

## Serie d'exercices n°3

## Exercice 1

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $A \cdot B$ ,  $B \cdot A$ ,  $B \cdot A \cdot B$ ,  $A^{20} \times B^{20}$ .

## Exercice 2

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Calculer  $M^2$  et  $M^3$ , En déduire  $M^{-1}$ .

## Exercice 3

$$\text{On considère la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $A^2$ ,  $A^3$  et vérifier que  $A^3 = 3A^2 - 2A$ . En déduire que  $A$  n'est pas inversible.

## Exercice 4

A l'aide des déterminants, calculer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 18 & 7 \\ 18 & 40 & 17 \\ 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 5

Inverser, si possible, les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exercice 6

Utiliser la méthode du PIVOT pour étudier l'inversibilité des matrices suivants et éventuellement calculer leur inverse :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 7**

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 8**

Soit les matrices  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Déterminer  $a$  pour que  $B^{-1} \cdot A \cdot B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 9**

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$1) \begin{cases} x+2y+z = -1 \\ 2x+6y-z = 0 \\ x-2y+2z = 3 \end{cases} ; 2) \begin{cases} x+2y+z = 3 \\ 2x+6y-z = 11 \\ x-2y+2z = -2 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x-y-z = 4 \\ 3x+4y-2z = 11 \\ 3x-2y+4z = 11 \end{cases} ; 4) \begin{cases} 3x+y+z = 1 \\ x-y+2z = 2 \\ x+3y-3z = -3 \end{cases}$$

**Exercice 10**

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} 2x+y+2z = 1 \\ x-y+2z = 2 \\ -3x-z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+2y+z = 1 \\ x+2z = 2 \\ y+3z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -x+y+z = 1 \\ 3x+3y-z = -1 \\ 2x-2y-4z = 0 \end{cases}$$

en utilisant la méthode de CRAMER, lorsque cela sera possible.

**Exercice 11**

On pose  $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

- Calculer les vecteurs propres de  $M$  et en déduire que  $M$  est diagonalisable .
- Déterminer une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $M = P \cdot D \cdot P^{-1}$ .
- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ . Appliquer ce résultat au calcul de  $M^3$ .