التوزيعات الاحتمالية

في كثير من النواحي التطبيقية، تتبع بعض الظواهر توزيعات احتمالية خاصة، وهي التوزيعات التي يمكن حساب احتمالات قيم المتغير عن طريق معادلة رياضية، تسمى بدالة الاحتمال $f(x)$ ، وهذه المعادلة لها معالم معينة، تسمى بمعالم المجتمع الذي ينسب له هذا التوزيع، وهذه المعالم ما هي إلا حقائق ثابتة مجهولة، وهي الأساس في حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتمالي للمجتمع محل الدراسة.

1-التوزيعات الاحتمالية المنفصلة الخاصة

ومن أهم التوزيعات التي سيتم دراستها في هذا المقرر، توزيع ثنائي الحدين، وتوزيع البواسون.

1-1 التوزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

يستخدم هذا التوزيع في الحالات التي يكون للظاهرة محل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة محل الاهتمام وتسمى بحالة النجاح، والأخرى تسمى بحالة الفشل، ومن أمثلة ذلك:

- **عند إعطاء مريض نوع معين من الأدوية، لها نتيجتان: (استجابة للدواء، أو عدم استجابة)**
- **عند فحص عبوة بداخلها نوع معين من الفاكهة، لها نتيجتان (الوحدة إما أن تكون سليمة، أو تكون معيبة)**
- **عند إلقاء قطعة عملة، لها نتيجتان (ظهور الوجه الذي يحمل الصورة، أو الوجه الذي يحمل الكتابة)**
- **نتيجة الطالب في الاختبار (نجاح، رسوب)**
- **استخدام المزارع لبرنامج معين في الزراعة (يستخدم، أو لا يستخدم).**

شكل التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين

إذا كررت محاولة n من المرات، بحيث أن كل محاولة لها نتيجتان فقط متنافيتان هما:

- **النتيجة محل الاهتمام " حالة نجاح " وتتم باحتمال ثابت في كل محاولة هو p**
- **النتيجة الأخرى " حالة فشل " وتتم باحتمال ثابت أيضا هو $q = 1 - p$**

وبافتراض أن هذه المحاولات مستقلة، بمعنى أن نتيجة كل محاولة ليس لها علاقة بنتيجة المحاولة الأخرى، وإذا كان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد حالات النجاح "عدد النتائج محل الاهتمام" في الـ n محاولة، فإن مدي المتغير العشوائي X والذي يعبر عن عدد حالات النجاح هو: $X : \{x = 0,1,2,...,n\}$ ، ومن ثم يحسب الاحتمال $P(X = x) = f(x)$ بتطبيق المعادلة التالية:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , \quad x = 0,1,2,\dots n \qquad (٥-٨)$$

حيث أن $\binom{n}{x}$ هي عدد طرق اختيار x من n مع إهمال الترتيب، وتحسب كما يلي:

$$\binom{n}{x} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{x(x-1)(x-2)\dots3\times2\times1} \qquad (٦-٨)$$

$$\binom{7}{3}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35 = \binom{7}{4}$$

$$\binom{7}{0}=\binom{7}{7}=1$$

مثـــال (3-8)

إذا كان من المعلوم أن نسبة الشفاء من مرض معين باستخدام نوع معين من العقاقير الطبية هو 0.60، إذا تناول هذا العقار 5 مصابين بهذا المرض. إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الذين المستجيبين (حالات الشفاء) لهذا العقار.

المطلوب:

أ- ما هو نوع المتغير؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

ت- احسب الاحتمالات التالية:

- ما احتمال استجابة 3 مرضى لهذا العقار؟
- ما هو احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟
- ما هو احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر؟

ث- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة.

ج- حدد شكل التوزيع.

الحــل:

أ- عدد حالات الاستجابة X متغير كمي منفصل ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: $X:\{x=0,1,2,3,4,5\}$:

ب- شكل دالة الاحتمال: $n=5$ ، $p=0.60$ ، $q=1-p=0.40$ إذا:

$$f(x)=\binom{n}{x}(p)^x(q)^{n-x}$$

$$=\binom{5}{x}(0.6)^x(0.4)^{5-x} \quad , \quad x=0,1,2,3,4,5$$

ت- حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال استجابة 3 مرضى لهذا الدواء: $P(x=3)=f(3)$

$$f(3)=\binom{5}{3}(0.6)^3(0.4)^{5-3}=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times0.216\times0.16=10\times0.03456$$

$$=0.3456$$

- حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل: $P(x\geq1)$

$$P(x\geq1)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=1-f(0)$$

$$=1-\left[\binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5\right]=1-1\times1\times0.01024=0.98976$$

- حساب احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر: $P(x\leq2)$:

$$P(x\leq2)=f(2)+f(1)+f(0)$$

$$=\binom{5}{2}(0.6)^2(0.4)^3+\binom{5}{1}(0.6)^1(0.4)^4+\binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5$$

$$=\frac{5\times4}{2\times1}(0.36)(0.064)+\frac{5}{1}(0.6)(0.0256)+1(1)(0.01024$$

$$=0.2304+0.0768+0.01024=0.31744$$

ث- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع ثنائي الحدين يحسب بتطبيق

المعادلة (8-3)، وباستخدام العمليات الرياضية يمكن الوصول إلى النتيجة التالية:

$$\boxed{\mu = \sum x\ f(x) = np} \qquad (٧-٨)$$

إذا الوسط الحسابي هو:

$$\mu = np = 5(0.60) = 3$$

- **الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين، ولحساب التباين في التوزيع ثنائي الحدين يتم تطبيق المعادلة (8-4)، ومنها يمكن التوصل إلى الصورة التالية:**

$$\boxed{\sigma^2 = npq} \qquad (٨-٨)$$

إذا تباين عدد حالات الاستجابة هو:

$$\sigma^2 = npq$$

$$= 5(0.60)(0.40) = 1.2$$

ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري الصورة التالية:

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

$$= \sqrt{1.2} = 1.095$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التالية:

$$V.C = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.095}{3} \times 100 = 36.5\%$$

ج- تحديد شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع ثنائي الحدين وفقا لقيمة احتمال النجاح p كما يلي:

إذا كان $p = 0.5$ **فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون متماثل.**

إذا كان $p < 0.5$ **فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون موجب الالتواء.**

إذا كان $p > 0.5$ **فإن التوزيع الاحتمالي ثنائي الحدين يكون سالب الالتواء.**

وحيث أن $p = 0.6 > 0.5$ **فإن توزيع عدد حالات الاستجابة سالب الالتواء.**

2/4/8 التوزيع البواسوني Poisson Distribution

يكثر استخدام هذا التوزيع في الحالات التي تقع فيها الأحداث وفقا لمعدلات زمنية، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، ومن أمثلة ذلك:

- **عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.** $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- **عدد مرات ري نوع معين من المحاصيل الزراعية خلال الموسم.** $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- **عدد العملاء الذين يتم خدمتهم البنكية كل 10 دقائق.** $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- **عدد مرات زيارة المريض للطبيب كل سنة.** $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- **عدد مرات تناول الأسرة للحوم الحمراء خلال الأسبوع.** $X : \{x = 0,1,2,...\}$
- **عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من صفحات الكتاب.** $X : \{x = 0,1,2,...\}$

وهكذا الأمثلة كثيرة

شكل التوزيع الاحتمالي البواسوني

إذا كان متوسط عدد مرات وقوع حادث وفقا لمعدل زمني معين هو μ ، وكان المتغير العشوائي X يعبر عن عدد مرات وقوع الحادث وفقا لهذا المعدل، فإن مدي المتغير

العشوائي X هو: $X:\{x=0,1,2,...\}$ ، وهذا المدى عبارة عن فئة مفتوحة من اليمين، فإن الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ والذي يعبر عن احتمال وقوع الحادث عدد x من المرات وفقا لهذا المعدل، يحسب بتطبيق المعادلة التالية:

$$\boxed{f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}\quad,\quad x=0,1,2,...} \qquad (٨-٩)$$

حيث أن e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، وتوجد في بعض الآلات الحاسبة، وقيمتها هي: $e=2.718$ تقريبا، ويمكن حساب قيمتها باستخدام الآلة الحاسبة باتباع الخطوات التالية من الشمال إلى اليمين:

مثلا إيجاد $e^{-1.5}$

(SHIFT) (e^x) ((-)) (1.5) (=) (0.22323016)— النتيجة

وأما $x!$ فتسمى "مضروب العدد x " ويساوي: $x!=x(x-1)(x-2)...3\times2\times1$

مثـــال (8-4)

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

أ- ما هو نوع المتغير العشوائي؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ لهذا المتغير.

ح- احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر؟
- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟

خ- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.

د- حدد شكل التوزيع.

الحـل:

أ- عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة X متغير كمي منفصل ، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو: $X:\{x=0,1,2,3,...\}$:

ب- شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\mu=3$ ، إذا دالة الاحتمال هي:

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$=\frac{e^{-3}3^{x}}{x!}\quad,\quad x=0,1,2,...$$

ح- حساب الاحتمالات:

- حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر، *f(2)*

$$f(2)=\frac{e^{-3}3^2}{2!}=\frac{0.0498(9)}{2\times1}=0.22404$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر هو:

$$P(X\ge1)=f(1)+f(2)+....$$

$$=1-f(0)=1-\frac{e^{-3}3^0}{0!}=\frac{0.0498}{1}=1-0.0498=0.9502$$

- احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$P(X\le3)=f(3)+f(2)+f(1)+f(0)$$

$$=\frac{e^{-3}3^3}{3!}+\frac{e^{-3}3^2}{2!}+\frac{e^{-3}3^1}{1!}+\frac{e^{-3}3^0}{0!}\frac{0.0498}{1}$$

$$=0.0498\left(\frac{27}{6}+\frac{9}{2}+\frac{3}{1}+\frac{1}{1}\right)=0.0498(13)=0.6474$$

خ- حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

- الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع البواسون هو معلمة معطاة هي:

$$\mu=3$$

في هذا التوزيع، فإن التباين يساوي الوسط الحسابي:

أي أن: $\sigma^2=\mu=3$

ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو:

$$\sigma=\sqrt{\mu}=\sqrt{3}=1.732$$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التي سبق استخدامها في الفصل السابق، وهو:

$$V.C=\frac{\sigma}{\mu}\times100=\frac{1.732}{3}\times100=57.7\%$$

د- تحديد شكل التوزيع:

دائما التوزيع البواسون موجب الالتواء.

6/ التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة

Continuous Probability Distributions

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المستمرة الخاصة، ولها دوال كثافة احتمال محددة، وفيما يلي بعض هذه التوزيعات:

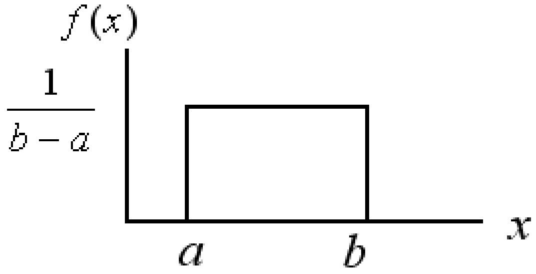
1/6/8 التوزيع المنتظم Uniform distribution

شكل دالة كثافة الاحتمال *p.d.f*

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم، فإذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع منتظم *Uniform*، مداه هو $a<x<b$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{b-a}\ ,\ a<x<b} \qquad (١٥-٨)$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معالم هذا التوزيع

توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (b,a)، ولذا يكتب رمز لهذا التوزيع الصورة $x \sim U(a,b)$

خصائص التوزيع المستطيل

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما :

$$\mu = E(x) = \frac{a+b}{2} \ , \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

على الطالب إثبات ذلك:

دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$\boxed{\begin{aligned} F(x) &= p(X \le x) = \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx \\ &= \frac{x-a}{b-a} \end{aligned}} \qquad (١٦-٨)$$

مثال (8-6)

استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن بطاطس، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، فأوجد الآتي:

- **دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع.**
- **بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟**

الحـــل

- **دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:**

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالشهر، أي أن $0 < x < 12$ ، ومن ثم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12} \ , \ 0 < x < 12$$

- **حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.**

بفرض أن Q هي كمية البطاطس المستوردة ، تكون الكية المتبقية بالمخزن بعد

مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي :

$$Q\times p(x>7)=Q\times(1-F(7))=1500(1-\frac{7-0}{12-0})=625\ Ton$$

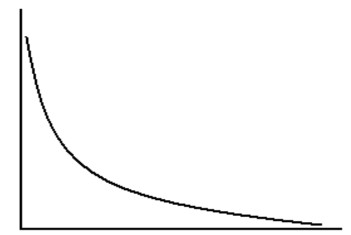
2/6/8 التوزيع الأسي السالب Negative Exponential distribution

شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع أسي سالب ، مداه هو $0<x<\infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x)=\theta\, e^{-\theta x},\ 0<x<\infty\ ,\ \theta\succ 0} \qquad (١٧-٨)$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معالم هذا التوزيع

توجد معلمة واحدة هي (θ)

خصائص التوزيع الأسى السالب

الوسط الحسابي μ ، والتباين σ^2 لهذا المتغير هما:

$$\mu=E(x)=\frac{1}{\theta}\ ,\quad \sigma^2=\frac{1}{\theta^2}$$

دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآتي

$$F(x)=p(X\le x)=\int_0^x f(x)dx=\left(1-e^{-\theta x}\right)$$

مثـــال (8-7)

إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط 2 دقيقة، فأوجد ما يلي.

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل.
- ما احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

الحـــل

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

بفرض أن المتغير x يعبر عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة العميل بالدقيقة، أي أن $0<x<\infty$ ، فإن المتوسط $1/\theta=2$ ، ومن ثم تصبح قيمة (θ) هي: $(\theta=0.5)$ ، وتكتب دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن على الصورة التالية:

$$f(x)=0.5\ e^{-0.5\ x},\ 0<x<\infty$$

- حساب احتمال إنهاء خدمة العميل في أقل من دقيقة.

$$p(x \le 1) = (1 - e^{-0.5x}) = (1 - e^{-0.5(1)}) = 0.3935$$

3/6/8 التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

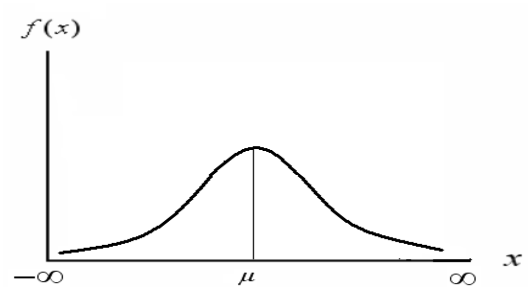
يعتبر هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع، وفيما يلي عرض لهذا التوزيع.

شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

إذا كان المتغير x متغير عشوائي له توزيع طبيعي ، مداه هو $-\infty < x < \infty$ فإن دالة كثافة احتماله هي:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \;,\; -\infty < x < \infty \;,\; \pi = 22/7} \qquad (١٨-٨)$$

وهذا التوزيع له منحنى متماثل يأخذ الصورة التالية:



فهذا المنحنى متماثل على جانبي الوسط الحسابي μ.

معالم هذا التوزيع

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

الوسط الحسابي : $E(x) = \mu$ والتباين : $\text{var}(x) = \sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير x بالرموز : $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2 .

خصائص التوزيع الطبيعي

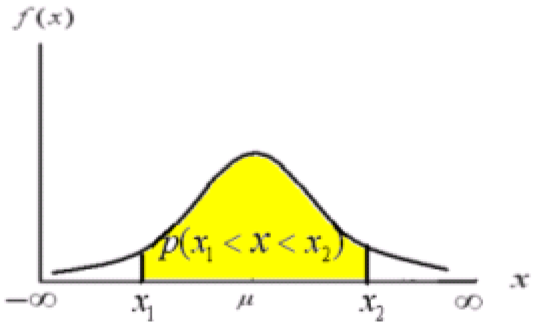
هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى المستخدمة في الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

1- الوسط الحسابي μ 2- والتباين σ^2

3- منحني هذا التوزيع متماثل على جانبي الوسط μ

كيفية حساب الاحتمالات $p(x_1 < X < x_2)$

بفرض أن الاحتمال المطلوب حسابه هو $p(x_1 < X < x_2)$ ، وهذا الاحتمال يحدد بالمساحة التالية:



وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات المستمرة، فإن هذه المساحة (الاحتمال) تحسب بإيجاد التكامل التالي:

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن ثم لجأ الإحصائيين إلى عمل تحويلة رياضية Transform، يمكن استخدام توزيعها الاحتمالي في حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ويعرف المتغير الجديد z بالمتغير الطبيعي القياسي Standard Normal Variable ، وهذا المتغير له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

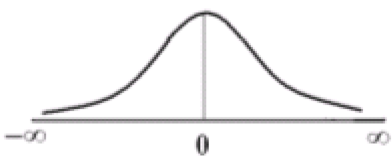
$$\boxed{f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \ , -\infty < z < \infty \ , \ \pi = 22/7} \qquad (١٩-٨)$$

ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

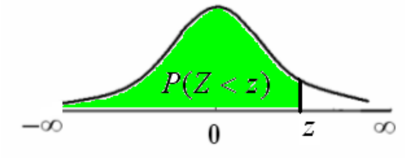
1- متوسطه هو: $E(z) = 0$ **2- تباينه هو:** $\text{var}(z) = 1$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير z بالرموز : $z \sim N(0,1)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط (0) ، وتباين (1) .

3-يأخذ المنحنى الشكل الناقوس المتماثل على جانبي الصفر:



وصمم الإحصائيون جداول إحصائية لحساب دالة التوزيع التجميعي: $F(z) = P(Z < z)$ **، كما هو مبين بالرسم التالي:**

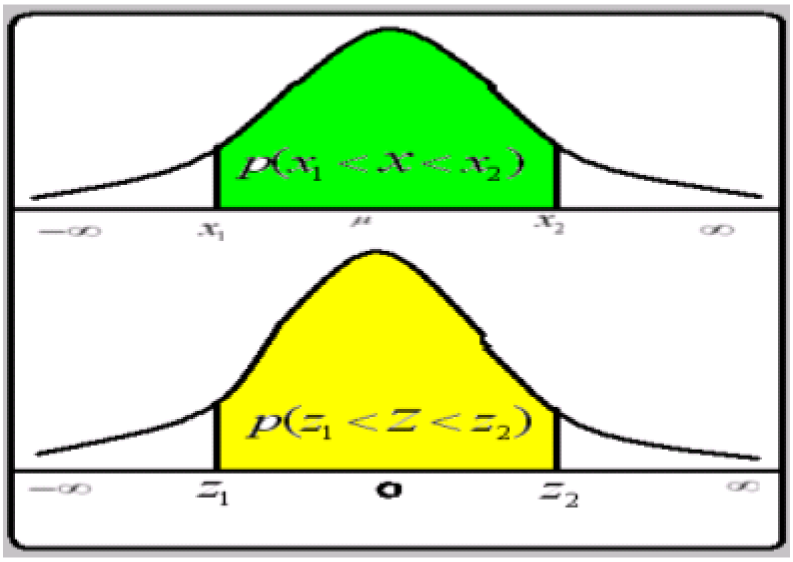


ونعود الآن إلى خطوات حساب الاحتمال $p(x_1 < X < x_2)$ باستخدام التحويلة $z = (x-\mu)/\sigma$:

1- يتم تحويل القيم الطبيعية (x_1, x_2) إلى قيم طبيعية قياسية:

$z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma \ , \ z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$ **.**

2- ومن ثم يكون الاحتمال: $p(x_1 < X < x_2) = p(z_1 < Z < z_2)$:



3- تستخدم جداول التوزيع الطبيعي القياسي، والذي يعطي المساحة الخاصة بالاحتمال $F(z) = P(Z < z)$

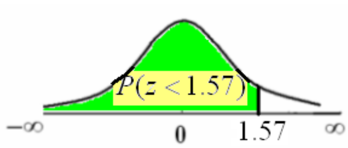
4- طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي في حساب الاحتمالات

أوجد الاحتمالات التالية:

أ- $P(z < 1.57)$ ب- $P(z < -2.33)$ ج- $P(z > 1.96)$ د- $P(-2.01 < z < 1.28)$

الحل

أ- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z < 1.57) = F(1.57)$ أسفل المنحنى كما يلي



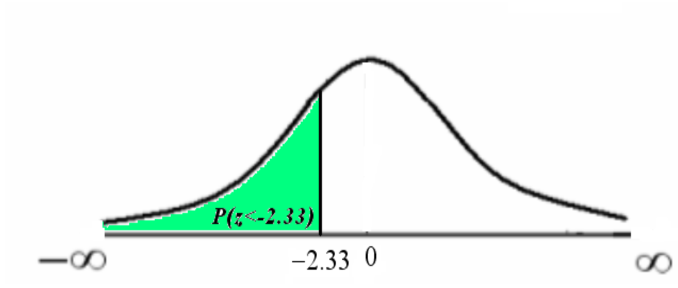
ويتم استخدام الجدول كما هو مبين :

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										
1.40										
1.50								0.9418		
⋮										

ويكون الاحتمال المطلوب هو: $P(z < 1.57) = F(1.57) = 0.9418$

ب- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(z < -2.33) = F(-2.33)$ موضحة كالتالي:

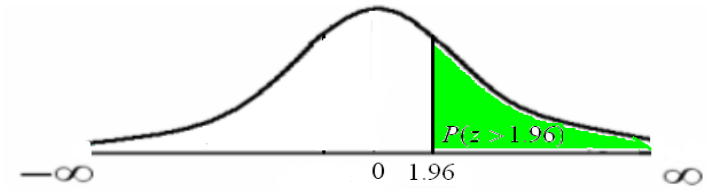
P(z<-2.33)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.										
.										
.										
.										
-2.70										
-2.60										
-2.50										
-2.40										
-2.30				0.0099						
.										
.										
.										

ومن ثم يكون : $P(z<-2.33)=0.0099$

ج- تحدد المساحة المعبرة عن الاحتمال $P(z>1.96)$ **كالتالي:**



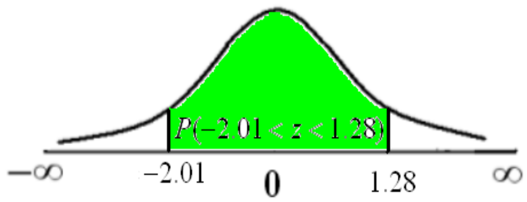
وهذا الاحتمال يحسب باستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعي ، حيث أن :

$$P(z>1.96)=1-p(z<1.96)=1-F(1.96)$$

وبالكشف في الجدول بنفس الطريقة السابقة على القيمة 1.96 **نجد أن :** $p(z<1.96)=0.9750$ **، ومن ثم يكون الاحتمال المطلوب هو:**

$$P(z>1.96)=1-0.9750=0.0250$$

د- المساحة أسفل المنحنى المعبرة عن الاحتمال $P(-2.01<z<1.28)$ **هي:**



وباستخدام أيضا خصائص دالة التوزيع التجميعي يمكن حساب هذا الاحتمال ، حيث أن :

$$P(-2.01 < z < 1.28) = F(1.28) - F(-2.01)$$

وبالكشف في الجدول عن هاتين القيمتين ، نجد أن:

$$P(-2.01 < z < 1.28) = 0.8997 - 0.0222 = 0.8775$$

مثـــال(8-8)

إذا كان الدخل السنوي للأسرة في أحد مناطق المملكة يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 ألف ريال، وتباينه 900. والمطلوب:

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.
2- كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.
3- ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف ريال ؟
4- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 من الدخول؟

الحـــل

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

بفرض أن x متغير عشوائي يعبر عن الدخل السنوي بالألف ريال، وهو يتبع التوزيع الطبيعي، ومعالمه هي:

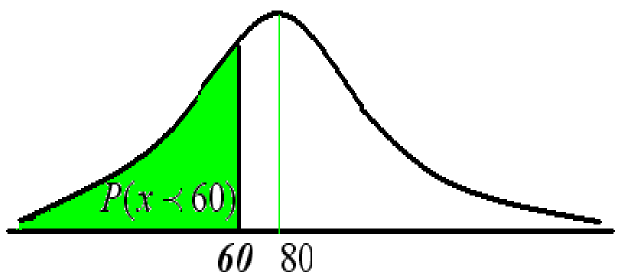
أ- المتوسط $E(x) = \mu = 80$ ب- التباين هو: $Var(x) = \sigma^2 = 900$

أي أن : $x \sim N(80,900)$

2- شكل دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2} \; , \; -\infty < x < \infty \; , \; \pi = 22/7$$

3- نسبة الأسر التي يقل دخلها عن60 ألف ريال هي: $P(x \prec 60)$



ويتبع الخطوات المذكورة سابقا في حساب الاحتمال كما يلي:

$$P(x<60)=p\left(z<\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=P\left(z<\frac{60-80}{30}\right)=P(z<-0.67)=F(-0.67)$$

وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة في جدول التوزيع الطبيعي القياسي ، نجد أن

$$P(x<60)=P(z<-0.67)=0.2514$$

4- الدخل الذي أقل منه 0.975 **من الدخول: في هذه الحالة يبحث عن قيمة المتغير** (x) **الذي أقل منه** 0.975 **، بفرض أن هذا المتغير هو** (x_1) **، فإن :**

$$P(x<x_1)=p\left(z<\frac{x_1-80}{30}\right)=0.975$$

بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن المساحة 0.9750 **نجدها تقع عند تقاطع الصف** 1.9 **، والعمود** $.06$ **أي أن قيمة** $z=1.96$ **، ويكون :**

$$1.96=\frac{x_1-80}{30}\quad,\ Then\quad x_1=30(1.96)+80=138.8$$

إذا الدخل هو 138.8 **ألف ريال في السنة.**