الاحصاء 2
(الاحتمالات)

مقدمة

الفصل الأول: التحليل التوافقي

1- المبدأ الأساسي للعد

1-1 قاعدة الضرب

1-2 قاعدة الجمع

2- التبديلات

1-2 التبديلات دون تكرار

2-2 التبديلات بتكرار

3- الترتيبات

4- التوفيقات

مقدمة:

ان كلمة احتمال تستخدم للتعبير عن قياس فرصة وقوع حادثة معينة غير مؤكدة الحدوث، حيث يقال :

من المحتمل هطول المطر اليوم...

احتمالية نجاح محمد أكبر من احتمالية نجاح صالح...

من المستحيل فشل هذه التجربة ...

اذن الاحتمال هو مقياس كمي لفرصة وقوع حادثة

ان الاحتمال هو مقياس كمي لفرصة وقوع حادثة معينة يكون محصور بين 0 و 1

ولتعريف الاحتمال كان لابد من التطرق الى الكثير من المفاهيم اولها طرق العد أو التحليل التوفيقي.

التحليل

التوفيقي

إن التحليل التوفيقي هو العلم الذي يسمح لنا بتحديد عدد النتائج الممكنة لتجربة معينة دون الحاجة إلى سرد عناصرها

1- المبدأ الأساسي للعد :

يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرا بالغ الأهمية في عناصر نظرية الاحتمالات التي سوف نتطرق إليها في هذه المحاور، والذي ينص على أنه إذا كانت النتائج الممكنة لتجربة ما هي n_1 و النتائج الممكنة لتجربة أخرى هي n_2 فان النتائج الممكنة للتجربتين معا هي $n_1 \times n_2$.

1.1- قاعدة الضرب

اذا كانت هناك عملية (او تجربة) مكونة من عدد مقداره r من المراحل بحيث :

- المرحلة رقم 1 تتم بعدد قدره n_1 من الطرق المختلفة ،
- المرحلة رقم 2 تتم بعدد قدره n_2 من الطرق المختلفة ،
- و هكذا . . .
- المرحلة الأخيرة رقم r تتم بعدد قدره n_r من الطرق المختلفة

فان التجربة ككل يمكن اجراؤها بعدد من الطرق المختلفة و قدره :

$$n = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_r$$

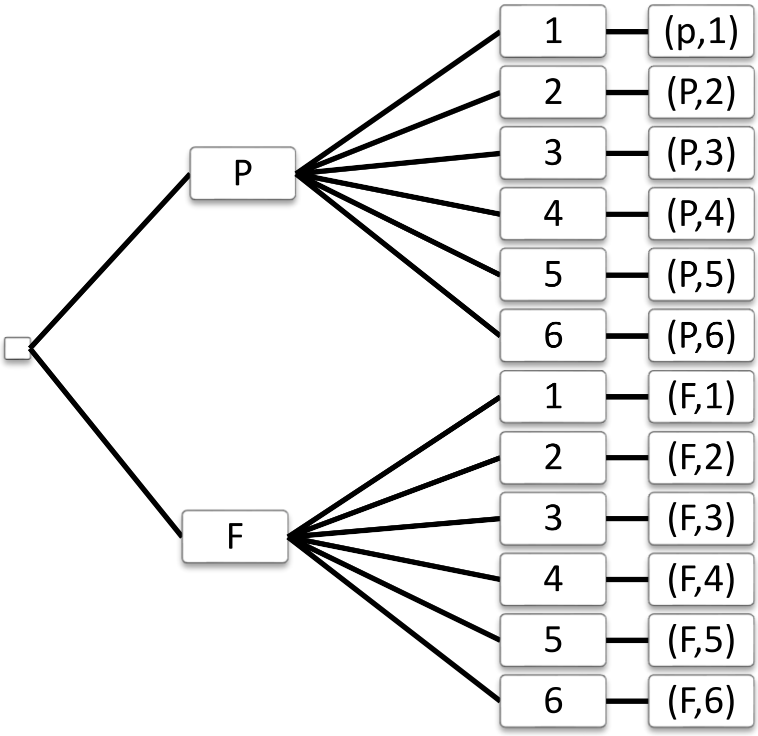
مثال 1:

إذا كانت لدينا تجربة متمثلة في رمي قطعة نقود وحجرة ندر في آن واحد .ما هي عدد الحالات الممكنة:
لدينا قطعة النقود يمكن أن تقع أحد الوجهين (P, F).
بينما حجرة النرد يمكن أن تقع على أحد الوجوه الستة (6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1) ومنه فإن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هي:

$$n = n_1 \times n_2$$

$$2 \times 6 = 12$$

ويمكن حل المثال 1 من خلال الشجرة البيانية التي تعتبر كطريقة تستخدم لحساب عدد الحالات الممكنة للتجارب عندما يكون عدد النتائج منته (قليل). ويمكن توضيح كيفية استخدام الشجرة البيانية في:



<u>مثال 2</u>: كم لوحة ترقيم يمكن تشكيلها اذا كانت اللوحة تتكون من 3 حروف متبوعة ب 4 أرقام .

1- في حالة وجود تكرار .
2- في حالة عدم وجود تكرار

الحل : نتخيل أن هناك سبعة خانات يجب أن نملأها

ح	ح	ح	رقم	رقم	رقم	رقم

في حالة وجود تكرار:

اذن : الخانة الأولى يمكن ملِؤها بـ 26 حرف (هناك 26 امكانية لاختيارالرمز الأول)

و الخانة الثانية يمكن ملِؤها بـ 26 حرف ايضا لأن التكرار مسموح (هناك 26 امكانية لاختيارالرمز الثاني)

و الخانة الثالثة يمكن ملِؤها بـ 26 حرف ايضا (هناك 26 امكانية لاختيارالرمز الثالث)

و الخانة الرابعة يمكن ملِؤها بـ 10 ارقام (9-8-7-6-5-4-3-2-1-0) (اي هناك 10 امكانية لاختيارالرمز الرابع)....

و هكذا بهذا المبدأ نستطيع حل المثال لنحصل على :

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$$

في حالة عدم وجود تكرار:

الخانة الأولى يمكن ملِؤها بـ 26 حرف (هناك 26 امكانية لاختيارالرمز الأول)

و الخانة الثانية يمكن ملِؤها بـ 25 حرف لأننا أقصينا الحرف الذي اخترناه للخانة الأولى التكرار غير مسموح (هناك 25 إمكانية لاختيارالرمز الثاني)

و الخانة الثالثة يمكن ملِؤها بـ 24 حرف لأننا أقصينا حرفي الخانة الأولى و الثانية (هناك 24 امكانية لاختيارالرمز الثالث)

و الخانة الرابعة يمكن ملِؤها بـ 10 ارقام (9-8-7-6-5-4-3-2-1-0) (اي هناك 10 امكانية لاختيارالرمز الرابع)

و الخانة الخامسة يمكن ملِؤها بـ 9 ارقام لأننا أقصينا الرقم الذي اخترناه للخانة السابقة (اي هناك 9 امكانية لاختيارالرمز الخامس)....

و هكذا بهذا المبدأ نستطيع حل السؤال لنحصل على :

$$26 \times 25 \times 24 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 =$$

قاعدة الجمع :

اذا كان هناك j من التجارب بحيث لا تحدث اي اثنتين منهما في نفس الوقت ،

و كان عدد الطرق التي تحدث فيها التجربة 1 هو n_1

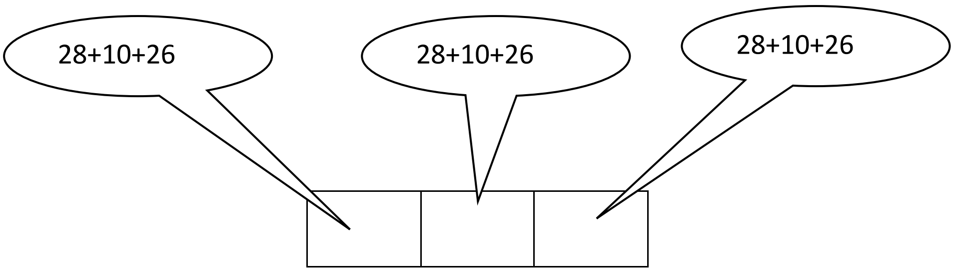
و عدد الطرق التي تحدث فيها التجربة 2 هو n_2

. . .

و عدد الطرق التي تحدث فيها التجربة r هو n_r

فان عدد الطرق التي تحدث فيها واحدة من هذه التجارب (التجربة الأولى أو الثانية أو...أو الأخيرة) هو $n_1 + n_2 + \cdots + n_r$

مثال : ما هو عدد الحالات الممكنة لتشكيل لوحة بـ 3 خانات، حيث تحمل كل واحدة اما حرفا أبجديا أو رقم أو حرف لاتيني.



عدد الطرق الممكنة لكل خانة هو : 28+10+26

و عدد اللوحات الممكن تشكيلها هو : $(28 + 10 + 26)^3$

2-التبديلات Permutations

1-2 تبديلات بدون تكرار

اذا كان لدينا مجموعة مكونة من n فرد (مختلف) فانه يمكن تبديلها في خط واحد بـ $n!$ (n عاملي) طريقة .
ونقول عدد تباديل n فرد فيما بينهم هو $n!$ و نرمز لها بـ P_n

$$P_n = n!$$

حيث أن كل شخص من بين n فرد يمكنه أخذ المرتبة الأولى ، و كل شخص من بين $(n-1)$ يمكنه أخذ المرتبة الثانية ... و المرتبة الأخيرة يأخذها الفرد المتبقي ، و بتطبيق قاعدة الضرب فان نتيجة تبديل ال n فرد هي :

$$n \times (n-1) \times \ldots \times 1 = n!$$

مثال 1:

بكم طريقة يمكن تبديل 5 طلبة فيما بينهم على صف واحد

الحل

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مثال 2 :

بكم طريقة يمكن تبديل الحروف $\{A, B, C\}$

الحل :

$$P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

<u>مثال 3</u>: يملك رامي 10 كتب يريد ترتبها على رف مكتبته

بكم طريقة يمكن ترتبها

$$P_{10} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

اذا علمنا أن في 10 كتب هناك 4 كتب رياضيات ، 3كتب كيمياء ، 2 كتاب في التاريخ ، وكتاب واحد في اللغة

فبكم طريقة يمكن ترتيب الكتب اذا اعتبرنا كتب كل مادة على حدة

الحل:

هناك !4 طريقة لرتتيب كتب الرياضيات و !3 طريقة لترتيب كتب الكيمياء و !2 طريقة لترتيب كتب التاريخ و طريقة واحدة طبعا لوضع كتاب اللغة . و لكن يجب أخذ بعين الاعتبار ترتيب مجموعات الكتب فيما بينها (كتب الرياضيات أولا أو الكيمياء...) و بما أنه لدينا أربع مجموعات فان النتيجة تكون :

$$4! \times (4! \times 3! \times 2! \times 1!)$$

2-2 عدد تباديل عناصر متشابهة أفواجا

لتكن مجموعة مكونة من n عنصر حيث n_1 منها متشابهة، n_2 منها متشابهة ،...، n_k منها متشابهة

عدد تباديل هذه العناصر هو

$$P_n^{n_1,n_2,\dots n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

مثال 1:

ما هو عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من كلمة PROPOSITION .

كما نلاحظ أن هناك عناصر متشابهة ، فمثلا P تكررت مرتان لو غيرنا مكان P الأولى و P الثانية هل فعلا سنحصل على كلمة جديدة ؟؟؟

الجواب هو طبعا لا , اذا لتفادي هذا التكرار نستعمل القانون السابق.

P: تكررت 2 ، O: تكررت 3 مرات ، i : تكررت 2 اذن

$$P_{11}^{2,3,2,} = \frac{11!}{2! \times 3! \times 2!} = 1663200$$

مثال 2:

صندوق يحتوي على 20 كرية منها 6 بيضاء و10 حمراء و 4 خضراء ، علما أن الكريات التي لها نفس اللون متشابهة تماما . فبكم طريقة يمكن ترتيب هذه العناصر في خط واحد (كل تبديلة يجب أن تختلف عن التبديلة الأخرى)

الحل:

$$P_{20}^{6,10,4} = \frac{20!}{6! \times 10! \times 4!} = 38798760$$

3-2 التباديل بالاعادة (القائمة)

اذا كانت عملية السحب بالإرجاع، اي أن العنصر المسحوب يتم ارجاعه ، في هذه الحالة تصبح للعنصر اماكانية اعادة الظهور عند اجراء عملية سحب جديدة (يتكرر) ، و يكون عدد المجموعات الجزئية الممكن تشكيلها هو:

$$n^{\mathrm{k}} = \underbrace{\mathrm{n} \times \mathrm{n} \times \ldots \times \mathrm{n}}_{\text{مرة } \mathrm{k}}$$

مثال1:

تنوي احدى شركات الاتصال إنشاء خطوط هاتفية جديدة في احدى الدول، حيث يتكون الخط الهاتفي من 7 أرقام

- ما هي عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها من الناحية النظرية ؟
- اذا كان الرقم الأول 0 ، و الرقم الثاني 5 ، ما هي عدد الخطوط الممكن تشكيلها؟

الحل

في هذه الحالة n=10 (0-1-2-...-9) و k=7 (7 اماكن للملأ) اذن عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها هي: $10^7 = 100000000$

3- التريتيبات –بدون تكرار (السحب بدون ارجاع)

اذا كانت A مجموعة تحتوي على n عنصر، و نريد تشكيل مجموعة جزئية حجمها p مع وجود عامل الترتيب (أي أن $(a,b,c) \neq (b,a,c)$) ، هنا نكون أمام ترتيبة . ونهتم بعدم ارجاع العنصر المسحوب (ترتيبة بدون تكرار).

اذن الترتيبة A_n^p هي عدد المجموعات الجزئية المرتبة ذات p عنصر و التي نستطيع تشكيلها من مجموعة كلية ذات n عنصر (بدون تكرار) و تساوي :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

مثال 1: اذا كانت لدينا مجموعة مكونة من خمسة حروف $\{A, B, C, D, E\}$ فكم كلمة من ثلاث حروف يمكن تشكيلها بشرط عدم تكرار الحرف,

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 60$$

مثال 2 : يريد 20 ساكن في أحد الأحياء تشكيل لجنة مكونة من رئيس الحي و نائبه و السكرتير . ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها.

في هذه الحالة الترتيب مهم : فأي شخص يمكن أن يكون رئيسا أو نائب أو سكرتير

و التكرارغير موجود لأن الشخص لا يمكنه أن يشغل منصبين وبذلك نكون أمام ترتيبة بدون تكرار

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 20 \times 19 \times 18$$

4-التوفيقات

اذا كانت A مجموعة تحتوي على n عنصر، و نريد سحب مجموعة جزئية حجمها p ، حيث أن عملية ترتيب العناصرلا تؤثر في المجموعة المسحوبة ، هنا نكون أمام توفيقة .

فاذا كانت عملية السخب تتم دفعة واحدة أو سحب عنصر دون ارجاعه ، في هذه الحالة نكون أمام توفيقة بدون تكرار، و يكون عدد المجموعات الممكن سحبها هي

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

مثال 1:

ترغب الجامعة في انتقاء 10 طلاب في احدى التخصصات من بين 100 طالب للقيام بدورة تدريبية في احدى المؤسسات ، ما هي الطرق الممكنة لتشكيل 10 طلاب ؟

الحل: نلاحظ هنا أن ترتيب الطلبة المسحوبين لا يهم و لا يؤثر في المجموعة لأن الهدف هو زيارة المؤسسة و القيام بدورة تدريبة و بالتالي نحن أمام توفيقة ، و عدد المجموعات الممكن تشكيلها و اختيارها هي :

$$C_{100}^{10} = \frac{100!}{10!\,(100-10)!} = \frac{100!}{10!\,90!} = 17310309456440$$

مثال 2:

صندوق يحتوي على 6 كريات بيضاء و 4 كريات سوداء ، نقوم بسحب 3 كريات دفعة واحدة، ما هو عدد طرق سحب :

- 3 كريات ؟
- 3 كريات بيضاء؟
- 1 بيضاء و 2 سوداء ؟

الحل

- عدد طرق سحب 3 كريات هو : $C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!(10-3)!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{3!7!}=120$
- ان عدد طرق سحب 3 كريات بيضاء يكون من خلال سحب 3 كريات بيضاء من بين 6 كريات بيضاء ، أي : $C_{6}^{3}=\frac{6!}{3!(6-3)!}=20$
- عدد طرق سحب 1 بيضاء و 2 سوداء هو :

$$C_{6}^{1}\times \mathrm{C}_{4}^{2}=\frac{6!}{1!\,(6-1)!}\times\frac{4!}{2!\,(4-2)!}=6\times6=36$$

1-4 توفيقات بتكرار(السحب بالاعادة):

اذا كان السحب بالارجاع ، فمن المحتمل أن يظهر العنصر المسحوب مرة ثانية (يتكرر) ، في هذه الحالة نكون أمام توفيقة مع تكرار ، و بالتالي فان عدد طرق سحب المجموعات البجزئية هو :

$$C_{n+p-1}^{p}=\frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

مثال : كم توفيقة بالاعادة يمكن تكوينها من الأحرف *a ,b,c* حيث عدد عناصرها 2

الحل :

$$C_{3+2-1}^{2}=C_{4}^{2}=\frac{4!}{2!\,2!}=6$$