جامعة الجيلالي بونعامة بخميس مليانة

معهد العلوم الاقتصادية

السنة الأولى LMD الفروع 1، 2، 3 (2016/15)

الرياضيات 2 — $1^{\text{سا}}30$ — 10 -05-2016

EMD 02

تصحيح نموذجي

ضع إشارة (×) في الخانة التي تُعبر عن الإجابة الصحيحة، أو أكمل الفراغات بإجابات صحيحة.

تمرين 1 [4.5]

نعتبر الفضاء الجزئي : $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad x=2y=3z-y\}$

1. أساس الفضاء A ، هو: $\{(1,2,3),(-1,1,2)\}$ ☐ ، $\{(2,1,1)\}$ ☒ ، $\{(2,3)\}$ ☐
2. الشعاع $v=(-1,1,2)$ ينتمي إلى الفضاء A : لا ☒ ، نعم ☐
3. الأشعة $(-1,1,2)$،$(1,2,3)$،$(2,1,1)$: مرتبطة خطيا ☒ ، مستقلة خطيا ☐

تمرين 2 [4.5]

الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ مزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$.

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ بحيث: $f(e_1)=(-1,1,2)$ ، $f(e_2)=(1,2,3)$ ، $f(e_3)=(2,1,1)$

1. الصورة $f(x,y,z)$ تُعطى بالعبارة :

$(2x+y+z\,,\,x+2y+3z\,,\,-x+y+2z)$ ☐ ، $(2x+y-z\,,\,x+2y+z\,,\,x+3y+2z)$ ☒

2. أساس الفضاء الشعاعي الجزئي $\operatorname{Im}f$ ، هو:

$\{(2,1,1),(1,2,3)\}$ ☒ ، $\{(2,1,1),(1,2,3),(-1,1,2)\}$ ☐ ، $\{(1,-1,1)\}$ ☐

3. مجموعة الأشعة (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ التي تحقق: $f(x,y,z)=(0,0,0)$، هي الفضاء الشعاعي الجزئي:

$\langle(0,-1,1),(1,0,-1)\rangle$ ☐ ، $\langle(1,-1,1)\rangle$ ☒ ، $\langle(0,-1,1),(1,0,-1),(1,-1,-1)\rangle$ ☐

تمرين 3 [5]

نعتبر في الأساس القانون لـ $\mathbb{R}^3$ المصفوفة $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\5&0&0\end{pmatrix}$

1. حساب: $M^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\5&0&0\\0&5&0\end{pmatrix}$ ، $M^3=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{pmatrix}=5I_3$ ، $M^n=\begin{cases}5^k\cdot I_3 & ,n=3k\\5^k\cdot M & ,n=3k+1\\5^k\cdot M^2 & ,n=3k+2\end{cases}\quad(k\in\mathbb{N})$

2. استنتاج بأن المصفوفة M قابلة للقلب، وتعيين مصفوفتها العكسية M^{-1} بدلالة M.

لدينا $M^3=5I_3$ ومنه $\left(\frac{1}{5}M^2\right)\cdot M=I_3$ ، $M\cdot\left(\frac{1}{5}M^2\right)=$ أي المصفوفة M قابلة للقلب: $M^{-1}=\frac{1}{5}M^2$

3. مقلوب M هو : $M^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\5&0&0\\0&5&0\end{pmatrix}$ ☒ ، $M^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}0&0&5\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ ☐

4. من التكافؤ: $M\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=M^{-1}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ ، نجد : $z=2$ ، $y=-1$ ، $x=\frac{3}{5}$

تمرين 4 [3]

في الفضائين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ المزودان بأسُسِهما القانونية، نعتبر A و B مصفوفتي التطبيقين الخطيين f و g :

$$A=M(f)=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix},\quad B=M(g)=\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\\1&4\end{pmatrix}$$

1. التطبيقان f و g المرفقان بالمصفوفتين A و B، بالنسبة للأسس القانونية لفضاءات البدء والوصول، هما :

$$g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ (x,y)\mapsto(2x+y,-3x+2y,x+4y)\ ;\ f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\mapsto(2x+y-z,x+2y+z,x+3y+2z)$$

2. تُعطى مصفوفة التطبيق الخطي $f\circ g$ بالعلاقة : $C=M(f\circ g)=M(f)\cdot M(g)=A\cdot B$، حيث:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\-3&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-3&9\\-5&15\end{pmatrix}$$

3. التطبيق الخطي $f\circ g$ معرف كما يلي: $(f\circ g)(x,y)=(0,-3x+9y,-5x+15y)$

تمرين 5 [3]

نعتبر المصفوفتين A و B:

$$A=\begin{pmatrix}4&-1&1&-2\\0&0&3&0\\0&0&-2&5\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&-2&1&-1\\1&-1&4&1\\-2&2&0&3\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

1. رتبة A هي : إثنان ☒ ، ثلاثة ☐ ، أربعة ☐

2. رتبة B هي : إثنان ☐ ، ثلاثة ☐ ، أربعة ☒

3. باستخدام طريقة العمليات على الأسطر، حل الجملة الخطية الآتية:

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases}2x-y-2z=3\\x+2y+4z=-2\\-x+3y-z=3\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-2&3\\1&2&4&-2\\-1&3&-1&3\end{array}\right)\xrightarrow[\ell_3\to2\ell_3+\ell_1]{\ell_2\to2\ell_2-\ell_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-2&3\\0&5&10&-7\\0&5&-4&9\end{array}\right)\xrightarrow{\ell_3\to\ell_3-\ell_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-2&3\\0&5&10&-7\\0&0&-14&16\end{array}\right)$$

المصفوفة الاخيرة تكافئ: $(\mathrm{II})\ \begin{cases}2x-y-2z=3\\5y+10z=-7\\-14z=16\end{cases}$ وحل هذه الجملة يبتدئ بالمعادلة الأخيرة. نحصل على $z=-\frac{8}{7}$، وبالتعويض في المعادلة الثانية، نحصل على $y=\frac{31}{35}$. وبالتعويض في المعادلة الثالثة، نحصل على $x=-\frac{7}{10}$.