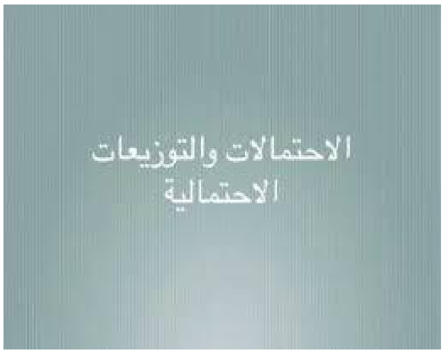
الإحصاء الرياضي

التوزيعات الإحتمالية

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

طلبة السنة الأولى جذع مشترك



الأستاذة غيدة فوزية

29/04/2019

قائمة المحتويات

مقدمة

يتميز متغير عشوائي بدالة (تابع) الاحتمال أو ما يسمى بالتوزيع الاحتمالي. سنحاول من خلال هذا الفصل استنتاج علاقة رياضية تسمح لنا بالحصول على احتمال اي قيمة من قيم المتغير العشوائي دون اللجوء الى المجموعة الأساسية S.

I

قوانين التوزيع الاحتمالي في حالة متغير العشوائي المتقطع

يوجد عدة قوانين التوزيع الاحتمالي في حالة متغير عشوائي متقطع نذكر منها:

آ. قانون توزيع برنولي

نقول أن X المتغير العشوائي المتقطع يتبع قانون توزيع برنولي اذا كانت للتجربة المتعلقة بهذا المتغير نتيجتين ممكنتين.

مثلا: رمي قطعة نقود بها حالتين (P/F)، سبر الآراء (نعم/لا)، سحب منتوج من منتجات ألة معينة (فاسد/صالح).

فنلاحظ من خلال الامثلة بأن احدى النتيجتين هي معاكسة للأخرى. فالقيم التي يأخذها x_i في حالة النجاح هي 1 و في حالة الخسارة هي 0 حيث:

$P(X=0)=q,\ P(X=1)=p\ \Omega\ \{0,1\} =$

يستعمل قانون برنولي عندما نقوم بالتجربة مرة واحدة $(n=1)$.

لنفرض تجربة العشوائية E ذات نتيجتين ممكنتين، نسمي النتيجة الاولى "حادث النجاح" او الحادث A و نسمي النتيجة الثانية "حادث الفشل" أو الحادث $\bar{A}$، فان احتمال النجاح هو p حيث: $P(A)=1/2=p$

و عليه فان احتمال الفشل هو q حيث$q= P(A\ \square)=1-1/2=1/2$

$q=1-p$

مثالـ : مثال 1

عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فان احتمال ظهور الوجه هو $p=1/2$ و احتمال ظهور الظهر $q=1/2$.

و لكن هل يمثل قانون توزيع برنولي قانون توزيع الاحتمالات؟

نقول أن X يتبع قانون توزيع احتمالات اذا كان:

$$\sum_{(i=1)}^{n} P(X=xi)=1$$

فرنسية

1. المميزات العددية لقانون التوزيع برنوالي

1) التوقع الرياضي

انطلاقا من العلاقة التعريفية للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي المتقطع فان:

$$E(X)=\sum_{(x=0)}^{1} [\![xi.P(X=xi)=O.P(X=0)+1.P(X=1)=p]\!]$$

فرنسية

2) التباين

تعطى علاقة التباين بالشكل التالي:

$$v(x)=E(X^2)-E(X)^2$$

فرنسية

حيث:

$$E(X^2)=\sum_{(x=0)}^{1} [\![\; [\![xi]\!]^{2.} P(X=xi)=0^{2.} P(X=O)+1^{2.} P(X=1)=p]\!]$$

فرنسية

ومنه:

$$v(X)=p-p^2=p(1-p)=pq$$

فرنسية

ب. قانون توزيع الثنائي (او ثنائي الحدين)

نطبق قانون توزيع الثنائي عندما نكرر تجربة برنولي n مرة، حيث ان n عدد صحيح موجب مع ثبات قيمة p (التي تعتبر احتمال النجاح) مهما أعيدت التجربة أي أن الحوادث تكون مستقلة (شرط من شروط برنولي).
الصيغة العامة التي يعطى بها تابع الاحتمال للمتغير العشوائي X هي :

$$P(X=x)=C_n^x p^x q^{(n-x)}$$

فرنسية

تسمى هذه العلاقة بقانون التوزيع الثنائي.
حيث:
n: تمثل عدد مرات انجاز التجربة حيث (n=1→30)
x: تمثل قيمة من قيم المتغير العشوائي و أعظم قيمة لها هي n
p: تمثل احتمال حادث النجاح
q: تمثل احتمال حادث الفشل (P-1)

نرمز للمتغير العشوائي المتقطع X الذي تابع احتماله f(x) و يتبع التوزيع الاحتمالي الثنائي بالرمز : (X~B(n,p

مثـال : مثال

في تجربة القاء قطعة نقد غير متوازنة. ما هو احتمال الحصول على الظهر (F) 8 مرات عند 20 رمية، اذا علم أن P(F)=0,4 , P(P)=0,6

الحل: q=0,6 , p=0,4 , x=8 , n=20

حسب المعطيات: (X~B(20,0,4

بتطبيق قانون توزيع الثنائي:

$$P(X=8)=C_{(n=20)}^{(x=8)} P^{(x=8)} Q^{(20-8)}=C_{(20)}^{8} 〚 0,4 〛^{8} 〚 0,6 〛^{12}=0,1797$$

فرنسية

ملا_حظة : ملاحظة 1

في بعض قد يصعب علينا حساب احتمال المتغير العشوائي X من اجل قيمة معينة، و لذلك تم تقديم جداول احصائية تؤدي هذا الغرض من اجل قيم مختلفة لـــ n, x, p .

نصيحـة : ملاحظة 2

نستعمل توزيع ثنائي الحدين (أو الثنائي) لما تكون n≤30.

نصيحـة : ملاحظة 3

حتى يكون التوزيع ثنائي الحدين توزيعا احتماليا يجب أن يكون مجموع احتمالاته تساوي 1 أي

$$\sum_{(x=0)}^{n} 〚 P(X=x)=1 \Rightarrow \sum_{(x=0)}^{n} 〚 C_{(n)}^{x} p^{x} q^{(n-x)} 〛 =1 〛$$

فرنسية

1. المميزات العددية للتوزيع ثنائي الحدين

1) التوقع الرياضي

$$E(X)=n.p$$

فرنسية

2) التباين

$$V(X)=npq$$

فرنسية

3) معامل التماثل

$$\propto = 3 + (p - q) / \sqrt{npq}$$

فرنسية

0 =∝

حالة تماثل ضعيف لما ∝ تبعد عن 0 ∝< 0

0 >∝

4) معامل التطاول

$$\beta = 3 + (1 - pq) / npq$$

فرنسية

حالة اعتدال لما يكون $\beta=3$

حالة تطاول لما يكون $\beta>3$

حالة تفلطح لما يكون $\beta<3$

ب. قانون توزيع بواسون

ان هذا القانون يهتم بالظواهر التي لها حالتين متنافيتين تحقق الحادث أو عدم تحققه، كما رأيناه سابقا في قانون التوزيع الثنائي و لكن في هذا القانون يشترط فيه:

عدد التجارب التي تقوم بها يكون كبير جدا أي $(n>30)$،

احتمال النجاح (p) يكون جد صغير حيث $(n.p<5)$

و الصيغة القانونية لتوزيع بواسون تعطى على النحو التالي:

$$P(X = x) = (\lambda^{x} e^{(-\lambda)}) / x!$$

فرنسية

حيث: $\lambda = n.p$

x : تمثل قيمة من قيم المتغير العشوائي

$e=2,7181$

نرمز للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون بالرمز:

$x \sim p(\lambda$

1. حالات استخدام توزيع بواسون

لتوزيع بواسون استخدامات و تطبيقات واسعة في مجالات عديدة حيث يسمح لنا هذا بإيجاد احتمال عدد من النجاحات خلال فترة زمنية معينة، نذكر منها:

- عدد حوادث المرور على طريق معين.
- عدد الزبائن الذين يترددون على محل ما خلال فترة زمنية.
- عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها موزع هاتفي خلال فترة زمنية.

- عدد الوحدات الفاسدة في حصة انتاجية معينة.

ملاحظة : ملاحظة 1

لكي يكون قانون بواسون توزيعا احتماليا يجب أن يكون:

$$\sum P(X=xi)=\sum(\lambda^{x} \llbracket e \rrbracket^{(-\lambda)})/x!=1$$

فرنسية

ملاحظة : ملاحظة 2

ستطيع استعمال جدول قانون بواسون لتسهيل عملية الحساب مع استعمال العوامل التالية:λ ،x،

2. المميزات العددية للتوزيع بواسون

1) التوقع الرياضي

$$E(X)=\lambda=n.p$$

فرنسية

2) التباين

$$V(X)=\lambda=n.p$$

فرنسية

3) معامل التماثل

$$\propto=1/\sqrt{\lambda}$$

فرنسية

∝= 0

∝> 0

4) معامل التطاول

$$\beta=3+\alpha$$

فرنسية

- حالة اعتدال لما يكون β=3
- حالة تطاول لما يكون β>3

II

قوانين التوزيع الاحتمالي في حالة المتغير العشوائي المستمر

آ. قانون التوزيع الاسي

ليكن ʎ ϵ |R و مع ʎ>0 ، نقول عن X متغير عشوائي انه يتبع التوزيع الاسي ذو معلمة ʎ و كثافة احتمالية معرفة كما يلي:

$$f(x)=\lambda . e^{(-\lambda x)}, x \geq 0$$

فرنسية

و نرمز له بـــــ X~ε(ʎ)

ملاحظة : ملاحظة 1

القانون الأسي يستخدم في دراسة مدى حياة القطع المصنعة، اوقات الانتظار و كذا الخدمات.

ملاحظة : ملاحظة 2

X متغير عشوائي يتبع التوزيع الاسي و دالته الاحتمالية f(x)). من اجل ان تكون هذه الدالة تابع كثافة احتمالية يجب:

$$\int_0^{(+\infty)} f(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_0^{(+\infty)} \lambda e^{(-\lambda x)}\,dx=1 \Rightarrow \left[[\![-e]\!]^{(-\lambda x)} \right]_0^{(+\infty)}=1 \Rightarrow \left([\![-e]\!]^{(-\lambda \infty)}+e^{(-\lambda 1)} \right)=0+1=1$$

فرنسية

1. مميزات العددية لقانون التوزيع الاسي

1) التوقع الرياضي

$$E(X)=1/\lambda$$

فرنسية

2) التباين

$$V(X)=1/\lambda^2$$

فرنسية

2. قانون التوزيع الطبيعي

يعتبر قانون التوزيع الطبيعي من اهم التوزيعات المستخدمة، و هو خاص بالمتغيرات العشوائية المستمرة، و هذا القانون يعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$f(x)=1/(\delta\sqrt{2\pi})e^{(-1/2((x-m)/\delta)^2)}$$

فرنسية

حيث:

m: يمثل التوقع الرياضي لـ x

δ^2: تباين المتغير العشوائي لــ x

e : ثابت و =2,718

π: ثابت و=3,14

x: المتغير العشوائي

يتفحص هذا القانون يتضع انه يحتوي على معلمتين مجهولتين هما m و δ، لذلك يقال عن التوزيع الطبيعي أنه معرف بهاتين المعلمتين، و المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي يرمز له

X~N(m,δ

ب. العلاقة بين التوزيعات الاحتمالية الثلاث (توزيع ثنائي الحدين، توزيع بواسون و توزيع طبيعي)

1. العلاقة بين توزيع ثنائي الحدين و توزيع بواسون

يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين الى توزيع بواسون اذا كان عدد المحاولات 50 على الاقل (n≥50) و n.p<5 أي (p تكون قريبة من الصفر و q=(1-p) قريبة من 1، و هذا الحدث يعتبر حدثا نادرا.

2. العلاقة بين توزيع ثنائي الحدين و توزيع الطبيعي:

اذا كانت n كبيرة جدا و اذا كانت p و q ليس قريبين من الصفر فان توزيع ثنائي الحدين يمكن تقريبه بصورة جيدة بالتوزيع الطبيعي ذي المتغير المعياري المعطى: $z=(x-np)/\sqrt{npq}$

يكون التقريب أكثر دقة كلما زادت n و عند الملانهاية تصبح العلاقة مضبوطة. حيث انه عندما تزيد n فان التواء و تفرطح توزيع ثنائي الحدين يقترب من التوزيع الطبيعي.

من الناحية العملية فان التقريب يعد جيدا اذا كان كل من $n.p$ و $n.q$ أكبر من 5.

3. العلاقة بين توزيع بواسون و توزيع الطبيعي

و بنا ان هناك علاقة بين توزيع ثنائي الحدين و توزيع الطبيعي فانه يمكن أن نبين ان التوزيع بواسون يقترب من التوزيع الطبيعي ذي المتغير المعياري التالي: $z=(x-\lambda)/\sqrt{\lambda}$

حيث: λ تكون كبيرة جدا و تؤول الى مالانهاية.

III

شعبة