وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الجيلالي بونعامة

كلية العلوم الاقتصادية و علوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

السنة الجامعية 2022/2021

السنة اولى جذع مشترك (LMD)

المقياس : الجبر الخطي

السلسلة رقم 1 : الفضاءات الشعاعية (Les Espaces Vectoriels)

ملاحظة : نعتبر في كل ما يأتي ان $(R, +\ ,\ \cdot)$ جسم تبديلي $(\cdot), (+)$ عمليتي الجمع واضرب العادي

تمرين 1 :

ليكن $(R^3, +\ ,\ \cdot)$ فضاء شعاعي على R بين هل المجموعات التالية تشكل فضاءات شعاعية جزئية من R^3

$$E_1 = \{(x, y, z) \in R^3 \ \mid x + 2y - z = 2\}$$

$$E_2 = \{(x, y, z) \in R^3 \ \mid 2x + yz < 1\}$$

$$E_3 = \{(x, y, z) \in R^3 \ \mid x + 2yz = 0\}$$

$$E_4 = \{(x, y, z) \in R^3 \ \mid x^2 - y + z = 0\}$$

تمرين 2 :

هل المجموعات التالية فضاءات شعاعية جزئية :

$$F_1 = \{f \in \mathcal{F}\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f\ est\ pair\}.\ sur\ \mathcal{F}\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

$$F_2 = \{f \in \mathcal{F}\ (\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f\ est\ impair\}.\ sur\ \mathcal{F}\ (\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

تمرين 3 :

من اجل كل عدد حقيقي β نعرف المجموعة الجزئية E ل R^3 كما يلي :

$$E = \{(x, y\ z\ ) \in R^3 \mid \beta x + y + z = 0; -x + y - \beta z = 0\}$$

1. اثبت ان E فضاء شعاعي جزئي ل R^3
2. ناقش حسب قيم العدد الحقيقي β وجود اساس ل E ثم استنتج بعده $\dim(E)$
3. ما هو شرط العدد الحقيقي β حتى يكون الشعاع $v = (2,\quad 1,\quad 1) \in E$

« La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques » ; **« Blaise Pascal »**

تمرين 4 :

لدينا الاشعة التالية : $U_1 = (1, \quad 1, \quad 1);\ U_2 = (2, \quad -2, \quad -1);\ U_3 = (1, \quad 1, \quad -1)$

لدينا المجموعة التالية :

$$E: \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + z = 0\}$$

$$F: Vect\ \langle U_1; U_2 \rangle$$

1. بين ان E فضاء شعاعي جزئي *(S.E.V)* من R^3 عين اساس ل E
2. ادرس الاسقلال او الارتباط الخطي للاشعة التالية $\langle U_1; |U_2; |U_3 \rangle$
3. هل $U_3 \in F;\ U_3 \in \mathrm{E}$
4. عين اساس $E \cap F$
5. **ليكن الشعاع** $U_4 = (-1, \quad 7, \quad 5)$ هل $\boldsymbol{U_4} \in \boldsymbol{F}, \boldsymbol{U_4} \in \boldsymbol{E}$

تمرين 5 :

لدينا المجموعة E من $R_3[\![X]\!]$ المعرفة كما يلي :

$$E: \{P \in R_3[\![X]\!] \mid P'(0) = P''(0) = 0\}$$

P'' و P' يمثلان المشتق من الدرجة الاولى و الثانية على التوالي

1. بين ان E فضاء شعاعي جزئي
2. عين اساس لE و بعد ل $\dim E$

تمرين 6 :

بين ان المجموعة $\{P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x)\}$ مستقلة خطيا حيث :

$$P_1(x) = 3x - 2x^2 + x^3, \quad P_2(x) = -3 + x^2 + 2x^3, \quad P_3(x) = -2x^2 + 2x^3$$

تمرين 7 :

لدينا المجموعات التالية :

$$E: \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y + z = 0\}$$

$$F: \{(x, y, z) \in R^3 \mid x + y = 2z\}$$

1. بين ان $E\ et\ F$ يشكلان فضاءات شعاعية جزئية
2. عين اساس لكل من $F\ et\ E$
3. عين الفضاء الشعاعي الجزئي $E \cap F$ ثم عين اساسه
4. ما هو بعد كل من $E,\ F\ et\ E \cap F$

« la mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul » ; ***« Galilée »***

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الجيلالي بونعامة — السنة الجامعية2022/2021

كلية العلوم الاقتصادية و علوم التسيير — قسم العلوم الاقتصادية

السنة اولى جذع مشترك (LMD) — المقياس : الجبر الخطي

السلسلة رقم 2 : التطبيقات الخطية (Les Applications Linéaires)

تمرين 1 :

1. بين هل التطبيقات التالية خطية

a. $f_1: R^3 \to R^4$
$$f_1(x, \quad y, \quad z) = (x, \quad x - z, \quad xy + 2z, \quad y + z)$$

b. $f_2: R^3 \to R$
$$f_2(x, \quad y, \quad z) = (x + y + 2z)$$

c. $f_3: R^2 \to R^2$
$$f_3(x, \; y) = (0, \; |y|)$$

d. $f_4: R^2 \to R^2$
$$f_4(x, \; y) = (\sin(x), \; y)$$

e. $f_5: R_3[\![X]\!] \to R^3$
$$f_5(P) = \big(P(-1), \; P(0), \; P(1)\big)$$

تمرين 2 :

ليكن f تطبيق خطي معرف كما يلي : $f: R^3 \to R$:

عين التطبيق f بحيث: $f(1, \quad 1, \quad 2) = 4 \qquad f(2, \quad 0, \quad 1) = 1 \qquad f(1, \quad 1, \quad 1) = 0$

1. عين $ker\ (f), et\ Im\ (f)$
2. عين $dim\big(ker\ (f)\big), et\ dim\ \big(Im\ (f)\big)$

تمرين4:

ليكن F و E فضائيين شعاعيين ذو ابعاد p و n على التوالي

ليكن $f: E \to F$ تطبيق خطي

1. برهن اذا كان $n < p$ اذن التطبيق f ليس غامر
2. برهن اذا كان $p < n$ اذن التطبيق f ليس متباين

تمرين 5 :

الفضاء الشعاعي R^3 مزود بأساس القانوني «$B = (e_1; \quad e_2; \quad e_3)$

$$v_1 = 2e_1 - e_2 + e_3; \quad v_2 = -e_1 + e_2 + e_3; \quad v_3 = e_2 + 3e_3; \quad v_4 = -e_1 - 2e_2 + e_3;$$

F تطبيق خطي من R^3 الى R^3 معرف كما يلي :

$$f(e_1) = v_1 \qquad f(e_2) = v_2 \qquad f(e_3) = v_3$$

1. عين صورة الشعاع $X = (x, \quad y, \quad z)$ بالتطبيق f في الاساس B
2. بين ان $v_1\ et\ v_2$ مستقلين خطيا
3. عين اساس ل $im(f)$
4. بين ان $f(v_4) = 0_{R^3}$ ثم عين $ker(f)$

تمرين 6 :

الفضاء الشعاعي R^3 مزود بأساس القانوني «$B = (e_1; \quad e_2; \quad e_3)$

ليكن f تطبيق خطي من R^3 الى R^3 معرف كما يلي :

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3 \qquad f(e_2) = e_2 - e_3 \qquad f(e_3) = -e_2 + e_3$$

1. عين صورة الشعاع $X = (x, \quad y, \quad z)$ بالتطبيق f في الاساس B
2. احسب $f^2(e_1) + f^2(e_2) + f^2(e_3)$ في الاساس B

ليكن Q تطبيق خطي معرف كما يلي :

$$R^3 \to R \qquad Q(x, y, z) = x + y + z$$

1. عين $ker(Q)$ ثم عين اساس و بعد $ker(Q)$
2. عين اساس $ker(Q) + im(f)$

تمرين 7:

لدينا التطبيق الخطي $\mathscr{H}$ من $\mathbb{R}^3$المعرف كما يلي :

$$\mathscr{H}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \mathcal{H}(x, y\,, z) = (-x - y - z, -x - y - z, 0)$$

1. عين$dim\big(ker(\mathcal{H})\big)et\ ker(\mathcal{H})$ هل $\mathscr{H}$ تطبيق تقابلي
2. عين $ker(\mathcal{H} + Id_E)$ ثم حل في $\mathbb{R}^3$ المعادلة $\mathscr{H}(X) = (-2X)$
3. هل $ker(\mathcal{H} + Id_E) \oplus ker(\mathcal{H})$

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة الجيلالي بونعامة

كلية العلوم الاقتصادية و علوم التسيير

السنة اولى جذع مشترك (LMD)

السنة الجامعية 2022/2021

قسم العلوم الاقتصادية

المقياس : الجبر الخطي

السلسلة رقم 3 : المصفوفات (Les Matrices)

تمرين 1:

لتكن المصفوفات :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \; ; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & e \end{pmatrix} \; ; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ln 2 \\ 4 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

1. اوجد رتبة كل من المصفوفات : $A\ , B, C$
2. اوجد العناصر التالية :

$$a_{22}\ ;\ b_{21}\ ; c_{13}$$

تمرين 2:

لدينا المصفوفة $A\ et\ B$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. احسب $\mathrm{B.A}$ و $\mathrm{A.B}$
2. ماذا تلاحظ

نرمز الى جداء المصفوفة $\mathrm{A.B} = \mathrm{C}$

3. احسب $B.(A.C)$ و $\mathrm{A}.(B.C)$
4. ماذا تلاحظ

تمرين3:

اعطي مصفوفة $A_{4\times 4}$ تحقق مايلي :

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i - j & si\ i \neq j \\ i + j & sinon \end{cases}$$

تمرين5:

نعتبر ما يلي :

$$A = \begin{pmatrix} -x & -1 \\ -1 & 3x \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2y & 7 \\ 0 & -3y \end{pmatrix}$$

1. اوجد $x \ et \ y$ حتى يكون $A + B = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ -1 & -14 \end{pmatrix}$
2. اوجد $x \ et \ y$ حتى يكون $2A - 4B = \begin{pmatrix} -5 & 24 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$

تمرين 6:

نفرض المصفوفة $A_{2\times2}$ كآتي :

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

بحيث a, b, c, d اعداد حقيقية كيفية مع $ad - bc \neq 0$

1. اوجد بدلالة a, b, c, d الاعداد الحقيقية x, y, z, t بحيث :

$$A \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = Id_{R^2}$$

تمرين 7:

1. اوجد رتبة المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 2 \\ 2 & -1 & -40 & a \end{pmatrix}$$

تمرين 8 :

اذا كانت المصفوفة :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

بين ان :

$$A^n = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1 + 2n & -4n \\ n & 1 - 2n \end{pmatrix}$$