Chapitre II : les principales lois de distribution : lois normale, pearson, Student, Fischer-Snedecor

1) La loi normale

La distribution normale, ou de Laplace-Gauss, appelée aussi gaussienne, est une distribution continue qui dépend de deux paramètres: μ et σ. On la note N (μ, σ). Le paramètre μ peut être quelconque mais σ est positif.

a) Définition

Une variable aléatoire X suit une loi normale, lorsque l'expression de sa distribution est:

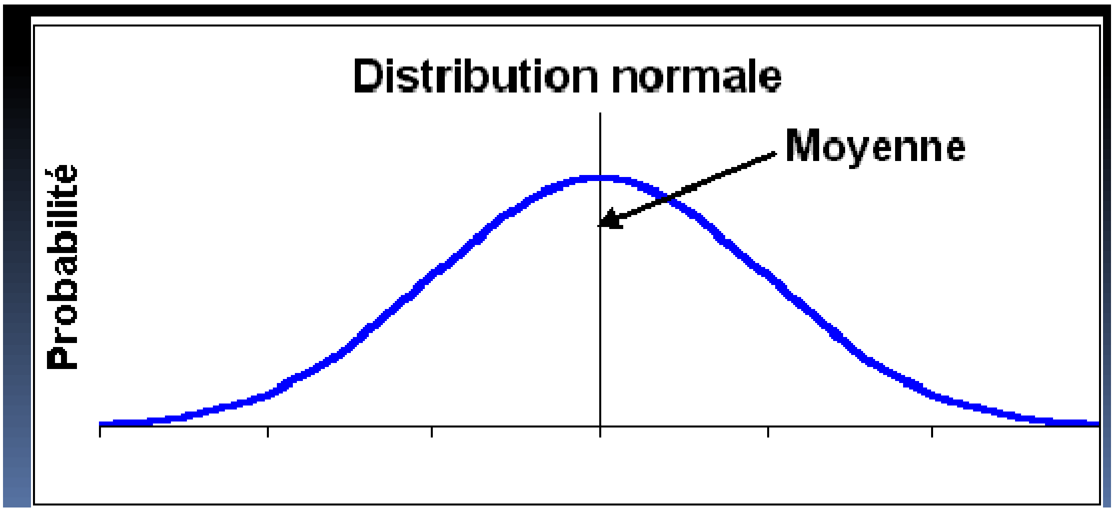
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$-\infty < X < \infty$ e Et π sont deux constantes.

$\pi = 3.14592$ Et e = 2.71828.

Allure de la courbe

La loi normale, notée N $((\mu, \sigma^2)$, est symétrique par rapport à la droite d'abscisse µ.



Comme la courbe est symétrique, on doit avoir:

$$Mo = M = \mu$$

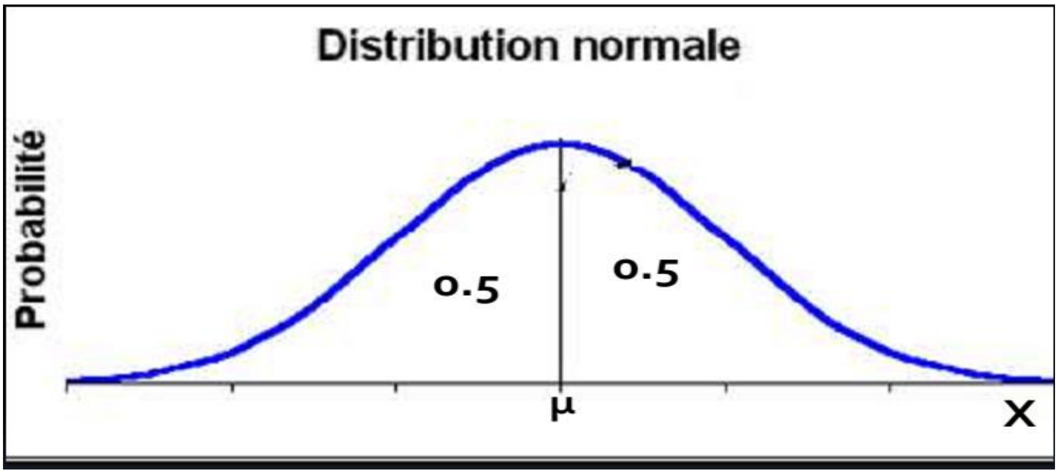
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z est la variable centrée réduite, elle est sans unité Z → N (0 ; 1)

b) La distribution normale centrée réduite

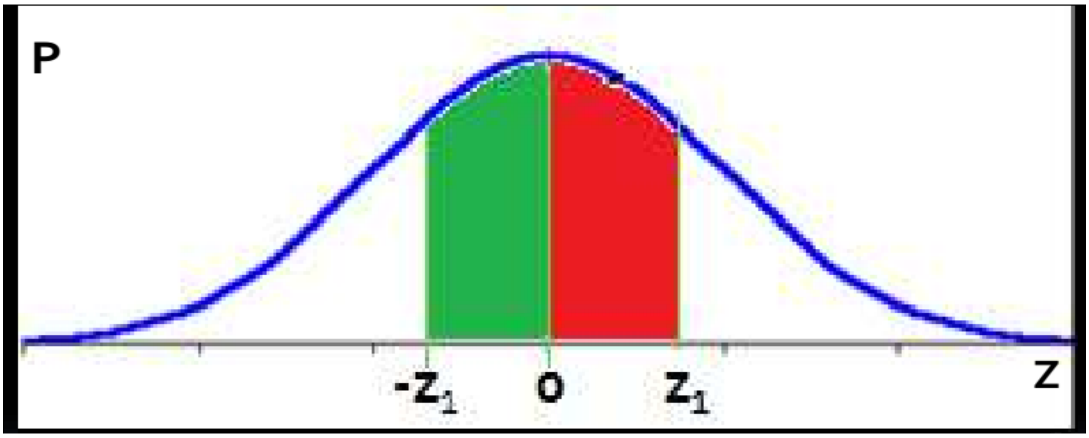
On dit que la distribution est **centrée** si son espérance **µ** est nulle ; elle est dite **réduite** si sa variance σ^2 (et son écart-type σ) est égale à 1. La distribution normale centrée réduite N $(0, 1)$ est donc définie par la formule.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$



Comme la courbe est symétrique, on doit avoir:

Mo = M = μ

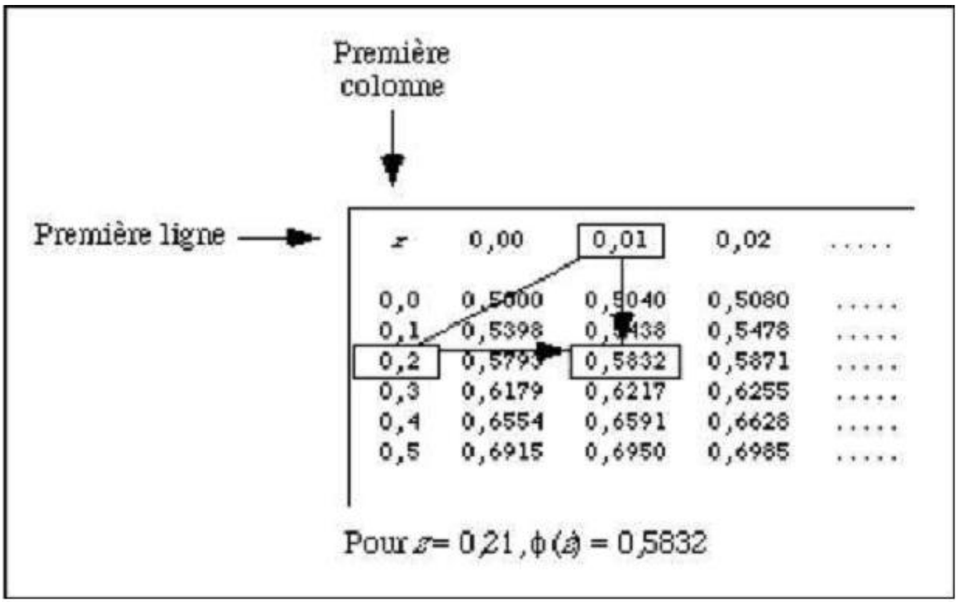


<u>Applications de la loi normale</u>

<u>Utilisation de table de la loi normale :</u>

La première colonne de la table indique l'unité et la première décimale de z_i.

La première ligne de la table indique la deuxième décimale de z_i.



z	0,00	0,01	0,02	.....
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	.....
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	.....
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	.....
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	.....
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	.....
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	.....

Pour $z = 0{,}21$, $\phi(z) = 0{,}5832$

Exemple 1: Quelle est la probabilité pour que la variable normale centrée réduite Z soit situé entre $o\ et\ 0.5$?
La table nous donne 0.1915.
Exemple 2: Chercher la probabilité $P\ (-2.24\ \leq\ Z\ \leq\ 1.12)$.
0.8561.
Exemple 3: Chercher $P\ (1\ \ \leq\ Z\ \leq\ \ 2)$
0.1359

2) **la loi de Khi-deux (Pearson)**
   a) **définition :**
   SoientX_1 , … … , X_n n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(i.i.d)$ selon une distribution normale standard. On dit que la variable aléatoire$Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots\cdots + X_n^2$ à une distribution X^2 à n degré de liberté notéeX_n^2. La densité de cette distribution est$f(x) = \frac{z^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}}{2^{n/2}\ \Gamma(n/2)} e^{-z/2}$,$z \geq 0$,
   Avec $\Gamma(.)$ Indique la fonction$\Gamma(Gamma)$, définie par
   $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$, $p > 0$,

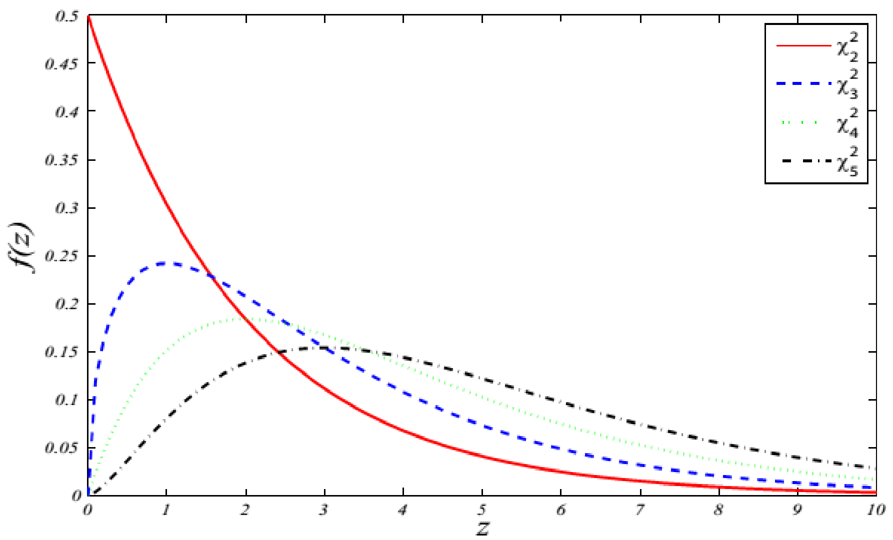


Figure: Distribution de X^2 pour différentes degré de liberté.

Propriétés.
- $X^2 \geq 0$, cette loi n'est donc pas symétrique,
- La moyenne et la variance de la distribution X^2sont $E(Z\ )\ =\ n$ et $\sigma^2(Z\ )\ =\ 2n$
- Pour $n \geq 30$, $\sqrt{2X^2}\ - \sqrt{2n-1}$suit approximativement une loi $N(0,1)$

<u>**Applications de la loi Khi 2**</u>
Exemple : soit X une variable aléatoire de Khi-deux de degré de libertén ($X \rightsquigarrow X_n^2$). Calculer les probabilités suivantes :
1) $n = 11$ et $p(X \leq 5{,}57)$, la table nous donne $p = 0{,}1$

2) $n = 8$ et $p(13{,}36 \leq X \leq 20{,}09)$, $p(X \leq 20{,}09) - P(X \leq 13{,}36) = 0{,}99 - 0{,}9 = 0.09$
3) $n = 10$ et$p = (X \geq 20{,}48\,)= \; 1 - \; p(X \leq 20.48) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025$

3) La loi de Student ou loi de *t*

Supposons que $X_0, X_1, \dots \dots .., X_n, n$ variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une distribution normale standard. On dit que la variable aléatoire

$$T = \frac{X_0}{\sqrt{\frac{1}{2}(X_1^2 + \cdots X_n^2)}} = \frac{X_0}{\sqrt{Z/n}} (avec\ Z \rightsquigarrow X_n^2)$$

A une distribution t (ou distribution de Student) à n degrés de liberté notéet_n. La densité de cette distribution est

$$f(x) = \frac{\mathrm{r}((n + 1/2))}{\mathrm{r}(n/2)\sqrt{n\pi}}(1 + t^2/n)^{-(n+1)/2}$$

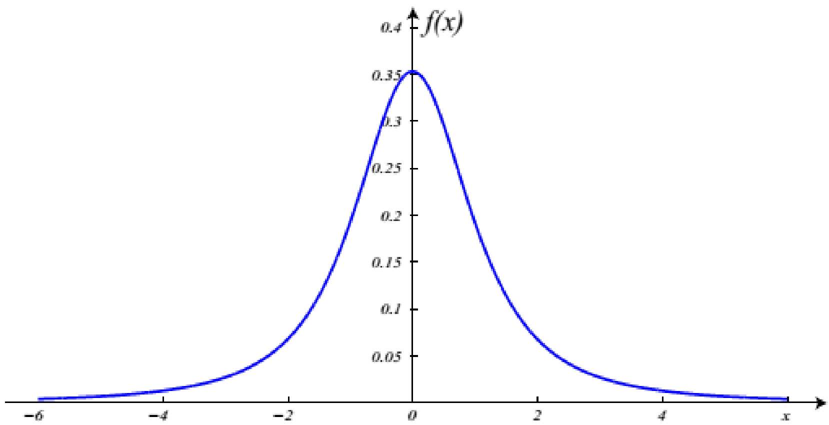


Figure: Distribution de Student.

<u>Propriétés.</u>

- $T(n)$ admet une densité paire, cette loi est donc symétrique,
- $E[T\ ] \;=\; 0$ et $Var(T\ ) = \; n/(n\; - 2)\; si\; n \;>\; 2,$
- Pour $n \;>\; 30, T\ (n)$ peut être approchée par$N\ (0{,}1)$.

  $E[T\ ]$: $la\ moyenne$ et $Var\ (T)$: Variance

<u>Applications de Student :</u>

Exemple : soit X une variable aléatoire suit la loi de Student de degré de libertén $(X \rightsquigarrow T(n))$. Calculer les probabilités suivantes :

1) $n = 14$ et $p(T \leq 1{,}07)$, la table nous donne $p = 0{,}85$
2) $n = 9$ et $p(0{,}702 \leq T \leq 2{,}82)$, $p(X \leq 2{,}82) - P(X \leq 0{,}70) = 0{,}99 - 0{,}75 = 0.24$
3) $n = 17$ et $p(T \geq 2{,}56), = \; 1 - \; p(X \leq 2{,}56) = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

4) **La distribution Fisher (Fisher-Snedecor) *F***

soit $X_1, \cdots, X_{n+m}$, $n+m$ variables aléatoires indépendantes qui suivant une distribution normale centrée et réduite. On dit que la variable aléatoire

$$Y = \frac{\frac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)}{\frac{1}{m}(X_{n+1}^2 + \cdots X_{n+m}^2)} = \frac{Z_1/n}{Z_2/m} \ (Z_1 \rightsquigarrow X_n^2 et\ Z_2 \rightsquigarrow X_m^2)$$

A une distribution F avec n degrés de liberté au numérateur et m degrés de liberté au dénominateur notée$F_{(n,m)}$ou de degrés de libertés(n, m). La densité de cette distribution est

$f(y) = \frac{\Gamma((n+m)/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} n^{n/2} m^{m/2} y^{(n/2)-1}\ (m+ny)^{-(n+m)/2}, y \geq 0$

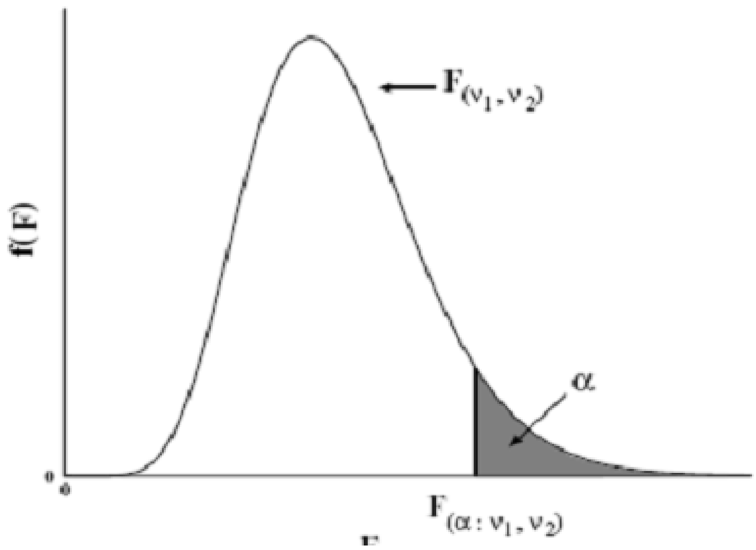


Figure: Distribution de Fisher-Snedecor.

Propriétés.

- $E[Y\ ] = \frac{m}{m-2}$ pour $m > 2$ et sa variance $(Y\ ) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}, pour\ \ m > 4$, $E[Y\ ]: la\ moyenne$ et $Var\ (Y)$: Variance

Applications de Fisher-Snedecor :

Exemple :

Soit f une variable aléatoire d'une loi de *Fisher* de degrés de libertésn, m $(f \rightsquigarrow F_{n,m})$.
Déterminer la valeur de f si :

1) $n = 8, m = 4\ et\ p(F \leq f) = 0.99$ on a $f = F_{(8,4,0.99)} = 27.5$
2) $n = 15, m = 20et\ p(F \geq f) = 0.05 \rightarrow P\ (F \leq f) = 0.95$a partir de la loi de Fisher $p = 0.95$, dans l'intersection de la ligne $m = 20$ et la colonne $n = 15$, on a $f = F_{(15,20,0.95)} = 2.203$