<u>Solution d'examen d'Algèbre1</u>

<u>Exercice 1</u> (5p)

SOLUTION. 0,75 (1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$, *est vraie car* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x + 1 \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$.

0,75 (2) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$, *est fausse car , sa négation* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y \leq 0$, *est vraie* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x \in \mathbb{R}; 2x + y \leq 0$

0,75 (3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$, *est fausse car sa négation* $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y \leq 0$ *est vraie , en effet* $\exists x = 0, \exists y = 0; 0 \leq 0$.

(4) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$, *vraie car* $\exists x = 0, \exists y = 1; 1 > 0$.

(5) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$, *vraie* $\exists x = -1 \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 > y$.

(6) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \, ou \, 2x + y = 0)$, *Vraie car* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x \in \mathbb{R} : 2x - 2x = 0$ *(même si* $2x + y \not> 0$*) ou bien on peut dire que* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x + 1 : 2x - 2x + 1 = 1 > 0$ *(même si* $2x + y \neq 0$*).*

(7) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \, et \, 2x + y = 0)$ *est fausse car on ne peut jamais avoir* $(2x + y > 0 \, et \, 2x + y = 0)$ *en même temps.*

<u>Exercice 2</u> (10p)

SOLUTION. (1) *(a)* $f(\{1/2\}) = \{f(x) \in [0, 2] / x = 1/2\}$, $f(1/2) = 3/2 \in [0, 2]$, *alors :*

$$f(\{1/2\}) = \{3/2\}.$$ 0,1

(b) $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [-1, 1] / f(x) = 0\}$.
On a $f(x) = 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \notin [-1, 1]$, *alors :*

$$f^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$ 0,5

(c) $g([-1,1]) = \{g(x) \in [0,2] / x \in [-1,1]\}$, *on a* $x \in [-1,0] \cup]0,1]$.

$$\begin{aligned} x \in [-1,0] &\Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in [1,2] \subset [0,2] \end{aligned}$$

1

d'où $g([-1,0]) = [1,2]$

$$\begin{aligned} x \in]0,1] &\Rightarrow 0 < x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 < x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 < x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in]1,2] \subset [0,2] \end{aligned}$$

d'où $g(]0,1]) =]1,2], g([-1,1]) = [1,2]$. 01

(d) $g^{-1}([0,2]) = \{x \in [-1,1] / g(x) \in [0,2]\}$, *on a*

$$\begin{aligned} g(x) \in [0,2] &\Rightarrow 0 \leq x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow -1 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow (-1 \leq x^2 < 0) \vee (0 \leq x^2 \leq 1) \end{aligned}$$

l'ingalité $(-1 \leq x^2 < 0)$ *n'a pas de solutions.*

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Ainsi

$$g^{-1}([0,2]) = \emptyset \cup [-1,1] = [-1,1].$$ 01

1,5 (2) *Comme* $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ *c'est à dire l'élément* $0 \in [0,2]$ *n'admet pas d'antécédent par* f *dans* $[-1,1]$ *donc* f *n'est pas surjetive et par suite n'est pas bijective.*

1,5 (3) *L'application* g *est paire donc* $g(-1) = g(1)$ *or* $-1 \neq 1$ *donc* g *n'est pas injective d'où* g *ne peut être bijective, aussi on remarque que* $g([-1,1]) = [1,2] \neq [0,2]$ *donc* g *n'est pas surjecive, alors n'est pas aussi bijective.*

Solution. *$\mathcal{R}$ est une classe d'équivalence si et seulement si elle est réfléxive et symétrique et transitive.*

(1) *a) $\mathcal{R}$ est réfléxive si et seulement si* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x,y)$

$$(x,y)\mathcal{R}(x,y) \Leftrightarrow x+y = x+y\,.$$

D'où $\mathcal{R}$ est réfléxive. 1

b) $\mathcal{R}$ est symétrique si et seulement si

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y)$$

$$\begin{aligned} (x,y)\mathcal{R}(x',y') &\Rightarrow x+y = x'+y' \\ &\Rightarrow x'+y' = x+y \\ &\Rightarrow (x',y')\mathcal{R}(x,y) \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{R}$ est symétique. 1

c) $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si

$$\forall (x,y),(x',y'),(x",y") \in \mathbb{R}^2, (x,y)\mathcal{R}(x',y') \wedge (x',y')\mathcal{R}(x",y") \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x",y")$$

$$\begin{aligned} (x,y)\mathcal{R}(x',y') \wedge (x',y')\mathcal{R}(x",y") &\Rightarrow \begin{cases} x+y = x'+y' \\ \wedge \\ x'+y' = x"+y" \end{cases} \\ &\Rightarrow x+y = x"+y" \\ &\Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(x",y") \end{aligned}$$

1

D'où $\mathcal{R}$ est transitive, Ainsi $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(2) ***Trouvons la classe d'équivalence du couple*** $(0,0)$.

$$\begin{aligned} C((0,0)) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y)\mathcal{R}(0,0)\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y = 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\} \\ &= \{(x,-x) / x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

1

Exercice 3 (5 p)

SOLUTION. $(G,*)$ *est un groupe si et seulement si*

$$\begin{cases} *\text{est associative} \\ *\text{admet un élément neutre} \\ \text{Tout élément de } E \text{ admet un inverse dans} E \end{cases}$$

1,5 (1) $*$ *est associative si et seulement si*

$$\forall (x,y),(x',y'),(x",y") \in G, /[(x,y)*(x',y')]*(x",y") = (x,y)*[(x',y')*(x",y")]?$$

$$\begin{aligned} [(x,y)*(x',y')]*(x",y") &= (xx',xy'+y)*(x",y") \\ &= (xx'x",xx'y"+xy'+y)......(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x,y)*[(x',y')*(x",y")] &= (x,y)*(x'x",x'y"+y') \\ &= (xx'x",xx'y"+xy'+y)......(2). \end{aligned}$$

$(1)=(2)$ *d'où le résultat.*

1,5 (2) $(e,e') \in G$ *est un élément neutre de* G *si et seulement si*

(2) $(e,e') \in G$ *est un élément neutre de* G *si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in G, (x,y)*(e,e') = (e,e')*(x,y) = (x,y)$$

$$\begin{cases} (x,y)*(e,e') = (x,y) \\ (e,e')*(x,y) = (x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (xe,xe'+y) = (x,y) \\ (ex,ey+e') = (x,y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xe = x \\ xe'+y = y \\ ex = x \\ ey+e' = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e = 1 \in \mathbb{R}^*, \quad x \neq 0 \\ e' = 0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ainsi $(e,e') = (1,0) \in G$ *est l'élément neutre.*

~~Exercice 3~~

1,1

(3) $\forall (x,y) \in G, \exists (x',y') \in G / (x,y) * (x',y') = (x',y') * (x,y) = (e,e') = (1,0).$

$$\begin{cases} (x,y) * (x',y') = (1,0) \\ (x',y') * (x,y) = (1,0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (xx', xy'+y) = (1,0) \\ (x'x, x'y+y') = (1,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ xy' + y = 0 \\ x'x = 1 \\ x'y + y' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 1/x \in \mathbb{R}^*, & x \neq 0 \\ y' = -y/x \in \mathbb{R}, & x \neq 0 \end{cases}$$

ainsi le symétrique de $(x,y) \in G$ est $(x',y') = (1/x, -y/x) \in G$, alors $(G,*)$ est un groupe.

0,1

(4) $*$ *est non commutatif si et seulement si*

$\exists (x,y) = (2,0) \in G, \exists (x',y') = (1,1) \in G / (x,y) * (x',y') \neq (x',y') * (x,y).$

$$\begin{cases} (2,0) * (1,1) = (2,2) & \ldots(1) \\ (1,1) * (2,0) = (2,1) & \ldots(2) \end{cases}$$

on remarque que $(1) \neq (2)$, alors $(G,*)$ est un groupe non commutatif.