تمرين 1 **نعتبر الفضاء الجزئي** : $F=\left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad x-y+z=y-z \right\}$

1. **عين أساساً للفضاء F** .
2. **بين أن** $F\cap G=\left\{ 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$ ، **حيث** $G=\left\langle (1,1,1) \right\rangle$.
3. **بين أن الأشعة الثلاثة الآتية تُشكل أساسا لـ** $\mathbb{R}^3$ **حيث** $(1,1,1)$، $(0,1,1)$، $(2,1,0)$.

---

1. **تعيين أساس لـ F**

$$F\ni(x,y,z):\ x-y+z=y-z \iff x-2y+2z=0 \iff 2y=x+2z$$
$$\iff (x,y,z)=(x,\tfrac{x}{2}+z,z)=\tfrac{x}{2}(2,1,0)+z(0,1,1)$$

ومنه $\boxed{F=\left\langle (2,1,0),(0,1,1) \right\rangle}$

2. **تعيين الفضاء** $F\cap G$

ليكن شعاع كيفي X **من التقاطع** $F\cap G$. **هذا الشعاع يُكتب كعبارة خطية وحيدة في كلا أساسيي** F **و** G :

$$\begin{array}{l} F\ni X\ ,\quad X=\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,1) \\ G\ni X\ ,\quad X=\gamma(1,1,1) \end{array}$$
حيث α **و** β **و** γ **من** $\mathbb{R}$

إذن
$$\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,1)=\gamma(1,1,1) \iff \begin{cases} 0=2\alpha-\gamma \\ 0=\alpha+\beta-\gamma \\ 0=\beta-\gamma \end{cases} \iff \alpha=\beta=\gamma=0$$

ومنه $\boxed{F\cap G=\left\{ (0,0,0) \right\}}$

3. **تعيين الأساس لـ**$\mathbb{R}^3$

- **ندرس أولا استقلالية الأشعة** $(1,1,1)$، $(0,1,1)$، $(2,1,0)$:

من أجل كل α **و** β **و** γ **من** $\mathbb{R}$، **يكون**
$$\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,1)+\delta(1,1,1)=(0,0,0) \iff$$
$$(2\alpha+\delta,\alpha+\beta+\delta,\beta+\delta)=(0,0,0) \iff \begin{cases} 2\alpha+\delta &=0 \\ \alpha+\beta+\delta &=0 \\ \beta+\delta &=0 \end{cases} \iff \alpha=\beta=\delta=0$$

ومنه الأشعة $(1,1,1)$، $(0,1,1)$، $(2,1,0)$ **مستقلة خطيا.**

- **هل الأشعة الثلاثة** $(1,1,1)$، $(0,1,1)$، $(2,1,0)$ **تولد**$\mathbb{R}^3$ ؟

ليكن (x,y,z) **شعاع من** $\mathbb{R}^3$. **لنكتب هذا الشعاع كعبارة خطية في الأشعة الثلاثة** :

$$(x,y,z)=\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,1)+\delta(1,1,1) \iff$$
$$(x,y,z)=(2\alpha+\delta,\alpha+\beta+\delta,\beta+\delta) \iff \begin{cases} 2\alpha+\delta &=x \\ \alpha+\beta+\delta &=y \\ \beta+\delta &=z \end{cases} \quad (*)$$

حل الجملة الأخيرة ذات المجاهيل الحقيقة α **و** β **و**γ **يعني التعبير عن** α **و** β **و** γ **بدلالة x و y و z** :

$$(*) \Leftrightarrow (2\alpha+\delta, \alpha+\beta+\delta, \beta+\delta)=(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=y-z \\ \beta=-x+2y-z \\ \gamma=x-2y+2z \end{cases}$$

ومنه $(x,y,z)=(y-z)(2,1,0)+(-x+2y-z)(0,1,1)+(x-2y+2z)(1,1,1)$

والأشعة $(1,1,1)$ ، $(0,1,1)$ ، $(2,1,0)$ تولد $\mathbb{R}^3$. ومنه هذه الأشعة الثلاثة تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$.

تمرين 2 نعتبر الفضاء الجزئي : $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \quad x=2y=z\}$

1. أساس الفضاء A ، هو: $\{(1,2,3),(2,1,2)\}$ ☐ ، $\{(2,1,2)\}$ ☒ ، $\{(2,3)\}$ ☐
2. الشعاع $v=(1,2,1)$ ينتمي إلى الفضاء A : لا ☒ ، نعم ☐
3. الأشعة $(2,1,2)$،$(1,2,3)$،$(1,2,1)$: مرتبطة خطيا ☐ ، مستقلة خطيا ☒

تمرين 3 في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$، نعتبر الأشعة :

$$v_1=(-1,-1,2) \quad , \quad v_2=(1,2,1) \quad , \quad v_3=(1,-1,0)$$

1. أدرس الاستقلال الخطي لـ v_1 ، v_2 ، v_3 ، واستنتج بعد الفضاء $V=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.
2. عين صورة شعاع كيفي (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ بالتطبيق الخطي h. حيث :

$$h(e_1)=v_1 \quad ، \quad h(e_2)=v_2 \quad ، \quad h(e_3)=v_3$$

---

1. دراسة الاستقلال الخطي للأشعة v_1 ، v_2 ، v_3 ، والفضاء $V=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$.

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$$

$$\alpha(-1,-1,2)+\beta(1,2,1)+\gamma(1,-1,0)=(0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha+\beta+\gamma &=0 \\ -\alpha+2\beta-\gamma &=0 \\ 2\alpha+\beta &=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha+3\beta=0 \\ 2\alpha+\beta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

والأشعة $\boxed{v_3، v_2، v_1 \text{ مستقلة خطيا}}$. ومنه $\dim V=3$

2. حساب $h(x,y,z)$ حيث : $h(e_1)=v_1\ h(e_2)=v_2\ ,\ h(e_3)=v_3$

$$h(x,y,z)=h(xe_1+ye_2+ze_3)=xh(e_1)+yh(e_2)+zh(e_3)$$
$$=x(-1,-1,2)+y(1,2,1)+z(1,-1,0)$$

ومنه $\boxed{h(x,y,z)=(-x+y+z,-x+2y-z,2x+y)}$

تمرين 4 f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^2$: $f(x,y,z)=(-x+2y+z, x-2y-z)$

عين $\mathrm{Im}f$ و $\ker f$

- الفضاء الجزئي $\ker f$:

الأشعة (x,y,z) من $\ker f$ تحقق: $f(x,y,z)=(0,0)$.

$$(-x+2y+z, x-2y-z)=(0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ x-2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x-2y-z=0 \Leftrightarrow z=x-2y$$

إذن الشعاع (x,y,z) من $\ker f$ يأخذ الشكل: $(x,y,x-2y)=x\underbrace{(1,0,1)}_{a}+y\underbrace{(0,1,-2)}_{b}$

والفضاء $\ker f$ مولد بالشعاعين المستقلين a و b ، أي $\boxed{\ker f=\langle(1,0,1);(0,1,-2)\rangle}$ $\dim\ker f=2$

- الفضاء الجزئي $\mathrm{Im}f$:

$$f(e_1)=f(1,0,0)=(-1,1),\quad f(e_2)=f(0,1,0)=(2,-2),\quad f(e_2)=f(0,0,1)=(1,-1)$$

ومنه $\mathrm{Im}f=\langle f(e_1);f(e_2);f(e_3)\rangle=\langle(-1,1);(2,-2);(1,-1)\rangle$

هذه الأشعة الثلاثة المولدة ل $\mathrm{Im}f$ مرتبطة خطيا. الشعاع $(1,-1)$ مستقل خطيا ويولد $\mathrm{Im}f$ فهو يشكل أساسا ل $\mathrm{Im}f$ ، ومنه $\boxed{\mathrm{Im}f=\langle(1,-1)\rangle}$ $\dim\mathrm{Im}f=\mathrm{rg}(f)=1$.

تمرين 5 الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ مزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$.

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ بحيث: $f(e_3)=(1,2,1)$ ، $f(e_2)=(1,2,3)$ ، $f(e_1)=(2,1,2)$

1. الصورة $f(x,y,z)$ تُعطى بالعبارة :

$(2x+y+2z,x+2y+3z,x+2y+z)$ ☐ ، $(2x+y+z,x+2y+2z,2x+3y+z)$ ☒

2. أساس الفضاء الشعاعي الجزئي $\mathrm{Im}f$ ، هو:

$\{(2,1,1),(1,2,3)\}$ ☐ ، $\{(1,2,1),(1,2,3),(2,1,2)\}$ ☒ ، $\{(1,-1,1)\}$ ☐

3. مجموعة الأشعة (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ التي تحقق: $f(x,y,z)=(0,0,0)$ ، هي الفضاء الشعاعي الجزئي:

$\langle(0,-1,1),(1,0,-1)\rangle$ ☐ ، $\{(0,0,0)\}$ ☒ ، $\langle(0,-1,1),(1,0,-1),(1,-1,-1)\rangle$ ☐

تمرين 6 نعتبر في الأساس القانون ل $\mathbb{R}^2$ المصفوفتين: $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&5\end{pmatrix}$ ، $B=\begin{pmatrix}x-y&x+y\\2&z\end{pmatrix}$

عين الأعداد الحقيقية x ، y ، z في الحالات الآتية:

1. $A=B \Leftrightarrow x=.....\,,\ y=.....\ ,\ z=.....$
2. $A+B=\begin{pmatrix}1&2\\4&3\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=.....\,,\ y=.....\ ,\ z=.....$
3. $2B-A=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow x=.....\,,\ y=.....\ ,\ z=.....$

تمرين 7 نعتبر في الأساس القانون ل $\mathbb{R}^3$ المصفوفة $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

حساب: $M^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ ، $M^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$ ، $M^n=\begin{cases}I_3 & ,n=3k\\ M & ,n=3k+1\\ M^2 & ,n=3k+2\end{cases}$ $(k\in\mathbb{N})$

تمرين 8 في الفضائين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ المزودين بأسُسِهما القانونية، نعتبر A و B مصفوفتا التطبيقين الخطيين f و g :

$$A=M(f)=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} \quad , \quad B=M(g)=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

1. التطبيقان f و g المرفقان بالمصفوفتين A و B، بالنسبة للأسس القانونية لفضاءات البدء والوصول، هما :

$$f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad ; \qquad g:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z)\mapsto(2x-3y+z\,,\,x+2y+4z) \qquad (x,y,z)\mapsto(2x+y-z\,,\,x+2y+z\,,\,x+3y+2z)$$

2. تُعطى مصفوفة التطبيق الخطي $f\circ g$ بالعلاقة : $C=M(f\circ g)=M(f)\cdot M(g)=A\cdot B$، حيث:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 8 & 17 & 9\end{pmatrix}$$

3. التطبيق الخطي $f\circ g$ معرف كما يلي: $(f\circ g)(x,y,z)=(2x-y-3z\,,\,8x+17y+9z)$

4. باستخدام طريقة العمليات على الأسطر، حل الجملة الخطية الآتية:

$$(\mathrm{I})\cdots\begin{cases}2x+y+z=1\\ -x+2y+z=2\\ x+y+2z=3\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{array}\right)\xrightarrow[\ell_3\to 2\ell_3-\ell_1]{\ell_2\to 2\ell_2+\ell_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 3 & 5\end{array}\right)\xrightarrow{\ell_3\to 5\ell_3-\ell_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 12 & 20\end{array}\right)$$

المصفوفة الاخيرة تكافئ:

$$(\mathrm{II})\cdots\begin{cases}2x+y+z=1\\ 5y+3z=5\\ 12z=20\end{cases}$$

وحل هذه الجملة، يبتدئ بالمعادلة الأخيرة، فنحصل على $z=\frac{5}{3}$ ، وبالتعويض في المعادلة الثانية، نحصل على $y=0$. وأخيرا، وبالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على $x=-\frac{1}{3}$

تمرين 9 نعتبر الفضائين الجزئيين: $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ 2x+y=y-z=0\right\}$، $B=\left\langle(2,1,1)\right\rangle$

1. أساس الفضاء A ، هو: $\{(2,1,0),(0,1,1)\}$ ☐، $\{(-1,2,2)\}$ ☐، $\{(2,1)\}$ ☐
2. الشعاع $v=(1,2,1)$ ينتمي إلى الفضاء A : نعم ☐، لا ☐
3. الفضاء $A\cap B$، هو $\{(0,0,0)\}$: خطأ ☐، صحيح ☐
4. الأشعة الثلاثة $(-1,2,2)$،$(2,1,1)$،$(0,1,1)$: مرتبطة خطيا ☐، مستقلة خطيا ☐
5. فضاء الأشعة المرتبطة بالشعاع $(1,2,2)$ هو: A ☐، B ☐، $\mathbb{R}^3$ ☐