أ. مسعودي

المركز الجامعي بخميس مليانة
معهد العلوم الاقتصادية، علوم التسيير و التجارية
المستوى : السنة أولى ل.م.د

المقياس: احصاء2
موضوع السلسلة: المتغيرات العشوائية أحادية البعد

السلسلة رقم 3

التمرين 1: في التجربة العشوائية الممثلة في رمي قطعتي نرد، نعرف المتغير العشوائي X على أنه "القيمة المطلقة لفرق النتيجتين المتحصل عليها ". المطلوب:

1- أوجد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X و مثله بيانيا.
2- قدم تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X و مثله بيانيا.
3- أحسب $p(X<2)$; $p(X>=3)$
4- أحسب التوقع الرياضي و التباين.

التمرين 2: ليكن X متغير عشوائي، توزيعه الاحتمالي يقدمه الجدول التالي:

X=xi	P(X=xi)
15	1 h
25	2h
35	3h
45	4h
55	5h
65	6h

المطلوب:
1- أوجد قيمة h.
2- أوجد تابع التوزيع الاحتمالي $F(xi)$
3- نعرف المتغير الجديد Y كما يلي : $y=(x-5)/10$، أوجد قيمه.
4- أوجد تابع الاحتمالي و تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير الجديد Y .
5- أحسب $Var(y)$; $Var(x)$; $E(y)$; $E(x)$

التمرين 3: الجدول التالي يقدم التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

X=xi	1	2	3	4	5
P(X=xi)	1/15	2/15	1/5	4/15	K

المطلوب:
1- حدد قيمة الثابت k.
2- أحسب الاحتمالات التالية: $p(1<x\leq4)$; $p(2\leq x<5)$; $p(x>5)$; $p(x\geq5)$
3- أحسب: $Var(x)$, $E(x)$

التمرين 4 : X متغير عشوائي مستمر ، تابع كثافته الاحتمالية يعطى وفقا العلاقة التالية :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6}x - c & si \quad 0 < x < 3 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

1- أوجد قيمة c ثم أحسب $p(1<x<2)$ ، $Var(x), E(x)$

2- إذا كان $y=2x$ أوجد : $f(y)$; $E(y)$; $Var(y)$

التمرين5: ليكن X متغير عشوائي مستمر معرف بالتابع التالي:

$$f(x)=\begin{cases} k(2x+3) & si \quad 1 < x < +\infty \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

1- أوجد قيمة k حتى المتغير العشوائي X يكون تابع كثافة احتكالية.

2- أحسب الوسيط (Me)

التمرين 6: ليكن X متغير عشوائي مستمر، دالة كثافته الاحتمالية تعطى وفقا العلاقة التالية:

$$f(x)=\begin{cases} k e^{-\frac{x}{2}} & si \quad x \geq 0 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

1- أوجد قيمة k.

2- أوجد قيمة α حيث أن $P(x \geq \alpha)=\frac{1}{2}$

السلسلة من إعداد أساتذة المقياس

التصحيح النموذجي للسلسلة رقم 3

تمرين ①:

X : متغير عشوائي متمثل في " القيمة المطلقة لفرق النتيجتين المتحصل عليهما :

① ايجاد جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X

- ايجاد المجموعة الاساسية

$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),$
$(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,4),(4,5),(4,6),(5,5),(5,2),$
$(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

- المجموعة الاساسية للمتغير X :

$S_x = \{0,1,2,3,4,5\}$

$(x=0) \Rightarrow \{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)\}$ $\quad p(X=0) = \frac{6}{36}$

$(x=1) \Rightarrow \{(1,2)(2,1)(3,2)(2,3)(4,3)(3,4)(5,4)(4,5)(6,5)(5,6)\}$

$p(x=1) = \frac{10}{36}$

$(x=2) \Rightarrow \{(3,1)(1,3)(4,2)(2,4)(5,3)(3,5)(6,4)(4,6)\}$

$p(x=2) = \frac{8}{36}$

$(x=3) \Rightarrow \{(5,2)(2,5)(6,3)(3,6)(4,1)(1,4)\}$ $\quad p(x=3) = \frac{6}{36}$

$(x=4) \Rightarrow \{(6,2)(2,6),(5,1)(1,5)\}$ $\quad p(x=4) = \frac{4}{36}$

$(x=5) \Rightarrow \{(6,1)(1,6)\}$ $\quad p(x=5) = \frac{2}{36}$

ومنه جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	$6/36$	$10/36$	$8/36$	$6/36$	$4/36$	$2/36$

الإحصائي ... الحصة السادسة

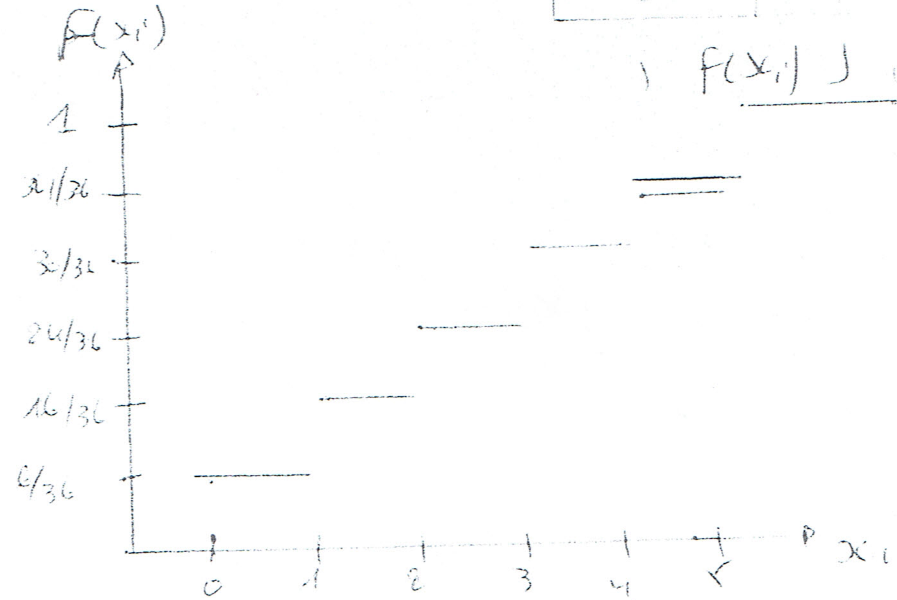
تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X $F(x_i)$

$$F(x_i)\begin{cases} 6/36 & x \leq 0 \\ 16/36 & x \leq 1 \\ 24/36 & x \leq 2 \\ 30/36 & x \leq 3 \\ 34/36 & x \leq 4 \\ 36/36 & x \leq 5 \end{cases}$$

باستعمال الجدول مباشرة

$X = x_i$	$P(X = x_i)$	$F(x_i)$ $P(X \leq x_i)$
0	6/36	6/36
1	10/36	16/36
2	8/36	24/36
3	6/36	30/36
4	4/36	34/36
5	2/36	36/36

التمثيل البياني لـ $F(x_i)$



أحسب كل من:

$- P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$
$= 6/36 + 4/36 + 2/36 = \frac{12}{36}.$

$- P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = 6/36 + 10/36 = 16/36$

أحسب التوقع الرياضي والتباين

$E(X) = \sum x_i P_i = (0 \cdot 6/36) + (1 \cdot 10/36) + (2 \cdot 8/36) + (3 \cdot 6/36) + (4 \cdot 4/36) + ...$

$\boxed{E(X) = 1{,}94}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$= \sum x_i^2 P_i - E(X)^2$

$= [... (1^2 \cdot 10/36) + (2^2 \cdot 8/36) + (3^2 \cdot 6/36) + (4^2 \cdot 4/36) + (5^2/36 ...$

1/ تحديد قيمة K :

$\sum p(X=x_i)=1 \Rightarrow 1/15 + 2/15 + 3/15 + 4/15 + K$

$\Rightarrow \frac{10}{15} + K = 1 \Rightarrow K = 1 - \frac{10}{15} = \frac{5}{15}$

2/ حساب الاحتمالات التالية

- $p(X \geq 5) = p(X=5) = \frac{5}{15}$
- $p(X>5) = 0$

$p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} =$

- $p(2 \leq X < 5) = p(x=2) + p(x=3) + p(x=4) = \frac{9}{15}$
- $p(1 < X \leq 4) = p(x=2) + p(x=3) +$

3/ حساب $E(X)$ ، $Var(X)$

$E(X) = \sum x_i\, p(X=x_i) = 1 \cdot 1/15 + 2 \cdot 2/15 + 3 \cdot 3/15 + 4 \cdot 4/15 + 5 \cdot 5/15 = 3,$

$Var(x) = E(x^2) + E(x)^2 = 1^2 \cdot 1/15 + 2^2 \cdot 2/15 + 3^2 \cdot 3/15 + 4^2 \cdot 4/15 + 5^2 \cdot 5/15 -$

$V(x) = \underline{1,60}$.

حل التمرين ④ :

1/ ايجاد قيمة C . بما أن $f(x)$ تابع كثافة احتمالية فإن

$\int_0^3 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{6}x - C\, dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{12}x^2 - Cx\right]_0^3$

$\Rightarrow \frac{1}{12}3^2 - C\,3 = 1 \Rightarrow \frac{9}{12} - 3C = 1 \Rightarrow -3C = 1 - \frac{9}{12}$

$3C = \frac{3}{24} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{3}{2\ldots}}$

ومنه تابع الكثافة الاحتمالية تكتب على الشكل التالي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + \frac{3}{24} & si\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & ailleurs. \end{cases}$$

2/ حساب الاحتمالات

* $P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{6}x + \frac{3}{24}\,dx$

$= \left[\frac{1}{12}x^2 + \frac{3}{24}x\right]_1^2 = \left[\frac{4}{12} + \frac{3}{24}\right] - \left[\frac{1}{12} + \frac{3}{24}\right] = \frac{16}{24} = 0,66$

$E(x) = \int_0 x_i f(x_i)\, dx = \int \ldots$

$$= \left[\frac{1}{18}x^3 + \frac{3}{48}x^2\right]_0^3 = \frac{1}{18}3^3 + \frac{3}{48}3^2 = 1{,}٧ + 0{,}٣٦ = \ldots$$

$$V(x) = \underbrace{\int_0^3 x_i^2 f(x_i)\, dx}_{E(x^2)} - E(x)^2$$

$$E(x^2) = \int_0^3 x_i^2 f(x_i)\, dx = \int_0^3 x_i^2\left(\frac{1}{6}x + \frac{3}{24}\right) dx = \int_0^3 \frac{1}{6}x_i^3 + \frac{3}{24}x_i^2\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{72}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{24}3^4 + \frac{3}{72}3^3 = 3{,}37٧ + 1{,}12٧ = 4{,}٧$$

$$V(x) = 4{,}٧ - (2{,}06)^2 = \underline{0{,}2٧٦}.$$

/٢ اذا كان $y = 2x$ اوجد
$x = \frac{1}{2}y$

* $f(y) = \frac{1}{12}y + \frac{3}{24}$; $0 < y < 3$.

نستعمل الخواص .

* $E(y) = E(2x) = 2E(x) = 2 \cdot 2{,}06 = 4{,}12$

* $V(y) = V(2x) = 2^2 V(x) = 4 \cdot 0{,}2٧6 = 1{,}0٢٧$.

التمرين ② ؛

① ايجاد K حتى يكون $f(x)$ تابع كثافة اي

$$\int_1^3 f(x)\, dx = 1 \Rightarrow \int_1^3 K(2x+3)\, dx = 1 \Rightarrow K\int_1^3 2x+3\, dx = 1$$

$$\Rightarrow K\left[\frac{2}{2}x^2 + 3x\right]_1^3 = 1 \Rightarrow K\left([3^2 + 9] - (1+3)\right) = 1$$

$$\Rightarrow 14K = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{14}.$$

② ايجاد الوسيط Me

نعلم ان الوسيط يقسم التوزيع الى قسمين متساويين وفي حالة م.ع. مستمر يقسم المساحة تحت المنحنى (اي التكامل) الى قسمين $\frac{1}{2}$

$$\int_1^{Me} f(x)\, dx = \frac{1}{2} = P(X \leq Me)$$

$$\int_1^{Me} \frac{1}{14}(2x+3)\, dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{14}\left[x^2 + 3x\right]_1^{Me} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[Me^2 + 3Me\right]_1^{Me} = 7$$

$$\Rightarrow Me^2 + 3Me - 4 = 7$$

نقوم بحل هذه المعادلة وذلك ب

$$f(x) = \begin{cases} K e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$e^{kx} \rightarrow \frac{1}{k} e^{kx}$

1/ ايجاد قيمة K :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} K e^{-\frac{x}{2}}\,dx = 1 \Rightarrow K \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = 1$$

$$K\left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow K(2) = 1 \Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2}}$$

ومنه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2/ ايجاد قيمة α

$$P(X \geq \alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_\alpha^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_\alpha^{+\infty} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\frac{1}{2}\alpha} = 1/2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\alpha}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{\frac{1}{2}\alpha} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln e^{\frac{1}{2}\alpha} = \ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\alpha \ln e = \ln 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\alpha = \ln 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2\ln 2} = 1{,}39$$