

Solution d'examen d'Algèbre 1

Exercice 1 (5 p)

**SOLUTION.** (1)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ , est vraie car  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x + 1 \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ .

(2)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ , est fausse car, sa négation  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y \leq 0$ , est vraie  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x \in \mathbb{R} : 2x + y \leq 0$

(3)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ , est fausse car sa négation  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y \leq 0$  est vraie, en effet  $\exists x = 0, \exists y = 0; 0 \leq 0$ .

(4)  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : 2x + y > 0$ , vraie car  $\exists x = 0, \exists y = 1; 1 > 0$ .

(5)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 > x$ , vraie  $\exists x = -1 \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x^2 > y$ .

(6)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \text{ ou } 2x + y = 0)$ , Vraie car  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x \in \mathbb{R} : 2x - 2x = 0$  (même si  $2x + y \neq 0$ ) ou bien on peut dire que  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -2x + 1 : 2x - 2x + 1 = 1 > 0$  (même si  $2x + y \neq 0$ ).

(7)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : (2x + y > 0 \text{ et } 2x + y = 0)$  est fausse car on ne peut jamais avoir  $(2x + y > 0 \text{ et } 2x + y = 0)$  en même temps.

Exercice 2 (10 p)

**SOLUTION.** (1) (a)  $f(\{1/2\}) = \{f(x) \in [0, 2] / x = 1/2\}$ ,

$f(1/2) = 3/2 \in [0, 2]$ , alors :

$f(\{1/2\}) = \{3/2\}$ .

(b)  $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in [-1, 1] / f(x) = 0\}$ .

On a  $f(x) = 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \notin [-1, 1]$ , alors :

$f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ .

(c)  $g([-1, 1]) = \{g(x) \in [0, 2] / x \in [-1, 1]\}$ , on a  $x \in [-1, 0] \cup ]0, 1]$ .

$$\begin{aligned} x \in [-1, 0] &\Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in [1, 2] \subset [0, 2] \end{aligned}$$

d'où  $g([-1, 0]) = [1, 2]$

$$\begin{aligned} x \in ]0, 1] &\Rightarrow 0 < x \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 < x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 < x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow g(x) \in ]1, 2] \subset [0, 2] \end{aligned}$$

d'où  $g(]0, 1]) = ]1, 2]$ ,  $g([-1, 1]) = [1, 2]$ . (01)

(d)  $g^{-1}([0, 2]) = \{x \in [-1, 1] / g(x) \in [0, 2]\}$ , on a

$$\begin{aligned} g(x) \in [0, 2] &\Rightarrow 0 \leq x^2 + 1 \leq 2 \\ &\Rightarrow -1 \leq x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow (-1 \leq x^2 < 0) \vee (0 \leq x^2 \leq 1) \end{aligned}$$

L'inégalité  $(-1 \leq x^2 < 0)$  n'a pas de solutions.

$$0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Ainsi

$$g^{-1}([0, 2]) = \emptyset \cup [-1, 1] = [-1, 1]. \quad (01)$$

(1,5) (2) Comme  $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$  c'est à dire l'élément  $0 \in [0, 2]$  n'admet pas d'antécédent par  $f$  dans  $[-1, 1]$  donc  $f$  n'est pas surjective et par suite n'est pas bijective.

(1,5) (3) L'application  $g$  est paire donc  $g(-1) = g(1)$  or  $-1 \neq 1$  donc  $g$  n'est pas injective d'où  $g$  ne peut être bijective, aussi on remarque que  $g([-1, 1]) = [1, 2] \neq [0, 2]$  donc  $g$  n'est pas surjective, alors n'est pas aussi bijective.

2014-2015 - 3031 - D01 - 1F

Examen de Mathématiques

Université de Technologie de Compiègne  
Département d'Informatique et de Mathématiques

Adresse : Université de Technologie de Compiègne  
17000 Compiègne  
Téléphone : 03 44 23 31 11

**SOLUTION.**  $\mathcal{R}$  est une classe d'équivalence si et seulement si elle est réflexive et symétrique et transitive.

(1) a)  $\mathcal{R}$  est réflexive si et seulement si  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x, y)$

$$(x, y)\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow x + y = x + y.$$

D'où  $\mathcal{R}$  est réflexive. (1)

b)  $\mathcal{R}$  est symétrique si et seulement si

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x', y') \Rightarrow (x', y')\mathcal{R}(x, y)$$

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Rightarrow x + y = x' + y'$$

$$\Rightarrow x' + y' = x + y$$

$$\Rightarrow (x', y')\mathcal{R}(x, y)$$

D'où  $\mathcal{R}$  est symétrique. (1)

c)  $\mathcal{R}$  est transitive si et seulement si

$$\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in \mathbb{R}^2, (x, y)\mathcal{R}(x', y') \wedge (x', y')\mathcal{R}(x'', y'') \Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$$

$$(x, y)\mathcal{R}(x', y') \wedge (x', y')\mathcal{R}(x'', y'') \Rightarrow \begin{cases} x + y = x' + y' \\ \wedge \\ x' + y' = x'' + y'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + y = x'' + y''$$

$$\Rightarrow (x, y)\mathcal{R}(x'', y'')$$

D'où  $\mathcal{R}$  est transitive, Ainsi  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence.

(2) Trouvons la classe d'équivalence du couple  $(0, 0)$ .

$$C((0, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y)\mathcal{R}(0, 0)\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -x\}$$

$$= \{(x, -x) / x \in \mathbb{R}\}. (1)$$

№ 31-03-3031 - D'après : IP

## Examen de Mathématiques

Definieren Sie die Begriffe Reflexivität, Symmetrie und Transitivität einer Äquivalenzrelation. (10 Punkte)

№ 31-03-3031 - D'après : IP  
 Année : 2020-2021  
 Matière : Mathématiques

Exercice 3 (5 p)

**SOLUTION.**  $(G, *)$  est un groupe si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ est associative} \\ * \text{ admet un \u00e9l\u00e9ment neutre} \\ \text{Tout \u00e9l\u00e9ment de } E \text{ admet un inverse dans } E \end{array} \right.$$

(1)  $*$  est associative si et seulement si

$$\forall (x, y), (x', y'), (x'', y'') \in G, [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') = (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')]$$

$$\begin{aligned} [(x, y) * (x', y')] * (x'', y'') &= (xx', xy' + y) * (x'', y'') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y) * [(x', y') * (x'', y'')] &= (x, y) * (x'x'', x'y'' + y') \\ &= (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) \dots (2) \end{aligned}$$

(1) = (2) d'o\u00f9 le r\u00e9sultat.

(2)  $(e, e') \in G$  est un \u00e9l\u00e9ment neutre de  $G$  si et seulement si

(2)  $(e, e') \in G$  est un \u00e9l\u00e9ment neutre de  $G$  si et seulement si

$$\forall (x, y) \in G, (x, y) * (e, e') = (e, e') * (x, y) = (x, y)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (x, y) * (e, e') = (x, y) \\ (e, e') * (x, y) = (x, y) \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (xe, xe' + y) = (x, y) \\ (ex, ey + e') = (x, y) \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} xe = x \\ xe' + y = y \\ ex = x \\ ey + e' = y \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e = 1 \in \mathbb{R}^*, \quad x \neq 0 \\ e' = 0 \in \mathbb{R}, \end{array} \right. \end{aligned}$$

ainsi  $(e, e') = (1, 0) \in G$  est l'\u00e9l\u00e9ment neutre.

Exercice 3

0.5. Montrer la propriété de la propriété

1/1

(3)  $\forall (x, y) \in G, \exists (x', y') \in G / (x, y) * (x', y') = (x', y') * (x, y) = (e, e') = (1, 0)$ .

$$\begin{cases} (x, y) * (x', y') = (1, 0) \\ (x', y') * (x, y) = (1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (xx', xy' + y) = (1, 0) \\ (x'x, x'y + y') = (1, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xx' = 1 \\ xy' + y = 0 \\ x'x = 1 \\ x'y + y' = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = 1/x \in \mathbb{R}^*, x \neq 0 \\ y' = -y/x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \end{cases}$$

ainsi le symétrique de  $(x, y) \in G$  est  $(x', y') = (1/x, -y/x) \in G$ , alors  $(G, *)$  est un groupe.

0.1

(4) \* est non commutatif si et seulement si

$\exists (x, y) = (2, 0) \in G, \exists (x', y') = (1, 1) \in G / (x, y) * (x', y') \neq (x', y') * (x, y)$ .

$$\begin{cases} (2, 0) * (1, 1) = (2, 2) \dots (1) \\ (1, 1) * (2, 0) = (2, 1) \dots (2) \end{cases}$$

on remarque que (1)  $\neq$  (2), alors  $(G, *)$  est un groupe non commutatif.

après

$$-x^2 + a^2 = y^2$$

$$-x^2 + a^2 + (x+a) \int_0^x d(t) dt - x a t^2 = y^2 \tag{0.55}$$

$$-(x+a)a^2 + 2a(x)a^2 - \frac{1}{a(x+a)} a + a \int_0^x d(t) dt + 2a(x) = y^2$$

l'équation (0.55) - (0.56) me sera utile pour que a soit d satisfait

$$x(x+a) = a^2 - a^2 + 2a(x) \int_0^x d(t) dt \tag{0.57}$$

soit  $x = a - d(x)$  d'où

l'équation (0.57) s'écrit avec l'équation (0.56) que l'on peut écrire  $x(x+a) =$

$$0(x+a) = 0(x+a) = 0$$

soit

$$0 = \frac{1}{x} \int_0^x d(t) dt - \frac{1}{x+a} \int_0^x d(t) dt$$

par suite (0.58) me fait

$$0 = \frac{1}{x} \int_0^x d(t) dt - \frac{1}{x+a} \int_0^x d(t) dt \tag{0.58}$$