

المصفوفات:

1. تعريف المصفوفة
2. المصفوفة المرفقة بتطبيق خطي
3. عمليات على المصفوفات
4. المحددات
5. حساب مقلوب مصفوفة

تعريف:

المصفوفة هي عبارة عن جدول من الاعداد الحقيقية R او الاعداد المركبة $\mathbb{C}$, ولكن سنقتصر في دراستنا على الاعداد الحقيقية فقط مرتب في n سطر و m عمود نرمز لها بالرمز :

$A \in \mathcal{M}_{(n,m)} \in R$ بحيث a_{ij} تمثل عناصر المصفوفة A اذن يمكن تمثيل المصفوفة عن طريق الجدول التالي :

$$A_{(n,m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad A = a_{ij} \quad 1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq m$$

ويمكن ان نرمز لها باختصار :

$$A = [a_{ij}] \quad ; \quad A = [a_{ij}]_{n,m}$$

درجة المصفوفة :

اذا كان للمصفوفة n سطر و m عمود نقول ان المصفوفة من الدرجة $n \times m$ واذا كان $n = m$ نقول ان المصفوفة من الدرجة n

انواع المصفوفات (types de matrices) :

مصفوفة سطر (Matrice ligne) :

تسمى المصفوفة التي من الشكل $1 \times m$ بمصفوفة سطر اذن :

$$si \ n = 1: A_{1,m} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m})$$

مثال :

$$A_{(1,4)} = (1 \ 2 \ -3 \ 0)$$

مصفوفة عمود (Matrice colonne) :

تسمى المصفوفة التي من الشكل $n \times 1$ بمصفوفة عمود اذن :

$$si\ m = 1: A_{n,1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

مصفوفة معدومة (matrice nulle) :

المصفوفة المعدومة هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها معدومة اي تاخذ الشكل التالي :

$$A_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$si\ a_{ij} = 0\ \forall i\ et\ \forall j$$

مصفوفة مربعة (matrice carrée) :

اذا كان $n = m$ نقول ان المصفوفة A مربعة من الدرجة n و نرمز لها :

$$A_n \in \mathcal{M}_n(R)$$

ترفق بالكل مصفوفة مربعة بما يسمى المحدد .

منقولة مصفوفة (matrice transposé) :

كل مصفوفة تقبل مصفوفة منقولة لها و نرمز لها A^t بحيث :

$$A^t = B \Leftrightarrow b_{ij} = a_{ji}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

خواص:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$$

$$[A^t]^t = A$$

المصفوفة القطرية (matrice diagonale) :

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ مربعة اذا كان :

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 0 & si\ i \neq j \\ a_{ii} \neq 0 & si\ i = j \end{cases}$$

وعليه يكون شكل المصفوفة القطرية :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{ii} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{ii} & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

خاصية :

محدد المصفوفة القطرية يكون بالشكل :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

المصفوفة الاحادية (matrice d'identité) :

اذا تساوت جميع عناصر القطر الرئيسي (diagonale principale) في المصفوفة القطرية للقيمة 1

نقول ان المصفوفة احادية ونرمز لها : I

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

اي :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 ; si i = j \\ 0 ; si i \neq j \end{cases}$$

مثال :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \dots \dots \dots$$

خاصية :

محدد المصفوفة الاحادية يساوي للقيمة 1

$$\det(I) = 1$$

$$I_n \cdot A_{nm} = A_{nm}$$

مصفوفة سلمية :

المصفوفة السلمية هي مصفوفة قطرية التي تتساوى فيها جميع عناصر القطر الرئيسي وتكون مختلفة للواحد وتكون بالشكل :

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & k & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & k \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & k \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{cases} a_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ a_{ii} = k \neq 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

ويمكن كتابة مصفوفة السلمية بدلالة مصفوفة الوحدة :

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & k & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & k \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = kI_n$$

مصفوفة مثلثية علوية (matrice triangulaire supérieure) :

إذا كانت جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي مساوية للصفر و تكون بالشكل التالي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة مثلثية سفلية (matrice triangulaire inférieure) :

إذا كانت جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي مساوية للصفر و تكون بالشكل التالي :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة متناظرة (matrice symétrique) :

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة نقول عنها انها متناظرة اذا كانت :

$$A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$$

مصفوفة شاذة (matrice singulière) :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(R)$ التي من خصائصها ان محددها معدوم اذن :

$$\det(A) = |A_n| = 0$$

مصفوفة نضامية (marice rigulière) :

لتكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(R)$ التي من خصائصها ان محددها غير معدوم اذن :

$$\det(A) = |A_n| \neq 0$$

اثر المصفوفة (trace de'une matrice) :

لتكن المصفوفة $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مربعة اثرها هو مجموع عناصر القطر الرئيسي اي :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

العمليات على المصفوفات (les opérations sur les matrices) :

تساوي مصفوفتين :

لدينا المصفوفة $A = [a_{ij}]_{n,m}$ و المصفوفة $B = [b_{ij}]_{n,m}$ نقول ان المصفوفتين متساويتين اذا كان :

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A; B \in \mathcal{M}_{n,m}(R) \\ a_{ij} = b_{ij} \forall i = 1 \dots n ; \forall j = 1 \dots m \end{cases}$$

جمع مصفوفتين :

لدينا المصفوفة $A = [a_{ij}]_{n,m}$ و المصفوفة $B = [b_{ij}]_{n,m}$ نقول ان المصفوفة $C = [c_{ij}]_{n,m}$ جمع المصفوفتين A et B اذا كان :

$$C = A + B \Leftrightarrow \begin{cases} C \in \mathcal{M}_{n,m}(R) \\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i = 1 \dots n ; \forall j = 1 \dots m \end{cases}$$

خواص جمع المصفوفات :

• خاصية التجميعية : $(A + B) + C = A + (B + C)$

مثال :

$$(A + B) + C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

اذن : $(A + B) + C = A + (B + C)$ • خاصية تبديلية : $A + B = B + A$

مثال :

$$A_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B + A = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

اذن : $A + B = B + A$

• جمع مصفوفة مثلثية علوية مع مصفوفة مثلثية علوية هي مصفوفة مثلثية علوية.

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

• جمع مصفوفة مثلثية سفلية مع مصفوفة مثلثية سفلية هي مصفوفة مثلثية سفلية.

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 9 & 15 & 0 \\ 13 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

• المصفوفة الصفرية $[0]_{n,m}$ عنصر حيادي بانسبة لعملية الجمع

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad \bullet$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \quad \bullet$$

$$\alpha(\beta A) = (\alpha \cdot \beta)A \quad \bullet$$

عملية الضرب :

عملية الضرب بالنسبة للمصفوفات $(A_{n,p}) \cdot (B_{p,m})$ يكون بتحقيق الشرط التالي:

عدد اعمدة المصفوفة $(A_{n,p})$ يساوي عدد اسطر المصفوفة $(B_{p,m})$

اذا كانت المصفوفة A ذات الرتبة (m, n) و المصفوفة B ذات الرتبة (n, p) اذن المصفوفة $A \cdot B$ هي من الرتبة (m, p)
اذن :

$$A \in \mathcal{M}_{n,p}(R); \quad B \in \mathcal{M}_{p,m}(R)$$

$$C = A \cdot B = \begin{cases} C \in \mathcal{M}_{n,m}(R) \\ C_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \end{cases}$$

مثال :

لدينا المصفوفتين :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

احسب $A \cdot B$; $C \cdot D$

الحل :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C.D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

خواص ضرب المصفوفات :

$$A.(B.C) = (A.B).C \quad \bullet$$

مثال :

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right] \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -9 & -9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & -13 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -7 & -13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A.(B + C) = (A.B) + (A.C) \quad \bullet$$

مثال :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -6 \\ \frac{1}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -6 \\ \frac{1}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -6 \\ \frac{1}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 & -6 \\ \frac{1}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} - 6 \\ \frac{1}{2} + 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} + 6 \\ \frac{1}{2} - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(A + B).C = (A.C) + (B.C) \quad \bullet$$

مثال :

لدينا :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

احسب : $[A + B].C$; $([A.C] + [B.C])$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• ضرب مصفوفة مثلثية علوية $\times$ مصفوفة مثلثية علوية هي عبارة عن مصفوفة مثلثية علوية

مثال :

لدينا :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

احسب $A.B$

الحل :

$$A.B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & -16 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

• ضرب مصفوفة مثلثية سفلية $\times$ مصفوفة مثلثية سفلية هي عبارة عن مصفوفة مثلثية سفلية

مثال :

لدينا :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

احسب $A.B$

$$A.B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظة:

بالصفة عامة ضرب المصفوفات ليس تبديلي معناه:

$$A.B \neq B.A$$

حالة خاصة :

إذا كانت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n)}(R)$ ولدينا مصفوفة الوحدة I_n اذن :

$$I_n.A = A.I_n$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة :

ضرب مصفوفتان غير صفريتين يمكن ان نحصل على مصفوفة صفرية

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

اذن :

$$A.B = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

إذا كانت A مصفوفة مربعة و كان k عددا صحيحا غير سالب اذن :

$$A^0 = I$$

$$A^k.A = A^{k+1}$$

مثال :

ليكن المصفوفة $A \in \mathcal{M}_3()$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

احسب A^n

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3.A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (2)^n \end{pmatrix}$$

خاصية :

لتكن المصفوفتان : $A \in \mathcal{M}_n(\quad)$; $B \in \mathcal{M}_n(\quad)$ بحيث $A.B = B.A$:
اذن :

$$(A + B)^p = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} . A^{p-k} . B^k$$

قسمة مصفوفات :

رتبة مصفوفة (rang d'une matrice) :

رتبة مصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(R)$ هو عدد الاسطر او الاعمدة المستقلة خطيا .

$$1 \leq rg(A) \leq \text{Min}(n, m)$$

مثال :

اوجد رتبة المصفوفة التالية :

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ \sqrt{2}-1 & -4 & 2 & \end{pmatrix}$$

نلاحظ ان :

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -2 & 6 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ \sqrt{2}-1 & -4 & 2 & \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 = \sqrt{2}L_2 \\ L_4 = L_1 + L_3 \end{matrix}}$$

اذن : $rg(A) = 2$

طريقة المحدد :

رتبة مصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n)}(R)$ اذا كان $rg(A) = n$:

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow 1 \leq rg(A) = n$$

و تكون رتبة المصفوفة $A \in \mathcal{M}_{(n)}(R)$ اذا كان $rg(A) = n - 1$:

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow 1 \leq \text{rg}(A) \leq n - 1$$

و لمعرفة رتبة المصفوفة في هذه الحالة نحسب المحددات الجزئية من الرتبة $n - 1$ ان وجد على الاقل محدد جزئي غير معدوم اذن الرتبة هي $(n - 1)$
مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -e^2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -e^2 \end{vmatrix} = 0$$

اذن :

$$1 \leq \text{rg}(A) \leq 2$$

وعليه نحسب محدد المصفوفة A من الدرجة 2 اذن :

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -e^2 \end{vmatrix} = e^2 - 3 \neq 0$$

$$\text{rg}(A) = 2$$

رتبة مصفوفة بطريقة Gauss او المصفوفة المختزلة (échelonnée) :

تستعمل هذه الطريقة في المصفوفة المربعة او من الدرجة $(n \times m)$ ورتبة المصفوفة هو عدد العناصر التي توجد في القطر الرئيسي ولا لاتساوي الصفر
مثال :

المصفوفات التالية :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

احسب رتبة المصفوفات A, B, C بطريقة Gauss

الحل :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1, L_3 = L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$rg(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\langle (2; -5) \neq 0 \rangle \Leftrightarrow rg(B) = 2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle (2 \neq 0; 0 = 0) \rangle \Leftrightarrow rg(C) = 1$$

المصفوفة المرافقة لتطبيق خطي :

1. المصفوفة المعكوسة (matrice inversible) :

لتكن $A \in \mathcal{M}_n(K)$ مصفوفة مربعة من الدرجة n نقول ان المصفوفة B معكوس (inverse) للمصفوفة A اذا كانت المصفوفة $B \in \mathcal{M}_n(K)$ مربعة و من الدرجة n تحقق :

$$A.B = B.A = I$$

في هذه الحالة نقول ان المصفوفة A قابلة للعكس. ونرمز لمعكوس المصفوفة بالرمز A^{-1}
نظرية :

يكون للمصفوفة المربعة معكوس واحد على الاكثر.

اذن لتكن $A \in \mathcal{M}_n(K)$ مصفوفة مربعة من الدرجة n ونظامية :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) \neq 0$$

ملاحظة :

اذا قبلت المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ مصفوفة معكوسة فهي وحيدة.

تكون المصفوفة $A \in \mathcal{M}_n(R)$ قابلة للعكس اذا كان :

$$\bullet \det(A) \neq 0$$

$$\bullet 0 \text{ ليس قيمة ذاتية للمصفوفة } A \in \mathcal{M}_n(R)$$

مثال :

خواص المصفوفة المعكوسة :

- معكوس مصفوفة الوحدة هي نفسها $I^{-1} = I$
- اذا كان للمصفوفة A معكوس A^{-1} فان للمصفوفة A^{-1} معكوس ولدينا :

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
- اذا كان للمصفوفة B et A معكوس فان للمصفوفة $A.B$ معكوس :

$$(A.B)^{-1} = A^{-1}.B^{-1}$$
- اذا كان للمصفوفة A معكوس A^{-1} فان للمصفوفة A^k معكوس ولدينا :

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$
- اذا كان للمصفوفة A معكوس و كان $r \in R; r \neq 0$ فان للمصفوفة rA معكوس ولدينا :

$$(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$$
- اذا كان للمصفوفة A معكوس فان النظام الخطي يقبل حل وحيد يكون من الشكل :

$$X = A^{-1}.b$$

ملاحظة :

اذا كان

$$\det(A) = 0$$

المصفوفة A لا تقبل معكوس.

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ \ln e^2 & \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \ln e^2 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} \ln e^2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 0$$

المحدد معدوم اذن المصفوفة A لا تقبل معكوس لها.**حساب معكوس مصفوفة (calcul de matrice inversible) :**

لحساب معكوس مصفوفة نتبع الخطوات الاتية :

طريقة المحدد :نحسب محدد المصفوفة : $\det(A)$ نحسب مرافق المصفوفة $com(A)$ (comatrice) :

$$com(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

بحيث :

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

D_{ij} المحددات الجزئية

نحسب منقول المصفوفة المرافقة :

$$com(A)^t = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

النتيجة :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} com(A)^t$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

نحسب المحدد :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = - \left(2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = 6$$

$$\det(A) = 6 \neq 0$$

اذن المصفوفة A تقبل معكوس لها.

خطوة 2 :

نبحث عن المصفوفة المرافقة ل: A

$$com(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

خطوة 3 :

نبحث عن منقول مصفوفة المرافقة :

$$[com(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

خطوة 4 :

حساب منقول مصفوفة :

$$A^{-1} = \frac{[com(A)]^t}{det(A)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

التأكد من صحة النتيجة :

$$A \cdot A^{-1} = I_3$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

طريقة Gauss :

لايجاد معكوس مصفوفة بطريقة Gauss نتبع الخطوات الآتية :

خطوة 1:

نقوم بتشكيل المصفوفة الموسعة (matrice augmentée) والتي هي عبارة عن المصفوفة المراد البحث

عن معكوسها مع مصفوفة الوحدة بالشكل التالي :

$$(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right)$$

خطوة 2 :

نقوم ببعض العمليات الأولية على المصفوفة الموسعة بحيث تصبح من الشكل :

$$(I/A^{-1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & a_{11}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n1}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{array} \right)$$

مثال :

أوجد معكوس المصفوفة A باستعمال طريقة Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

خطوة 1 :

حساب المحدد :

$$\det(A) \neq 0$$

خطوة 2 :

تشكيل المصفوفة الموسعة :

$$(A|I) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$(A|I)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_2 = L_2 - L_1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_1} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \xrightarrow{L_3 = L_3 - 2L_2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \xrightarrow{L_3 = -L_3} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \xrightarrow{L_2 = L_2 - 2L_3} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{L_1 = L_1 - L_3} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= \overrightarrow{L_1 = L_1 - L_2} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right) \right)
\end{aligned}$$

اذن :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

التأكد من صحة النتيجة :

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

خطوة 1 :

حساب المحدد :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3$$

$$\det(A) = -3 \neq 0$$

اذن المصفوفة A تقبل معكوس لها.

خطوة 2 :

تشكيل المصفوفة الموسعة :

$$(A|I) = \left(\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
(A|I) &= \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_1 = L_1 - L_3} \\
&= \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_2 = L_3 - L_2} \\
&= \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_1} \\
&= \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_2 = L_3 - 2L_2} \\
&= \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} L_1 = -L_1 \\ L_2 = -\frac{L_2}{3} \end{matrix}} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_3 = L_3 - L_2} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_3 = -\frac{L_3}{2}} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{L_3 = -\frac{L_3}{2}}
\end{aligned}$$

اذن :

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

تأكد من صحة النتيجة :

$$A.A^{-1} = I_3$$

$$\begin{aligned} A.A^{-1} &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = I_3 \end{aligned}$$