Sélectionner une fonction de déplacement

Parce qu'une fonction linéaire avec des points aux extrémités a un chemin unique. Par conséquent,

Supposons une variation de déplacement linéaire sur le long de l'axe x de la barre parce qu'une fonction linéaire avec des points aux extrémités a un chemin unique. Ces points d'extrémité sont les valeurs nodales u_1 et u_2 .

$$u = a_1 + a_2 x \quad (3.1.1)$$

Avec le nombre total des coefficients a_i est toujours égal au nombre total de degrés de liberté associés à l'élément. Ici, le nombre total de degrés de liberté est deux déplacements axiaux à chacun des deux nœuds de l'élément. En utilisant la même procédure que dans la section 2.2 pour l'élément de ressort, nous exprimons l'équation. (3.1.1) comme:

$$u = \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right) x + u_1 \quad (3.1.2)$$

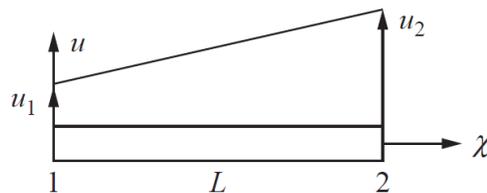


Figure 3-3 Déplacement u tracé sur la longueur de l'élément

La raison pour laquelle nous convertissons la fonction de forme de déplacement de l'équation. (3.1.1) à l'équation (3.1.2) est qu'elle nous permet d'exprimer la déformation en terme de déplacements nodaux en utilisant la relation de déformation/ déplacement donnée par l'équation. (3.1.5) et ensuite relier les forces nodales aux déplacements nodaux dans l'étape 4.

Sous forme matricielle, l'équation (3.1.2) devient

$$u = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.1.3)$$

Avec des fonctions de forme données par

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad N_2 = \frac{x}{L} \quad (3.1.4)$$

La fonction de déplacement linéaire u (Équation. (3.1.2)) est tracée sur la longueur de l'élément barre, est illustrée dans la figure 3-3.

Étape 3 Définir les relations déformation- déplacement et déformation- contrainte

La relation déformation - déplacement est

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (3.1.5)$$

Les équations (3.1.3) et (3.1.4) ont été utilisées pour obtenir l'équation (3.1.5), et la relation contrainte - déformation est

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (3.1.6)$$

Etape 4 Dérivation de la matrice de rigidité des éléments barre

La matrice de rigidité de l'élément barre est dérivée comme suit.

$$A\sigma_x = T \quad (3.1.7)$$

En utilisant les équations. (3.1.5) et (3.1.6) dans l'équation (3.1.7), nous obtenons

$$T = AE \left(\frac{u_2 - u_1}{L} \right)$$

(3.1.8)

En outre, par la convention de signe de force nodale de la figure 3-2,

$$f_{1x} = T \quad (3.1.9)$$

Lorsque nous substituons l'équation (3.1.8), l'équation (3.1.9) devient

$$f_{1x} = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1) \quad (3.1.10)$$

De même,

$$f_{2x} = T \quad (3.1.11)$$

On remplace l'équation (3.1.8) dans l'équation (3.1.11)

$$f_{2x} = \frac{AE}{L} (u_2 - u_1)$$

(3.1.12)

Exprimant les équations. (3.1.10) et (3.1.12) sous forme matricielle, nous avons

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (3.1.13)$$

$\{f\} = K \{d\}$, nous avons, de l'équation (3.1.13),

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.14)$$

L'équation (3.1.14) représente la matrice de rigidité d'un élément barre dans les coordonnées locales. Dans l'équation (3.1.14), AE / L pour un élément barre est similaire à la constante de raideur k pour un élément ressort.

Étape 5 Assemblage des matrices des éléments barres pour obtenir la matrice de rigidité globale

Assemblez les matrices de rigidité globale et les forces à l'aide de la méthode de rigidité directe. Cette étape s'applique aux structures composées de plusieurs éléments.

$$[K] = \sum_{e=1}^N [k^{(e)}] \quad \text{et} \quad \{F\} = \sum_{e=1}^N \{f^{(e)}\} \quad (3.1.15)$$

Toutes les matrices de rigidité locale des éléments barres $[k^e]$ doivent être transformées en matrice de rigidité globale $[k]$ (à moins que les axes locaux ne coïncident avec les axes globaux).

Étape 6 Calcul des déplacements nodaux

Déterminer les déplacements en imposant des conditions aux limites et en résolvant simultanément un système d'équations, $\{F\} = [K] \{d\}$,

Étape 7 Calcul des forces interne

Enfin, déterminer les déformations et contraintes dans chaque élément barre par substitution des déplacements dans les équations. (3.1.5) et (3.1.6).

ÉLÉMENT POUTRE

Introduction

Dans ce chapitre on développe la matrice de rigidité pour un élément de poutre travaillent en flexion, la plupart des structures soit des bâtiments, des ponts et de beaucoup d'autres structures contiennent des éléments en poutre. Une poutre droite (Figure 1.1) est un solide engendré par une surface plane A , constante ou non, dont le centre de gravité G décrit le segment G_1G_2 , le plan qui contient A restant normal à G_1G_2 . De plus, les dimensions de A sont faibles (sans être négligeables) par rapport à G_1G_2 .

G_1G_2 est la fibre moyenne de la poutre.

A est la section droite de la poutre.

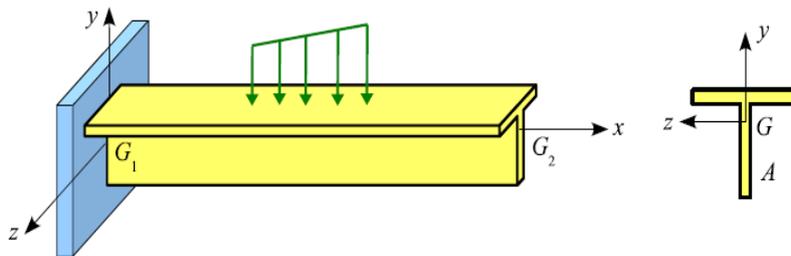


Figure 4-1. Élément de poutre.

4.1 Rigidités des Poutres

Dans cette section, la dérivation de la matrice de rigidité pour un élément de poutre est exposée. Une poutre est un élément structural généralement long et mince soumis à une charge transversale qui produit des effets de flexion importants par rapport à des effets de torsion ou axiaux. Cette déformation de flexion est mesurée comme un déplacement transversal et une rotation. Dans ce sens, les degrés de liberté considérés par nœud sont un déplacement transversal et une rotation.

Soit l'élément de poutre illustré dans la figure 4-1. La poutre est de longueur L avec des coordonnées locales axiales x et des coordonnées locales transversales y . Les déplacements nodaux transversaux dans le repère local sont donnés par v_i et les rotations par θ_i . Les forces nodales locales sont données par f_{iy} et les moments de flexion par m_i comme montré dans la figure 4-1 et 4-2. Nous négligeons tout d'abord tous les effets des forces axiales.

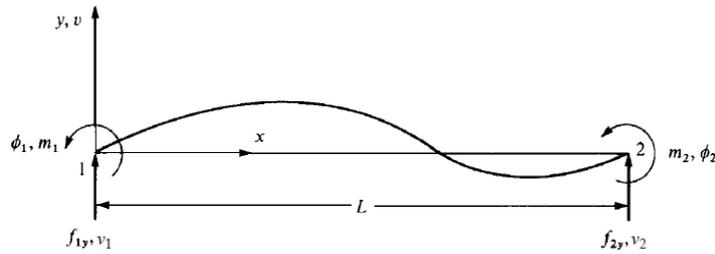


Figure 4–1 Élément poutre avec des déplacements, des rotations, des forces, et des moments nodaux positifs.

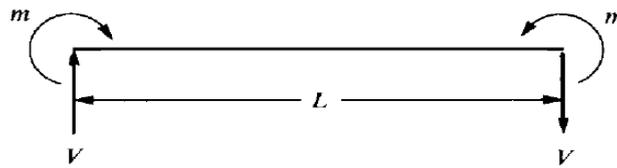
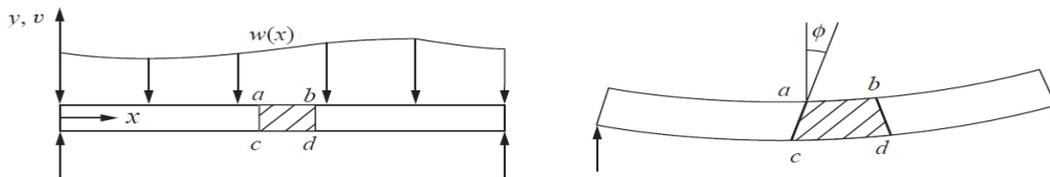
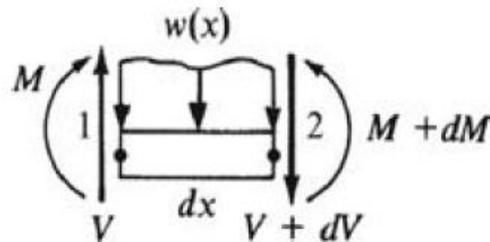


Figure 4–2 Conventions de signe pour les forces de cisaillement et les moments de flexion.



(A) poutre non déformée sous charge $w(x)$ (B) poutre déformée en raison du chargement appliqué



(C) élément différentiel de poutre.

Figure 4-3 Poutre sous charge distribuée

Dans tous les nœuds, les conventions de signes suivantes sont utilisées :

1. Les moments sont positifs dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
2. Les rotations sont positives dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
3. Les forces sont positives dans la direction positive.
4. Les déplacements sont positifs dans la direction positive de y .

La figure 4-2 indique les conventions de signes utilisées dans la théorie de la poutre pour les forces de cisaillement positives V et les moments de flexion m .

- Matrice de rigidité des poutres basée sur la théorie de la poutre Euler-Bernoulli

(Compte tenu uniquement des déformations de flexion)

L'équation différentielle régissant le comportement élastique linéaire de la poutre est basée sur :

- Au cours de la déformation, les sections droites restent perpendiculaires à la courbe moyenne.
- Les sections droites restent planes selon Navier-Bernoulli (pas de gauchissement).

L'hypothèse de Bernoulli permet de négliger le cisaillement dans le cas de la flexion : le risque de rupture est alors dû à l'extension des fibres situées à l'extérieur de la poutre, et la flèche est due au moment fléchissant. Cette hypothèse n'est pas valable pour les poutres courtes, car ces dernières sont hors des limites de validité du modèle de poutre, à savoir que la dimension des sections doit être petite devant la longueur de la courbe moyenne. Ceci est illustré dans la figure 4-3, où un plan par la ligne verticale a-c (figure 4-3 (a)) est perpendiculaire à l'axe longitudinal x avant la flexion, et ce même plan par a'-c' (tournant à travers l'angle θ dans la Figure 4- 3 (b)) reste perpendiculaire à l'axe x courbé après la flexion. Cela se produit en pratique uniquement lorsqu'un moment constant existe dans la poutre.

L'équation différentielle est dérivée comme suit. Considérons la poutre représentée sur la figure 4-3 soumise à un chargement distribué $w(x)$ (force / longueur). D'après l'équilibre de la force et du moment d'un élément différentiel de la poutre, montré à la figure 4-3 (c), nous avons

$$\sum F_y = 0: V - (V + dV) - w(x)dx = 0 \quad (4.1.1a)$$

En simplifiant l'équation (4.1.1a), on obtient

$$-w dx - dV = 0 \quad \text{ou } w = -\frac{dV}{dx} \quad (4.1.1a)$$

$$\sum M_2 = 0: -v dx + dM + w(x)dx \frac{dx}{2} = 0 \quad \text{ou } V = \frac{dM}{dx} \quad (4.1.1c)$$

La forme finale de l'équation (4.1.1c), reliant la force de cisaillement au moment de flexion, est obtenue en divisant l'équation gauche par dx puis en prenant la limite de l'équation lorsque $dx \rightarrow 0$. Le terme $w(x)$ disparaît alors.

En outre, la courbure κ de la poutre est liée au moment par

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (4.1.1d)$$

ρ est le rayon de la courbure comme illustré dans la figure 4-4b, v est la fonction de déplacement transversal dans la direction y (voir figure 4-4a), E est le module d'élasticité et I est le moment d'inertie suivant l'axe z (où l'axe z est perpendiculaire aux axes x et y). ($I = bh^3 / 12$ pour une section transversale rectangulaire de base b et de hauteur h indiquée sur la figure 4-4c).

La courbure pour des petites rotations $\theta = dv / dx$ est donnée par

$$\kappa = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{4.1.1d}$$

En remplaçant l'équation (4.1.1e) dans (4.1.1d), nous obtenons

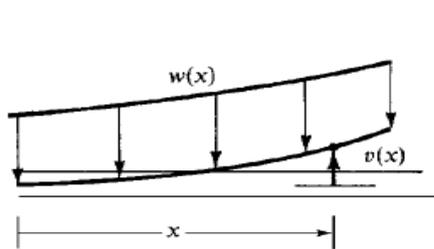
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{4.1.1f}$$

On résoudra l'équation (4.1.1f) pour M et en remplaçant ce résultat en (4.1.1c) et (4.1.1b), on obtient

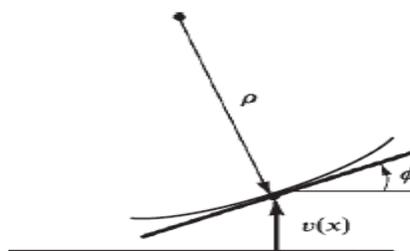
$$\frac{d^2}{dx^2} EI \frac{d^2v}{dx^2} = -w(x) \tag{4.1.1g}$$

Pour EI constante et seulement des forces et des moments nodaux, l'équation (4.1.1g) devient

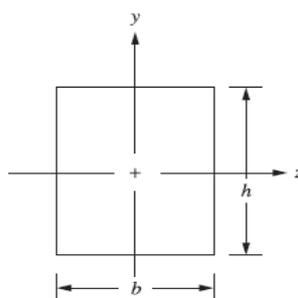
$$EI \frac{d^4v}{dx^4} = 0 \tag{4.1.1g}$$



a) Partie de corbure de la poutre



b) Rayon de corbure à $v(x)$



c) Section rectangulaire .

Figure 4-4 .Déformation d'une poutre en flexion

Nous allons maintenant suivre les étapes décrites au chapitre 1 pour développer la matrice de rigidité pour un élément de la poutre, puis illustrer des solutions complètes pour les poutres.

Étape 1 Sélectionner le type d'élément

Représenter la poutre avec numérotation des nœuds à chaque extrémité et en général numéroter l'élément (Figure 4-1).

Étape 2 Sélectionner une fonction de déplacement

Supposons que la variation de déplacement transversal à travers la longueur de l'élément est égale à :

$$v(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 \quad (4.1.2)$$

La fonction de déplacement cubique Eq. (4.1.2) est appropriée car il existe quatre degrés de liberté (un déplacement transversal v_i et une petite rotation θ_i à chaque nœud).

En utilisant la même procédure que celle décrite à la section 2.2, nous exprimons v en fonction des degrés nodaux de liberté v_1, v_2, θ_1 et θ_2 comme suit :

$$\begin{aligned} v(0) &= v_1 = a_4 \\ \frac{dv(0)}{dx} &= \theta_1 = a_3 \\ v(L) &= v_2 = a_1L^3 + a_2L^2 + a_3L + a_4 \\ \frac{dv(L)}{dx} &= \theta_2 = 3a_1L^2 + 2a_2L + a_3 \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$\theta = dv/dx$ pour une petite rotation θ supposée. La résolution des équations (4.1.3) pour a_1 à a_4 en termes de degrés de liberté nodaux et en remplaçant dans l'équation (4.1.2), nous avons

$$v = \frac{2}{L^3}(v_1 - v_2) + \frac{1}{L^2}(\theta_1 + \theta_2)x + \frac{-3}{L^2}(v_1 - v_2) - \frac{1}{L}(2\theta_1 + \theta_2)x^2 + \theta_1x + v_1 \quad (4.1.4)$$

Sous forme matricielle, nous exprimons l'équation (4.1.4) comme

$$v = [N]\{d\} \quad (4.1.5)$$

Avec

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1.6a)$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \quad (4.1.6b)$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{L^3} (2x^3 - 3x^2L + L^3) & N_2 &= \frac{1}{L^3} (x^3L - 2x^2L^2 + xL^3) \\
 N_3 &= \frac{1}{L^3} (-2x^3 + 3x^2L) & N_4 &= \frac{1}{L^3} (x^3L - x^2L^2)
 \end{aligned}
 \tag{4.1.7}$$

N1, N2, N3 et N4 sont appelés les fonctions de forme pour un élément de poutre. Ces fonctions de forme cubique sont connues sous le nom des fonctions d'interpolation. Pour l'élément de poutre, N1 = 1 lorsqu'il est évalué au nœud 1 et N1 = 0 lorsqu'il est évalué au nœud 2. Parce que N2 est associé à θ_1 , nous avons, à partir des deux équations (4.1.7), $(dN2/dx) = 1$ lorsqu'il est évalué au nœud 1. Les fonctions de forme N3 et N4 ont des résultats analogues pour le nœud 2.

Étape 3 Définir les relations déformation-déplacement et déformation-contrainte

Soit la relation de déformation axial / déplacement suivante soit valide

$$\varepsilon_x(x, y) = \frac{du}{dx}
 \tag{4.1.8}$$

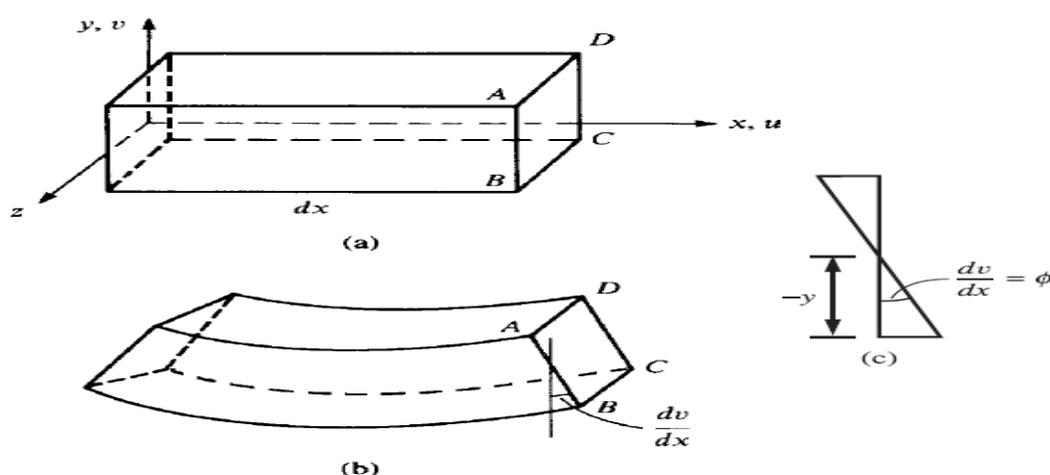


Figure 4-5 segment de la poutre (a) avant déformation et (b) après déformation ; (C) Angle de rotation de la section transversale ABCD

u est la fonction de déplacement axial. À partir de la configuration déformée de la poutre représentée sur la figure 4-5, on relie le déplacement axial au déplacement transversal par

$$u = -y \frac{dv}{dx}
 \tag{4.1.9}$$

Nous rappelon l'hypothèse fondamentale de poutre, que les sections transversales de la poutre (la section transversale ABCD) soit planes avant la déformation par flexion restent planes après la déformation et, en général, avec une petite rotation (dv /dx) . En utilisant l'équation (4.1.9) dans l'équation (4.1.8), nous obtenons

$$\varepsilon_x(x, y) = -y \frac{d^2 u}{dx^2} \quad (4.1.10a)$$

Utilisant la loi de Hooke ($\sigma_x = E \varepsilon_x$) et remplaçant l'Eq. (4.1.1f) pour $d^2 v = dx^2$ dans l'équation (4.1.10a), on obtient la formule de flexion de la poutre ou la contrainte de flexion comme suit :

$$\sigma_x = \frac{-My}{I} \quad (4.1.10b)$$

À partir de la théorie de poutre, le moment de flexion et la force de cisaillement sont liés à la fonction de déplacement transversal comme suit :

$$m(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2} \quad V = EI \frac{d^3 v}{dx^3} \quad (4.1.11)$$

Étape 4 Dérivée la matrice de rigidité

Tout d'abord, dériver la matrice de rigidité de l'élément poutre en utilisant l'approche d'équilibre direct. Nous relierons les forces de cisaillement et les moments de flexion de la poutre (figures 4-1 et 4-2), ainsi que les équations. (4.1.4) et (4.1.11), pour obtenir

$$f_{1y} = v = EI \frac{d^3 v(0)}{dx^3} = \frac{EI}{L^3} (12v_1 + 6L\theta_1 - 12v_2 + 6L\theta_2)$$

$$m_1 = -m = -EI \frac{d^2 v(0)}{dx^2} = \frac{EI}{L^3} (6Lv_1 + 4L^2\theta_1 - 6Lv_2 + 2L^2\theta_2) \quad (4.1.12)$$

$$f_{2y} = -V = -EI \frac{d^3 v(L)}{dx^3} = \frac{EI}{L^3} (-12v_1 - 6L\theta_1 + 12v_2 + 6L\theta_2)$$

$$m_2 = m = EI \frac{d^2 v(L)}{dx^2} = \frac{EI}{L^3} (6Lv_1 + 2L^2\theta_1 - 6Lv_2 + 4L^2\theta_2)$$

Les équations (4.1.12) relient les forces nodales aux déplacements nodaux. Sous forme matricielle, les équations (4.1.12) deviennent

$$\begin{bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 24 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1.13)$$

La matrice de rigidité est alors égale

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 24 \end{bmatrix} \quad (4.1.14)$$

L'équation (4.1.13) indique que [k] relie les forces transversales et les moments de flexion aux déplacements transversaux et aux rotations, alors que les effets axiaux ont été négligés.

Matrice de rigidité des poutres basée sur la théorie de la poutre Timoshenko (Y compris la déformation transversale du cisaillement)

La théorie de poutre avec déformation due au cisaillement est dérivée comme suit. la déformation par cisaillement (déformation due à la force du cisaillement V) est maintenant incluse. En se référant à la figure 4-6, on observe une section d'une poutre de longueur différentielle dx avec la section transversale supposée rester plane mais non plus perpendiculaire à l'axe neutre (axe x) en raison de l'inclusion de la force de cisaillement entraînant une rotation indiquée par le terme β . La courbure totale de la poutre dans un point x se compose de deux parties, une provoquée par la flexion et une par la force de cisaillement, de sorte que la rotation de la courbure au point x est donnée par

$$\frac{dv}{dx} = \theta(x) + \beta(x) \quad (4.1.15a)$$

La rotation due au moment de flexion et due à la force transversale de cisaillement est donnée par $\theta(x)$ et $\beta(x)$.

Nous supposons que la courbure est linéaire et que la courbure angulaire (pente) est très faible.

La relation entre le moment de flexion et la déformation de flexion (courbure) est comme suit :

$$M(x) = EI \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (4.1.15b)$$

Et la relation entre la force de cisaillement et la déformation due à cisaillement est donnée par

$$V(x) = k_s AG \beta(x) \quad (4.1.15c)$$

La différence entre dv/dx et θ représenté la déformation du cisaillement γ_{zy} ($=\beta$) de la poutre

$$\gamma_{yz} = \frac{dv}{dx} - \theta \quad (4.1.15d)$$

Soit l'élément différentiel dans la Figure 4-3 (c) et les équations. (4.1.1b) et (4.1.1c) obtenues en sommant les forces transversales puis en additionnant les moments de flexion. Nous remplaçons maintenant l'éq. (4.1.15c) pour V et l'Eq. (4.1.15b) pour M dans les équations. (4.1.1b) et (4.1.1c) avec β de l'équation (4.1.15a) pour obtenir les deux équations différentielles suivantes :

$$\frac{d}{dx} k_s AG \frac{dv}{dx} - \theta = -w \quad (4.1.15e)$$

$$\frac{d}{dx} EI \frac{d\theta}{dx} + k_s AG \frac{dv}{dx} - \theta = 0 \quad (4.1.15f)$$

Pour dériver la matrice de rigidité pour l'élément de poutre, y compris la déformation transversale du cisaillement, nous supposons que le déplacement transversal doit être donné par la fonction cubique dans l'équation. (4.1.2). Nous choisissons la déformation de cisaillement transversale γ consistant avec le polynôme cubique pour $v(x)$, de sorte que γ est une constante donnée par

$$\gamma = c \quad (4.1.15g)$$

En utilisant la fonction de déplacement cubique pour v , la relation de rotation donnée par l'équation (4.1.15a), et la déformation de cisaillement donnée par l'Eq. (4.1.15g), ainsi que la relation de moment de flexion -courbure, Eq. (4.1.15b) et la relation de déformation de cisaillement- force de cisaillement Eq. (4.1.15c), dans la relation de force de cisaillement – moment de flexion Eq. (4.1.1c), nous obtenons

$$c = 6a_1g \quad (4.1.15h)$$

$g = EI / ks AG$ et $ks A$ est la surface de cisaillement. Les surfaces de cisaillement, As , varient selon les formes des sections. Par exemple, pour une forme rectangulaire As est égale à 0.83 fois la section transversale A , pour une section transversale circulaire, on prend 0,9 fois la section transversale.

Utiliser les équations. (4.1.2), (4.1.15a), (4.1.15g) et (4.1.15h) permettent à θ d'être exprimé comme un polynôme en x comme suit:

$$\theta = a_3 + 2a_2x + (3x^2 + 6g)a_1 \quad (4.1.15i)$$

Utiliser les équations. (4.1.2) et (4.1.15i), nous pouvons exprimer les coefficients a_1 à a_4 en termes de déplacements nodaux v_1 et v_2 et les rotations θ_1 et θ_2 de la poutre aux extrémités $x = 0$ et $x = L$ comme précédemment. Les expressions pour a_1 à a_4 sont ensuite données comme suit :

$$a_1 = \frac{2v_1 + L\theta_1 - 2v_2 + L\theta_2}{L(L^2 + 12g)}$$

$$a_2 = \frac{-3Lv_1 - (2L^2 + 6g)\theta_1 + 3Lv_2 + (-L^2 + 6g)\theta_2}{L(L^2 + 12g)} \quad (4.1.15j)$$

$$a_3 = \frac{-12gv_1 + (L^3 + 6gL)\theta_1 + 12gv_2 - 6gL\theta_2}{L(L^2 + 12g)}$$

$$a_4 = v_1$$

En substituant dans l'équation (4.1.2), nous obtenons

$$v = \frac{2v_1 + L\theta_1 - 2v_2 + L\theta_2}{L(L^2 + 12g)} x^3 - \frac{3Lv_1 + (2L^2 + 6g)\theta_1 - 3Lv_2 - (-L^3 + 6g)\theta_2}{L(L^2 + 12g)} x^2 - \frac{12gv_1 - (L^3 + 6gL)\theta_1 - 12gv_2 - 6gL\theta_2}{L(L^2 + 12g)} x + v_1 \quad (4.1.15k)$$

D'une manière similaire à l'étape 4 (pour dériver la matrice de rigidité pour l'élément de poutre sans prendre la déformation du cisaillement), nous avons

$$f_{1y} = v(0) = 6EIa_1 = \frac{EI(12v_1+6L\theta_1-12v_2+6L\theta_2)}{L(L^2+12g)}$$

$$m_1 = -m(0) = -2EIa_2 = \frac{EI(-6Lv_1-(4L^2+12g)\theta_1+6Lv_2+(-2L^2+12g)\theta_2)}{L(L^2+12g)} \quad (4.1.151)$$

$$f_{2y} = -V(L) = \frac{EI(-12v_1-6L\theta_1+12v_2+6L\theta_2)}{L(L^2+12g)}$$

$$m_2 = m(l) = \frac{EI[6Lv_1+(2L^2-12g)\theta_1-6Lv_2+(4L^2+12g)\theta_2]}{L(L^2+12g)}$$

Sous forme matricielle l'Eq. (4 . 1. 15 l) devient

$$\begin{bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L(L^2+12g)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4L^2 + 12g) & -6L & (2L^2 - 12g) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2L^2 - 12g) & -6L & (4L^2 + 12g) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.1.15m)$$

La matrice de rigidité, y compris la déformation de flexion et cisaillement, est alors donnée par

$$[k] = \frac{EI}{L(L^2+12g)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4L^2 + 12g) & -6L & (2L^2 - 12g) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2L^2 - 12g) & -6L & (4L^2 + 12g) \end{bmatrix} \quad (4 . 1. 15n)$$

Dans l'équation (4.1.15n) rappelez-vous que g représente le terme de cisaillement transversal, et si on fixe $g = 0$, on obtient l'équation (4.1.14) pour la matrice de rigidité de la poutre en négligeant la déformation du cisaillement transversal. Pour voir plus facilement l'effet du facteur de correction de cisaillement, nous définissons le terme de correction de cisaillement non dimensionnel $\varphi = 12EI/(ksAGL^2) = 12g = L^2$ et réécrivons la matrice de rigidité comme

$$[k] = \frac{EI}{L(L^2+\varphi)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & (4L^2 + \varphi) & -6L & (2L^2 - \varphi) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & (2L^2 - \varphi) & -6L & (4L^2 + \varphi) \end{bmatrix} \quad (4 . 1. 15o)$$

4.2 Étape 5 Assemblage des équations des éléments pour obtenir les équations globales et introduire des conditions aux limites

Considérons la poutre dans la figure 4-6 comme exemple pour illustrer la procédure d'assemblage des matrices de rigidité des éléments de poutre. Supposons que EI est constant dans toute la poutre. Une force de 1000 N et un moment de 1000 N-mm sont appliqués au milieu de la poutre. L'extrémité gauche est un support fixe et l'extrémité droite est un support de rotule simple.

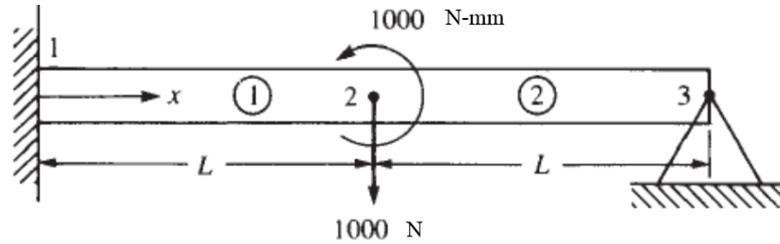


Figure 4-6 Poutre soumise à force et moment.

Les charges sont supposées être appliquées uniquement aux nœuds. En utilisant l'équation (4.1.14), les matrices de rigidité globale pour les deux éléments sont maintenant données par

$$[k^{(1)}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 24 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

$$[k^{(2)}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 24 \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

La matrice de rigidité globale peut être assemblée en utilisant la méthode de rigidité directe. Lorsque la matrice de rigidité globale a été assemblée, les forces nodales globales externes sont liées aux déplacements nodaux globaux. Grâce à la superposition directe et aux équations (4.2.1) et (4.2.2), les équations de régulation pour la poutre sont donc données par

$$\begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 12 + 12 & -6L + 6L & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & -6L + 6L & 4L^2 + 4L^2 & -6L & 2L \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (4.2.3)$$

Compte tenu des conditions aux limites, avec le nœud 1 fixe et un appui simple au nœud 3, nous avons

$$\theta_1 = 0 \quad v_1 = 0 \quad v_3 = 0 \quad (4.2.4)$$

En considérant les troisième, quatrième et sixième équations dans la matrice (4.2.3) correspondant aux lignes avec des degrés de liberté inconnus et utilisant des équations. (4.2.4), et remplaçant $F_{2y} = 1000$ N, $M_2 = 1000$ N-MM et $M_3 = 0$. nous obtenons

$$\begin{Bmatrix} -1000 \\ 1000 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6L \\ 0 & 8L^2 & 2L^2 \\ 6L & 2L^2 & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (4.2.5)$$

Nous allons maintenant résoudre l'équation. (4.2.5) pour trouver le déplacement nodal inconnu v_2 et les rotations nodales inconnues θ_2 et θ_3 .

4.3 Vecteur Charges exprimé en repère local

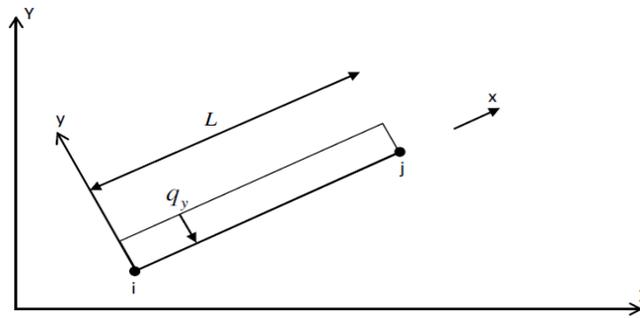


Figure 4.7 –Élément de poutre plane chargé uniformément.

Considérant une poutre plane chargée uniformément, le vecteur de charge $\{f_e\}$ se réduit à celui des forces nodales de surface (4.18) soit

$$\{f_e\} = \{f_e^s\} = \int_{s_e} [N]^T \cdot \{f^s\} \cdot dS_e = \int_0^L [N]^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -q_y \end{Bmatrix} dx = \begin{bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^3} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -q_y \end{Bmatrix} dx =$$

$$\begin{Bmatrix} -\frac{q_y L}{2} \\ \frac{q_y L^2}{12} \\ -\frac{q_y L}{2} \\ \frac{q_y L^2}{12} \end{Bmatrix} \quad (6.3.4)$$

D'une manière générale et dans le cas de forces orientées dans le sens y négatif, le vecteur de charge d'un élément de poutre plane soumise à un système de charges transversales est égale à l'inverse des réactions

et moments d'encastrement de la poutre bi-encastree subissant le meme chargement. En d'autres termes, ce vecteur traduit les actions nodales equivalentes au chargement applique sur la poutre (cf. tableau 6.1 des charges nodales equivalentes).