الفضاءات الشعاعية

بنية الفضاء الشعاعي الجمع الشعاعي "+" عملية داخلية في مجموعة الأشعة V . وهذه العملية تزود V ببنية زمرة تبديلية. وعملية ضرب **شعاع بعدد سلمي** "·" هي عملية خارجية في مجموعة الأشعة V . وهي تحقق:

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad x+y=y+x$$
$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \forall z \in E \quad (x+y)+z=x+(y+z)$$
$$\exists O_E \in E \quad \forall x \in E \quad x+O_E=O_E+x$$
$$\forall x \in E \quad \exists -x \in E \quad x+(-x)=(-x)+x=O_E$$

نقول عن مجموعة الأشعة V المزودة بهاتين العمليتين بأنها فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$.

تعريف ليكن K حقل تبديلي، نقول عن مجموعة غير خالية E مزودة بعمليتين (+) و (·) إنها فضاء شعاعي على الحقل K (**ف.ش** على K) إذا تحقق: $(E,+)$ زمرة تبديلية، والعملية الخارجية $(\cdot)$ على K تحقق :

$$\forall \alpha \in K \quad \forall x, y \in E \quad \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$$
$$\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall x \in E \quad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$$
$$\forall \alpha, \beta \in K \quad \forall x \in E \quad \alpha(\beta x)=(\alpha \beta)x$$
$$\forall x \in E \qquad 1 \cdot x=x$$

(1 هو عنصر الوحدة في K^* ، تُسمى عناصر ف. ش **أشعة**، وتُسمى عناصر الحقل **سلميات**).

أمثلة – المستقيم الشعاعي والمستوي الشعاعي والفضاء الشعاعي المألوف كلها فضاءات شعاعية على $\mathbb{R}$

- $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ هما ف ش على $\mathbb{R}$. وبصورة عامة $\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\,\text{fois}}$ هو ف. ش على الحقل $\mathbb{R}$

من أجل $\lambda \in \mathbb{R}$ و $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ ، $x'=(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$ من $\mathbb{R}^n$

$$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n) \quad \text{و} \quad x+x'=(x_1+x'_1,x_2+x'_2,\cdots,x_n+x'_n)$$

- $E=\mathbb{R}[X]$ مجموعة كثيرات الحدود ذات المتغير X والمعاملات في الحقل $\mathbb{R}$ هي فضاء شعاعي على $\mathbb{R}$ بالعمليتين: الجمع المألوف لكثيرات الحدود من $\mathbb{R}[X]$ والعملية الخارجية: $(\lambda P)(X)=\lambda P(X)$, $P \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$

ملاحظة إذا كان E_1 و E_2 ف. ش على نفس الحقل K، فإنه بالإمكان أن نعرف على $E_1\times E_2$ بنية ف. ش :

$$\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y) \quad \text{و} \quad (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$$

الفضاء الشعاعي الجزئي نسمي فضاء شعاعيا جزئيا من الفضاء الشعاعي E (على الحقل K)، كل مجموعة جزئية F غير خالية من E تتحقق على نفسها بنية الفضاء الشعاعي. أو F ف. ش. جزئي من E إذا تحقق:

$$\forall \alpha \in K, \forall x \in F:\ \alpha x \in F \quad \text{و} \quad \forall x \in F, \forall y \in F:\ x+y \in F \quad \text{و} \quad (E \supset)F \neq \varnothing$$

أمثلة – E و $\{0_E\}$ فضائين شعاعيين جزئيين من E.

- $\mathbb{R}[X]$ ف.ش على الحقل $\mathbb{R}$. $P_n=\{P\in\mathbb{R}[X]: deg(P)\leq n\}$ مجموعة كثيرات الحدود من $\mathbb{R}[X]$ التي درجتها على الأكثر n هي ف.ش.ج من $\mathbb{R}[X]$.
- في $\mathbb{R}^3$، المجموعة $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 2x+y-z=0\}$ لها بنية ف.ش.ج من $\mathbb{R}^3$.
  - نلاحظ بأن $F\ni(0,0,0)$ ، ومنه $F\neq\varnothing$.
  - ليكن (x,y,z) و (x',y',z') من F. هل $(x,y,z)+(x',y',z')\in F$ ؟

$$F\ni(x,y,z):\quad 2x+y-z=0$$
$$F\ni(x',y',z'):\quad \underline{2x'+y'-z'=0}$$
$$2(x+x')+(y+y'-(z+z')=\ 2x''+y''-z''=0$$

هذا يعني أن شعاع المجموع $F\ni(x',y',z')+(x',y',z')=(x'',y'',z'')$

  - ليكن (x,y,z) من F و λ من $\mathbb{R}$. هل $\lambda(x,y,z)\in F$ ؟

$$F\ni(x,y,z):\quad 2x+y-z=0$$
$$\mathbb{R}\ni\lambda:\quad \underline{\lambda\qquad\qquad}$$
$$\lambda(2x+y-z)=\lambda 0=0$$
$$2(\lambda x)+(\lambda y)-(\lambda z)=\lambda 0=2x''+y''-z''=0$$

ومنه $F\ni\lambda(x,y,z)=(x'',y'',z'')$ إذن F ف. ش. ج من $\mathbb{R}^3$.

- نعتبر مجموعة الأشعة من الشكل: λa حيث $0\neq a\in E$

نرمز لهذه المجموعة بـ $D_a=\{x\in E,\exists\lambda\in K : x=\lambda a\}$. إن D_a فضاء شعاعي جزئي من E.

يسمى D_a **بالفضاء الشعاعي الجزئي** (من E) **المولد** بـ$\{a\}$. ونرمز له بـ $K\,a$.

قضية ليكن E فضاء شعاعي على K. و F مجموعة جزئية غير خالية من E. لدينا :

$$F \text{ ف.ش.ج من } E \iff \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \forall x,y\in F,\quad \alpha x+\beta y\in F$$

العبارة الخطية ليكن E ف. ش على الحقل K . ولتكن الأشعة a_1، a_2،...، a_n من E.

العبارة الخطية للأشعة a_1، a_2،...، a_n، هي كل كتابة من الشكل $\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$ حيث λ_1، λ_2،...، λ_n سلميات. العبارة الخطية للأشعة a_1، a_2،...، a_n ما هي إلا شعاع x من E بحيث: $x=\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$

مثلا نعتبر في $\mathbb{R}^3$ الأشعة: $z=(-3,1,4)$ ، $y=(0,1,-1)$ ، $x=(1,2,3)$. العبارة الخطية $2x-y+3z$ هي الشعاع V من $\mathbb{R}^3$: $V=2x-y+3z=2(1,2,3)-(0,1,-1)+3(-3,1,4)=(-1,6,19)$

فضاء مولد بشعاعين ليكن E فضاء شعاعي على K. b و a من E. نعتبر الفضائين الشعاعيين المولدين بـ a و b.

يسمى المجموع $K\cdot a+K\cdot b$ **بالفضاء الشعاعي الجزئي المولد** بالمجموعة $\{a,b\}$. ونكتب $K\,b+K.a=(\{a,b\})$

إذا كانت a_1، a_2،...، a_n أشعة من E، فإن كل العبارات الخطية في الأشعة a_1، a_2،...، a_n هي فضاء جزئي من E، يسمى هذا الفضاء بالفضاء المولد بهذه الأشعة. أي $\langle\{a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n\}\rangle=K\,a_1+K\,a_2+\cdots+K\,a_n$

تعريف الفضاء المنته ليكن E ف. ش على الحقل K. و A مجموعة جزئية من E.

إن الفضاء الشعاعي المنته المولد بـ A، هو مجموع العبارات الخطية المنتهية في عناصر A، ونرمز له بـ $\langle A\rangle$ أو (A) :

$$x \in (A) \iff \begin{cases} \exists n \in \mathbb{N}^* \\ \exists a_1, a_2, \cdots, a_n \in A \quad : \quad x = \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \\ \exists \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in K \end{cases}$$

تقاطع فضائين جزئيين إذا كان E فضاء شعاعي على K. و F_1 و F_2 فضائين جزئيين من E.

إن $F_1 \cap F_2$ فضاء شعاعيا من E. $F_1 \cap F_2 = \{x \in E , x \in F_1 \wedge x \in F_2\}$

وبصورة عامة، تقاطع عدد منته من الفضاءات الجزئية هو فضاء شعاعي جزئي. غير أن الاتحاد $F_1 \cup F_2$ ليس فضاء شعاعيا على العموم. مثلا، في $\mathbb{R}^2$، إذا اعتبرنا الفضائين الجزئيين :

$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ و $F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ ،

واخترنا على سبيل المثال الشعاعين $(1,0)$ و $(0,1)$ من $F_1 \cup F_2$، فسيكون مجموعهما خارج هذا الاتحاد.

وبالتالي $F_1 \cup F_2$ ليس ف.ش.ج من $\mathbb{R}^2$.

قضية $F_1 \cup F_2$ ف.ش.ج من $E \iff F_1 \subseteq F_2$ أو $F_2 \subseteq F_1$.

مجموع فضائين جزئيين نعتبر المجموعة $E = F_1 + F_2$ حيث: $z \in E \iff \exists x \in F_1 , \exists y \in F_2 : z = x + y$

- إذا كان z و w من E. فإنه يوجد (x_1, y_1) و (x_2, y_2) من $F_1 \times F_2$:

$$z = (x_1, y_1) \quad w = (x_2, y_2)$$

$$z + w = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in F_1 + F_2$$

- إذا كان z من E و λ من K فإنه يوجد $x \ni F_1$ و $y \ni F_2$ بحيث $z = x + y$

ويكون لدينا $\lambda z = \lambda(x , y) = (\lambda x , \lambda y) \in F_1 \times F_2$

ومنه $E = F_1 + F_2$ ف.ش من E.

وعندما يكون $F_1 \cap F_2 = \{0\}$، يسمى الفضاء الشعاعي الجزئي $F_1 + F_2$ **بالمجموع المباشر** لـ F_1 و F_2.

ونرمز له بالرمز $F_1 \oplus F_2$. ونقول أيضا أن F_1 **إضافي** لـ F_2 في E ، أو F_1 و F_2 إضافيان في E .

الارتباط الخطي والاستقلال ليكن E ف.ش على الحقل K . ولتكن الأشعة a_1، a_2،...، a_n من E.

- تكون الأشعة a_1، a_2،...، a_n مرتبطة خطيا $\iff$ وُجد n سلمي : λ_1، λ_2،...، λ_n ليست كلها معدومة بحيث: $\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0_E$
- وتكون هذه للأشعة a_1، a_2،...، a_n مستقلة خطيا إن لم تكن مرتبطة خطيا.

تكون الأشعة a_1، a_2،...، a_n مستقلة خطيا $\iff$ من أجل كل n سلمي: λ_1، λ_2،...، λ_n يتحقق الاستلزام:

$$\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n=0_E \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

أمثلة – في $E=\mathbb{R}^2$، يكون الشعاعان $(1,1)$ و $(-7,3)$ مستقلين خطيا.

- في $E=\mathbb{R}^n$، تكون الأشعة $e_1=(1,0,\cdots,0)$ ، $e_2=(0,1\ 0,0,\cdots,0)$،...، $e_n=(0,0,\cdots,0,1)$ مستقلة خطيا.
- في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}[x]$ على $\mathbb{R}$ تكون ... $x, x^2, x^3,$ مستقلة خطيا.
- في الفضاء الشعاعي $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1, e_2, e_3\}$، ندرس استقلال الأشعة :

$$v_1=(-1,-1,2)\quad,\quad v_2=(1,2,1)\quad,\quad v_3=(1,-1,0)$$

من أجل كل α و β و γ من $\mathbb{R}$:

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3}\quad\Leftrightarrow$$
$$\alpha(-1,-1,2)+\beta(1,2,1)+\gamma(1,-1,0)=(0,0,0)\quad\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}-\alpha+\beta+\gamma &=0\\ -\alpha+2\beta-\gamma &=0\\ 2\alpha+\beta &=0\end{cases}\Leftrightarrow\quad \begin{cases}-\alpha+3\beta=0\\ 2\alpha+\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\quad \alpha=\beta=\gamma=0$$

ومنه الأشعة v_3 ، v_2 ، v_1 مستقلة خطيا.

حالتان خاصتان :

إذا كان $0_E \in A$ فإن A مرتبطة.

كل شعاع غير معدوم يكون مستقلا خطيا.

قضية a_1،a_2،...، a_n أشعة من E . و F هو الفضاء المولد بهذه الأشعة.

الشرطان الآتيان متكافئين :

1. الأشعة a_1،a_2،...، a_n مستقلة خطيا
2. كل شعاع x من F ، يُكتب كعبارة خطية وحيدة في الأشعة a_1،a_2،...، a_n,

أي توجد سلميات وحيدة : λ_1، λ_2،...، λ_n بحيث: $x=\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$

الأساس E ف ش على K و $\mathcal{B}\subset E$. نقول عن $\mathcal{B}$ أنه **أساس** لـ E إذا كانت $\mathcal{B}$ تُولد E و $\mathcal{B}$ مجموعة مستقلة خطيا وعندئذ على شعاع x من E يكتب بصورة وحيدة كعبارة خطية في أشعة $\mathcal{B}$.

إذا كانت المجموعة $\mathcal{B}=\{a_1, a_2,\cdots, a_n\}$ أساسا لفضاء شعاعي E، فإن الأشعة a_1،a_2،...، a_n مستقلة وتولد E .
وعندئذ على شعاع x من E يكتب بصورة وحيدة كعبارة خطية في أشعة $\mathcal{B}$.

الكتابة الآتية وحيدة : $x=\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_n a_n$

تسمى **السلميات** λ_1، λ_2،...، λ_n بمركبات الشعاع x في الأساس $\mathcal{B}$. ونكتب $x_{|\mathcal{B}}=(\lambda_1, \lambda_2,\cdots, \lambda_n)$

مثال في الفضاء $\mathbb{R}^3$ المزود بالأساس القانوني $\mathcal{B}=\{e_1,e_2,e_3\}$ ، تكون الأشعة : e_1 و e_1+e_2 و $e_1+e_2+e_3$ تشكل أساسا آخر لـ$\mathbb{R}^3$.

بعد فضاء شعاعي E ف.ش على K . $\operatorname{card}\mathcal{B}$ يمثل عدد عناصر المجموعة $\mathcal{B}$.

إذا كان $\mathcal{B}_1$ و $\mathcal{B}_2$ أساسين لـ E، فإن $\operatorname{card}\mathcal{B}_1=\operatorname{card}\mathcal{B}_2$

إذا كان $\mathcal{B}$ أساس لـ E، فإن $\operatorname{card}\mathcal{B}$ يسمى **بعد** E، ونرمز له بـ $\dim E$.

- E ف.ش بعده n $\Leftrightarrow$ E يقبل أساسا $\mathcal{B}$: $\dim E=\operatorname{card}\mathcal{B}=n$

مثلا على الحقل $\mathbb{R}$ ، يكون: $\dim\mathbb{R}=1,\quad \dim\mathbb{R}^2=2,\cdots,\quad \dim\mathbb{R}^n=n$

- كل فضاء جزئي F من E، يكون بعده منته ويحقق $\dim F\le\dim E$.

ولدينا $\qquad E=F \Leftrightarrow \dim E=\dim F$

مثال **لنعين** أساساً للفضاء الجزئي : $\mathrm{F}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x-y+z=y-z\}$

لدينا $\mathrm{F}\ni(x,y,z):\ x-y+z=y-z \Leftrightarrow x-2y+2z=0 \Leftrightarrow 2y=x+2z$

$$\Leftrightarrow\ (x,y,z)=(x,\tfrac{x}{2}+z,z)=\tfrac{x}{2}(2,1,0)+z(0,1,1)$$

ومنه $\qquad \mathrm{F}=\langle(2,1,0),(0,1,1)\rangle$

- لنبين أن $\mathrm{G}=\langle(1,1,1)\rangle$ هو **فضاء إضافي** لـ F في $\mathbb{R}^3$.

لنثبت أن $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_E\}$. ليكن شعاع كيفي من التقاطع $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}$، فهذا الشعاع سيكتب كعبارة خطية وحيدة في كلا أساسيي F و G . فيكون:

$$\begin{aligned}&F\ni X\ ,\ \ X=\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,1)\\&G\ni X\ ,\ \ X=\gamma(1,1,1)\end{aligned}$$ حيث α و β و γ من $\mathbb{R}$

إذن $$\alpha(2,1,0)+\beta(0,1,1)=\gamma(1,1,1)\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}0=2\alpha-\gamma\\0=\alpha+\beta-\gamma\\0=\beta-\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\ \alpha=\beta=\gamma=0$$

ومنه $\mathrm{F}\cap\mathrm{G}=\{0_E\}$ ولدينا أيضا $\mathrm{F}+\mathrm{G}=\langle(2,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\rangle$ ومنه F و G إضافيين في $\mathbb{R}^3$.

- يمكن أن ندرس استقلالية الأشعة $(1,1,1)$، $(0,1,1)$، $(2,1,0)$:

من أجل كل α و β و γ من $\mathbb{R}$، يكون لدينا

$$(2\alpha+\delta,\alpha+\beta+\delta,\beta+\delta)=(0,0,0)\ \Leftrightarrow\begin{cases}2\alpha+\delta&=0\\\alpha+\beta+\delta&=0\\\beta+\delta&=0\end{cases}\Leftrightarrow\ \alpha=\beta=\delta=0$$

ومنه الأشعة $(1,1,1)$، $(0,1,1)$، $(2,1,0)$ مستقلة خطيا. والفضائين F و G إضافيين في $\mathbb{R}^3$.

خلاصة: الأشعة الثلاثة مستقلة وتولد $\mathbb{R}^3$ فهي تشكل أساسا لـ $\mathbb{R}^3$، والمجموع $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ مباشر في $\mathbb{R}^3$.

ومنه $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}=\mathbb{R}^3$. نلاحظ بأن: $\dim(\mathrm{F}+\mathrm{G})=\dim(\mathrm{F}\oplus\mathrm{G})=\dim\mathrm{F}+\dim\mathrm{G}=\dim\mathbb{R}^3=3$

تعريف الرتبة E فضاء شعاعي بعده n . و $v_1,v_2,\dots,v_p$ أشعة من E نرمز بـ F للفضاء المولد بهذه الأشعة.

يسمى العدد الأعظمي من الأشعة المستقلة خطيا المأخوذة من بين الأشعة $v_1,v_2,\dots,v_p$ **رتبة** $\{v_1,\dots,v_p\}$ ، ونكتب $r = \operatorname{rg} F = \operatorname{rg}\{v_1,\dots,v_p\}$. إذا كان $r = \operatorname{rg} F$ ، فإنه يكون لدينا $r \le n$ و $r \le p$.

حالة خاصة: عندما تكون الأشعة $v_1,v_2,\dots,v_p$ مستقلة خطيا $\operatorname{rg} F = \dim F = n$

الفضاء الإضافي E ف.ش على K. ليكن F ف.ش.ج من E

نقول عن الفضاء الجزئي F' بأنه إضافي لـ F في E، إذا كان $E = F + F'$ و $F \cap F' = \{0\}$

ونكتب $E = F \oplus F'$، أي المجموع $E = F + F'$ مباشر.

يمكن أن نصوغ المجموع المباشر لـ $F_1, F_2, \cdots, F_n$ بالكتابة $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$.

وعندئذ كل x من E يكتب بشكل وحيد :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad \text{حيث} \quad x_j \in F_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

مثال بفرض أن $\dim E = n$ و F ف.ج: $\dim F = p$ و F' ف.ج إضافي لـ F في E : $\dim F' = p'$

يكون $E = F \oplus F'$. ولدينا $\dim E = \dim(F \oplus F')$

$$n = \dim E = \dim F + \dim F = p + p'$$

قضية إذا كان F', F ف.ش.ج من فضاء شعاعي منته البعد E . يكون لدينا :

$$\dim(F + F') = \dim F + \dim F' - \dim(F \cap F')$$

المجموع $F + F'$ مباشر $\Leftrightarrow \dim(F + F') = \dim F + \dim F'$

$$E = F \oplus F' \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + F' \\ F \cap F' = \{0_E\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dim = \dim F' \\ F \cap F' = \{0_E\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + F' \\ \dim E = \dim F + \dim F' \end{cases}$$

إكمال أساس فضاء شعاعي كل ف.ش.ج F من E يقبل ف.ش.ج. F إضافي في E

وهذا الفضاء ليس وحيدا. للسهولة نختار أشعة أساس F' من أشعة أساس الفضاء E فيكون $E = F \oplus F'$ ومنه $\dim F' = \dim E - \dim F$. وإذا كان $E = F \oplus F'$ و $\mathcal{B}$ أساس لـ F ، $\mathcal{B}'$ أساس لـ F' $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ يكون أساس لـ E