

التطبيقات الخطية

1. تعريف التطبيق الخطي

2. نواة و صورة التطبيق الخطي

3. تباين و تغامر التطبيق الخطي

تعريف التطبيق الخطي :

لكن E و F فضاءين شعاعين على $\mathbb{R}$, نقول أن التطبيق f معرف من E نحو F إذا تحقق الشرطين التاليين :

$$1. \forall x, y \in E \times E, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$2. \forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

كما يمكن دمج الشرطين 1,2 في شرط واحد كما يلي :

$$1. \forall x, y \in E \times E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

ملاحظة :

إذا كان $f(0_E) \neq 0_F$ نقول ان التطبيق غير خطي

تطبيق :

بين هل التطبيقات التالية خطية ام لا

$$1. f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x - y, x + z)$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x - y + 1, x + z - 1)$$

الحل

$$1. f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (2x - y, x + z)$$

نتحقق من الشرط الاول :

$$1. \forall x, y \in E \times E, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall x \in E \Rightarrow (x, y, z), \forall y \in E \Rightarrow (x', y', z')$$

$$f(x + y) = f(x + x', y + y', z + z')$$

$$= (2(x + x') - (y + y'), (x + x') + (z + z'))$$

$$= (2x - y, x + z) + (2x' + y', x' + z') = f(x) + f(y)$$

التحقق من الشرط الثاني :

$$\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad 2.$$

$$\forall x \in E \Rightarrow (x, y, z), \lambda x = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

$$f(\lambda x) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (2\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda z) = \lambda(2x - y, x + z)$$

$$= \lambda f(x)$$

التطبيق 2:

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \neq 0_{\mathbb{R}^2}$$

معناه صورة الصفر لا تساوي الصفر

تطبيق 3:

$$f: R_3[X] \rightarrow R^3$$

$$f(P) = (P(-1), P(0), P(1))$$

1. بين ان f تطبيق خطي

2. هل f تطبيق خطي تقابلي

الحل :

$$\forall p_1, p_2 \in R_3[X] \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$f(\alpha p_1 + \beta p_2) = \alpha p_1 + \beta p_2$$

$$f(\alpha p_1 + \beta p_2) = ((\alpha p_1 + \beta p_2)(-1); (\alpha p_1 + \beta p_2)(0); (\alpha p_1 + \beta p_2)(1))$$

$$= ((\alpha p_1(-1); \alpha p_1(0); \alpha p_1(1)) + (\beta p_2(-1); \beta p_2(0); \beta p_2(1)))$$

$$= \alpha(p_1(-1); p_1(0); p_1(1)) + \beta(p_2(-1); p_2(0); p_2(1))$$

النتيجة :

f تطبيق خطي

f تطبيق خطي تقابلي معناه f متباين + غامر

هل f متباين ؟

$$\ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow f \text{ متباين}$$

تعيين $\ker(f)$:

$$p \in \mathbb{R}_3[X] \Rightarrow a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\{\ker(f) = 0 \Rightarrow p(-1) = 0; p(0) = 0; p(1) = 0$$

$$\begin{cases} a - b + c - d = 0 & (1) \\ a = 0 \\ a + b + c + d = 0 & (2) \\ (1) + (2) = c = 0 \\ -b = d \end{cases}$$

$$p \in \mathbb{R}_3[X] \Rightarrow bx - bx^3 = b(x - x^3)$$

$$\ker(f) = \text{vect}\langle (x - x^3) \neq 0 \rangle$$

$$\dim \ker(f) = 1$$

f ليس تطبيق متباين

هل f غامر؟

$$\text{im}(f) = \mathbb{R}^3$$

من نظرية البعد لدينا

$$\dim \ker(f) + \dim \text{im}(f) = \dim \mathbb{R}^3$$

$$\dim \text{im}(f) = 3 - 1 = 2$$

f ليس تطبيق غامر

نواة تطبيق خطي، التطبيق الخطي المتباين :

تعريف :

ليكن f تطبيق خطي معرف من E نحو F نعرف نواة f ونرمز لها بالرمز $\ker(f)$ مجموعة العناصر من f التي صورها معدومة :

$$\ker(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

ملاحظة 1:

إذا كان f تطبيق خطي معرف من E نحو F إذن $\ker(f)$ هيا فضاء شعاعي جزئي من E

ملاحظة 2:

نقول عن f تطبيق خطي معرف من E نحو F انه متباين اذا و فقط اذا كان :

$$\ker(f) = \{0_E\}$$

مثال:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y, z) = \{(x + y - z), x - z\}$$

1. عين اساس $\ker(f)$

2. هل f متباين

$$\ker(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

$$\begin{cases} (x + y - z) = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x - z = 0 \Rightarrow x = z \end{cases}$$

$$\ker(f) = \left\{ x = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\ker(f) = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\dim \ker(f) = 1$$

$$\text{اذن الشعاع } \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ يشكل اساس لـ } \ker(f)$$

$$\ker(f) = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \neq 0_{\mathbb{R}^3} \text{ لدينا}$$

مثال :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = \{2x + y + z, y - z, x - y\}$$

1. عين اساس $\ker(f)$

2. هل f متباين

$$\ker(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \\ y - z = 0 \Rightarrow y = z \\ x - y = 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$$

$$\ker(f) = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

اذن الشعاع $\text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ يساوي الشعاع المعلوم فهو لا يشكل اساس ل $\ker(f)$

لدينا $0_{\mathbb{R}^3} = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \ker(f)$ اذن f تطبيق متباين .

صورة تطبيق خطي التطبيق الخطي الغامر:

تعريف :

ليكن f تطبيق خطي معرف من E نحو F نعرف صورة f ونرمز لها بالرمز $\text{im}(f)$ مجموعة صور كل الاشعة x في E :

$$\text{im}(f) = \{f(x) / x \in E\} = \{\forall y \in F, \exists x \in E y = f(x)\}$$

ملاحظة:

نقول عن التطبيق انه غامر اذا فقط اذا كان :

$$\text{im}(f) = F$$

نظرية:

ليكن $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ قاعدة معيارية كيفية من الفضاء E صورة $\text{im}(f)$:

$$\text{im}(f) = \langle f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p) \rangle$$

مثال :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x, y, z) = \{x - y, y + z, x + z\}$$

1. عين صورة و اساس $\text{im}(f)$

2. هل f غامر

الحل :

$$\text{im}(f) = \{f(x) / x \in E\}$$

$$im(f) = vect \langle f(e_1), f(e_2) \dots \dots \dots f(e_p) \rangle$$

$$im(f) = vect \langle \mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

نلاحظ ان $\mathcal{V}_1$ و $\mathcal{V}_2$ مرتبطين خطيا :

اذن اساس f هو :

$$\mathcal{B} \sim vect \langle \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

بما ان $\mathcal{V}_2$ و $\mathcal{V}_3$ مستقلان خطيا فهما يشكلان اساس

$$dim(im(f)) = 2$$

لدينا : $im(f) = 2 \neq 3$

اذن f ليس غامر

مثال :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y, z) = \{-2x + y + z, x - 2y + z\}$$

1. بين ان f تطبيق خطي

2. عين اساس $ker(f)$ و استنتج بعده

3. عين اساس صورة f

الحل :

$$ker f = \{x \in E / f(x) = 0_F\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = z \\ -3x + 3y = 0 \Rightarrow x = y \end{array} \right\}$$

$$ker(f) = \{(x, y, z), x(\quad)\}$$

$$ker(f) = vect \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

ملاحظة :

كيف نميز بين التطبيق الخطي الغامر و المتباين؟

لكن E و F فضاءين شعاعيين منتهي البعد لنفرض ان $\dim(E) = n$; $\dim(F) = m$

ليكن تطبيق f خطي معرف من E نحو

$$1. \text{ } f \text{ متباين } \Leftrightarrow \text{rang}(f) = n$$

$$2. \text{ } f \text{ غامر } \Leftrightarrow \text{rang}(f) = m$$

$$3. \text{ } f \text{ تقابلي } \Leftrightarrow f \text{ غامر } \Leftrightarrow f \text{ متباين}$$

تركيب تطبيقين خطيين:

ليكن $E, F, \text{ et } G$ فضاءات شعاعية التطبيق الخطي $f \circ g$ معرف كما يلي :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$g \circ f$$

$$g \circ f: E \rightarrow G$$

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

مثال :

ليكن g و f تطبيقين خطيين معرفين كما يلي :

$$f: E \rightarrow F$$

$$g: F \rightarrow G$$

1. بين ان $g \circ f: E \rightarrow G$ تطبيق خطي ؟

مثال:

ليكن $F: R^3 \rightarrow R^2$ و $G: R^2 \rightarrow R^2$ تطبيقات خطية معرفة كما يلي :

$$F(x, y, z) = (2x, y + z)$$

$$G(x, y) = (y, x)$$

1. عين $G \circ F$ و $F \circ G$

الحل :

$$(G \circ F)(x, y, z) = G(F(x, y, z)) = G(2x, y + z) = (y + z, 2x)$$

التطبيق $F \circ G$ غير ممكن لان

رتبة جملة اشعة و رتبة تطبيق خطي :

لتكن مجموعة الاشعة $\mathcal{S} = \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_p\}$ جملة من الفضاء الشعاعي E

نسمي رتبة الجملة $\mathcal{S}$ بعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بـ $\mathcal{S}$ اي :

$$\text{rang}(\mathcal{S}) = \dim(\text{vect}(\mathcal{S}))$$

ايزومورفيزم الفضاءات الشعاعية :