معهد العلوم الاقتصادية　　السنة الأولى LMD　　الفروع 1، 2، 3　　(2016/15)

الرياضيات 2　　1_{30} سا　　2016-06-13

EXAMEN DE RATTRAPAGE

تصْحيح نُموذَجي

ضع إشارة (×) في الخانة التي تُعبر عن الإجابة الصحيحة، أو أكمل الفراغات بإجابات صحيحة.

تمرين 1 [4.5]

نعتبر الفضاء الجزئي : $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x=2y=z\}$

1.5

1. أساس الفضاء A، هو: $\{(1,2,3),(2,1,2)\}$ ☐ ، $\{(2,1,2)\}$ ☒ ، $\{(2,3)\}$ ☐

1.5

2. الشعاع $v=(1,2,1)$ ينتمي إلى الفضاء A : لا ☒ ، نعم ☐

1.5

3. الأشعة $(2,1,2)$،$(1,2,3)$،$(1,2,1)$: مرتبطة خطيا ☐ ، مستقلة خطيا ☒

تمرين 2 [4.5]

الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ مزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$.

f تطبيق خطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ بحيث: $f(e_3)=(1,2,1)$ ، $f(e_2)=(1,2,3)$ ، $f(e_1)=(2,1,2)$

1. الصورة $f(x,y,z)$ تُعطى بالعبارة :

1.5

$(2x+y+2z,\ x+2y+3z,\ x+2y+z)$ ☐ ، $(2x+y+z,\ x+2y+2z,\ 2x+3y+z)$ ☒

2. أساس الفضاء الشعاعي الجزئي $\operatorname{Im} f$، هو:

1.5

$\{(2,1,1),(1,2,3)\}$ ☐ ، $\{(1,2,1),(1,2,3),(2,1,2)\}$ ☒ ، $\{(1,-1,1)\}$ ☐

3. مجموعة الأشعة (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ التي تحقق: $f(x,y,z)=(0,0,0)$، هي الفضاء الشعاعي الجزئي:

$\langle(0,-1,1),(1,0,-1)\rangle$ ☐ ، $\{(0,0,0)\}$ ☒ ، $\langle(0,-1,1),(1,0,-1),(1,-1,-1)\rangle$ ☐

1.5

تمرين 3 [5]

نعتبر في الأساس القانوني لـ $\mathbb{R}^3$ المصفوفة $M=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

1.5

1. حساب: $M^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ ، $M^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$ ، $M^n=\begin{cases}I_3 & ,n=3k\\ M & ,n=3k+1\\ M^2 & ,n=3k+2\end{cases}\quad (k\in\mathbb{N})$

2. استنتاج بأن المصفوفة M قابلة للقلب، وتعيين مصفوفتها العكسية M^{-1} بدلالة M.

1.5

لدينا $M^3=I_3$ ومنه $M\cdot M^2=M^2\cdot M=I_3$ أي المصفوفة M قابلة للقلب: $M^{-1}=M^2$

3. مقلوب M هو : $M^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ ☒ (1) ، $M^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ ☐

4. من التكافؤ : $M\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=M^{-1}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ، نجد : $x=3$, $y=1$, $z=2$ (1)

تمرين 4 [3]

في الفضائين $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ المزودين بأسُسِهما القانونية، نعتبر A و B مصفوفتا التطبيقين الخطيين f و g :

$$A=M(f)=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&4\end{pmatrix}\quad,\quad B=M(g)=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}$$

1. التطبيقان f و g المرفقان بالمصفوفتين A و B، بالنسبة للأسس القانونية لفضاءات البدء والوصول، هما :

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)\mapsto(2x-3y+z\,,\,x+2y+4z)\ (1)\ ;\quad g:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\mapsto(2x+y-z\,,\,x+2y+z\,,\,x+3y+2z)$$

2. تُعطى مصفوفة التطبيق الخطي $f\circ g$ بالعلاقة : $C=M(f\circ g)=M(f)\cdot M(g)=A\cdot B$، حيث:

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix}2&-3&1\\1&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-3\\8&17&9\end{pmatrix}\ (1)$$

3. التطبيق الخطي $f\circ g$ معرف كما يلي: $(f\circ g)(x,y,z)=(2x-y-3z\,,\,8x+17y+9z)$ (1)

تمرين 5 [3]

نعتبر المصفوفتين A و B:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&-2\\0&2&0&0\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

(1)

1. رتبة A هي : إثنان ☐ ، ثلاثة ☒ ، أربعة ☐
2. رتبة B هي : إثنان ☐ ، ثلاثة ☒ ، أربعة ☐

3. باستخدام طريقة العمليات على الأسطر، حل الجملة الخطية الآتية: (2)

$$(\mathrm{I})\cdots\begin{cases}2x+y+z=1\\-x+2y+z=2\\x+y+2z=3\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\-1&2&1&2\\1&1&2&3\end{array}\right)\xrightarrow[\ell_3\to2\ell_3-\ell_1]{\ell_2\to2\ell_2+\ell_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\0&5&3&5\\0&1&3&5\end{array}\right)\xrightarrow{\ell_3\to5\ell_3-\ell_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\0&5&3&5\\0&0&12&20\end{array}\right)$$

المصفوفة الاخيرة تكافئ: $(\mathrm{II})\cdots\begin{cases}2x+y+z=1\\5y+3z=5\\12z=20\end{cases}$ وحل هذه الجملة، يبتدئ بالمعادلة الأخيرة، فنحصل على

$z=\frac{5}{3}$ ، وبالتعويض في المعادلة الثانية، نحصل على $y=0$. وأخيرا، وبالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على $x=-\frac{1}{3}$