Chapitre III: Travail et Energie

III.1. Introduction :

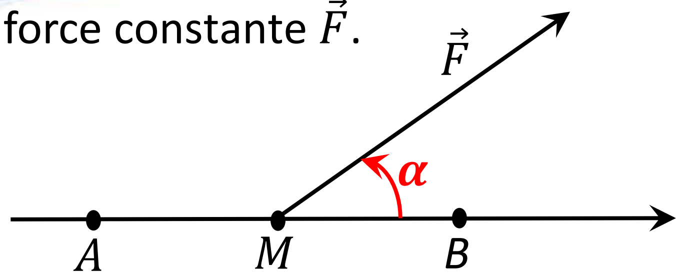
Si on connait les positions et la vitesse des particules d'un système et toutes les forces agissant sur ces particules, on peut prévoir, à l'aide des lois de Newton, l'évolution de ce système au cours du temps. Mais dans la pratique, on ne peut pas connaitre toujours toutes les forces qui entre en jeu et même si c'est le cas, les équations à résoudre sont trop nombreux ou trop compliqué. Pour cette raison, en faisant appel à des nouvelles notions telles que « le travail et énergie ».

III.2. Travail d'une force :

III.2.1. Force constante sur un déplacement rectiligne:

- On dit qu'une force travaille lorsque son point d'application se déplace.
- Une force est dite constante lorsque la valeur, le sens et la direction de cette force ne changent pas au cours du temps.

- « *M* » se déplace entre les points A et B sous l'effet d'une force constante $\vec{F}$.

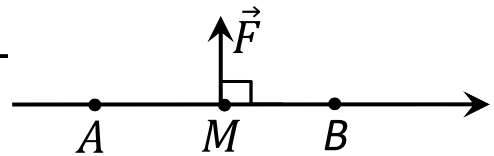


- Par définition, le travail de la force $\vec{F}$ sur le déplacement rectiligne AB est donné par :

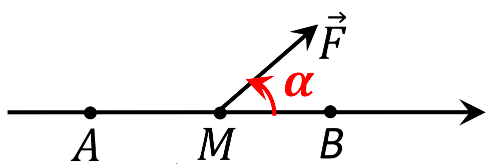
$$W_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB\cos\alpha \qquad ([W] = Joule)$$

Remarques:

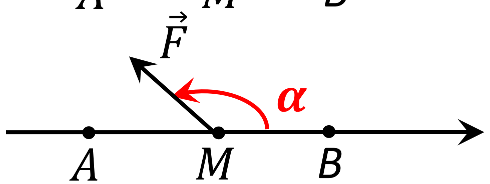
1 –



$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_{\vec{F}} = 0$$: $\vec{F}$ ne travaille pas



$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow W_{\vec{F}} > 0$$: Travail moteur



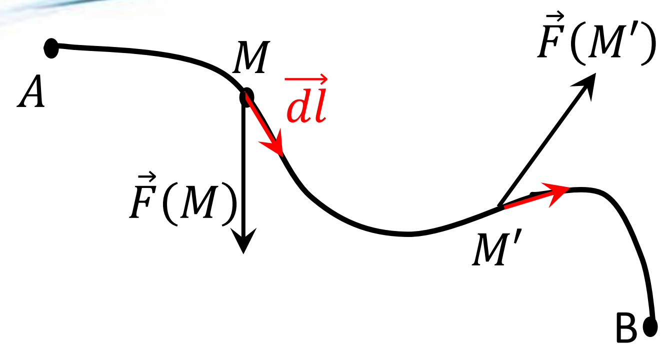
$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow W_{\vec{F}} < 0$$: Travail résistif

2– cas d'un ensemble de Forces $\vec{F}_i$ subissent le même déplacement $\overrightarrow{AB}$**:**

$$W_{\vec{F}_i} = \vec{F}_1\overrightarrow{AB} + \vec{F}_2\overrightarrow{AB} + \vec{F}_3\overrightarrow{AB}\ldots\ldots+\vec{F}_n\overrightarrow{AB}$$

III.2.2. Travail élémentaire:

- Quand la force $\vec{F}$ varie au cours de déplacement:



Par définition, le travail élémentaire est donné par :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl} \qquad \Longrightarrow W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

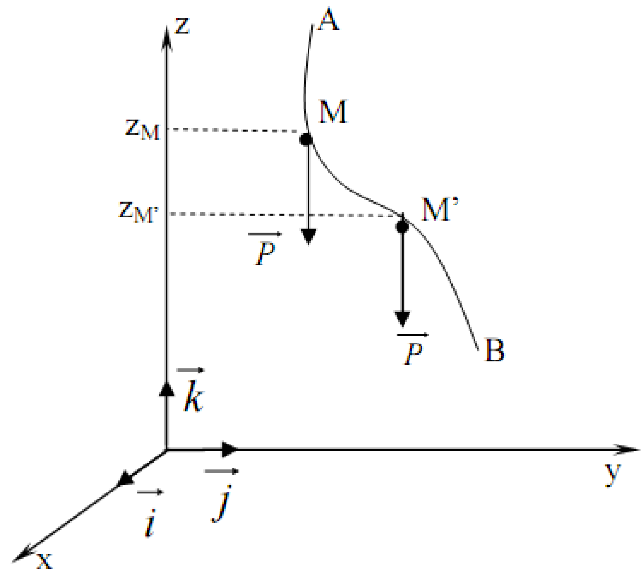
En coordonnées cartésiennes: $dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

III.2.3. Travail de la force de pesanteur:

$$W_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P}.\overrightarrow{dl}\,, \qquad \vec{P} = -P\vec{k}\,, \quad \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{\jmath}$$

$$\Longrightarrow W_{\vec{P}} = \int_M^{M'} -P.dz \;= -P(Z_{M'} - Z_M)$$

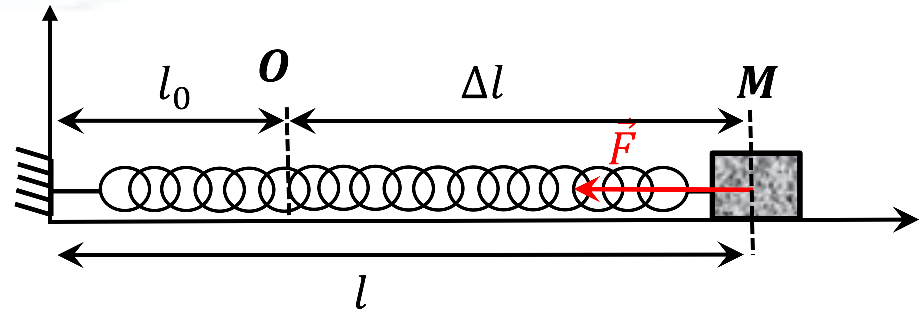
Soit : $h = Z_M - Z_{M'}$ $\boxed{\Longrightarrow W_{\vec{P}} = Ph = mgh}$



III.2.4. Travail d'une force élastique:

- $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} = -k(l - l_0)\vec{\imath} = -kx\vec{\imath}$
- $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath}$

$$\Longrightarrow W = \int \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int -kx\vec{\imath}.dx\vec{\imath} = -k\int xdx$$



Lorsque $\vec{F}$ passe de la position x_1 à x_2, on a : $\boldsymbol{W = -k\int_{x_1}^{x_2} xdx = -\frac{1}{2}k({x_2}^2 - {x_1}^2)}$

III.2.5. Puissance d'une force:

- ❑ Puissance moyenne: $P_{moy} = \dfrac{\Delta W_{\vec{F}}}{\Delta t}$
- ❑ Puissance instantanée: $P_{inst} = P(t) = \dfrac{dW_{\vec{F}}}{dt}$

$([\boldsymbol{P}] = \boldsymbol{Watt})$

La puissance d'une force $\vec{F}$ dans un intervalle de temps dt parvient à mouvoir un mobile de la distance dl peut s'écrire:

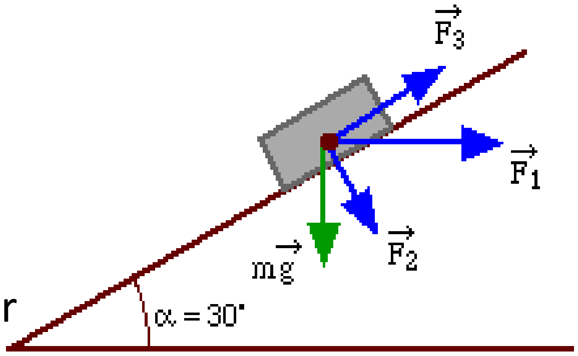
$$P(t) = \frac{dW_{\vec{F}}}{dt} = \frac{\vec{F}.\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F}.\frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{V}$$

Exercice:

Un bloc de pierre se déplace vers le haut sur un plan incliné à 30° sous l'action de plusieurs forces dont : ***F1=45 N*** horizontale,

F2=25 N normale au plan incliné

F3=35 N parallèle au plan incliné.



On considérera que toutes les forces agissant sur le bloc ont leur point d'application au centre de masse G du bloc.

Calculer le travail des forces F1,F2 et F3 lorsque le bloc monte de1,5 m sur le plan incliné (longueur mesurée sur la ligne de plus grande pente).

Solution:

1- $W_1 = \vec{F}_1 . \overrightarrow{AB} = F_1 . AB . cos\alpha = 45.1,5 . cos30 = 58,46J$

2- $W_2 = \vec{F}_2 . \overrightarrow{AB} \quad \left(\vec{F}_2 \perp \overrightarrow{AB}\right) \Rightarrow W_2 = 0$

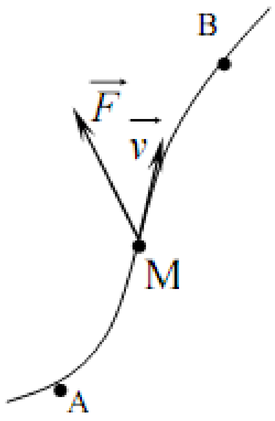
3- $W_3 = \vec{F}_3 . \overrightarrow{AB} \left(\vec{F}_2 \parallel \overrightarrow{AB}\right) \Rightarrow W_2 = F_3 . AB = 35.1,5 = 52,5J$

III.3. Energie

III. 3.1. Energie cinétique

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel *M*, de masse *m* et animé avec une vitesse V , par la grandeur E_c , telle que :

$$E_C = \frac{1}{2} m V^2$$



- Soit un point matériel *M*, de masse *m*, se déplace entre les points *A* et *B* sous l'action d'une force extérieure $\vec{F}$.

Selon le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \Longrightarrow \vec{F} = m\frac{\overrightarrow{dV}}{dt}$$

Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est donnée par:

$$dW_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = m\frac{\overrightarrow{dV}}{dt}.\vec{V}dt \quad \left(\text{car } \vec{V} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} \Longrightarrow \overrightarrow{dl} = \vec{V}dt\right)$$

$$\Longrightarrow dW_{\vec{F}} = m\frac{\overrightarrow{dV}}{dt}.\vec{V}dt = mVdV = d\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = dE_C$$

Donc le travail effectué entre A et B est donnée par:

$$W_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B dE_C = E_C(B) - E_C(A)$$

<u>Théorème de l'énergie cinétique:</u>

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position *A* et une autre position *B* est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points:

$$\boldsymbol{\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A\rightarrow B}\left(\vec{F}_{ext}\right)}$$

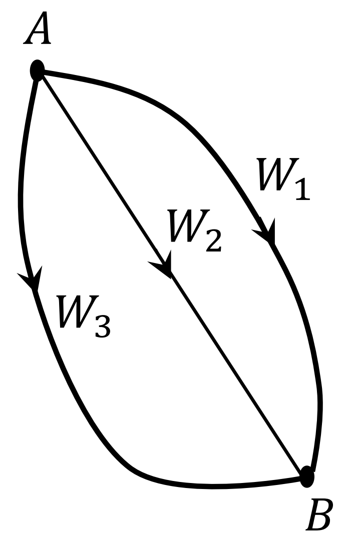
III.3.2. Forces conservatives et forces non conservatives:

- Les forces sont dites conservatives lorsque:

1- Leur travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée.

A titre exemple :

d'après la figure ci-contre : $W_1(A \rightarrow B) = W_2(A \rightarrow B) = W_3(A \rightarrow B)$



2- le travail total sur un chemin fermé (soit un aller et retour) est nul.

$$W(A \rightarrow A) = W_1(A \rightarrow B) + W_3(B \rightarrow A) = 0$$

Exemples des forces conservatives :

Les forces gravitationnelles, les forces élastique, les forces de pesanteur……

- Les forces sont dites non conservatives lorsque leur travail dépend du chemin suivi.

Exemple des forces non conservatives : Forces de frottement.

III. 3.1. Energie Potentielle:

L'énergie potentielle d'un corps ou d'un système physique est l'énergie qui y est présente et qui a le potentiel de se transformer en énergie cinétique.

$\Longrightarrow$ On définie l'énergie potentielle E_P comme étant la quantité d'énergie qu'il faut ajouter à l'énergie cinétique E_C pour que leur somme soit constante:

$$E_C + E_P = Cte$$

- Pour un déplacement produisant une variation d'énergie cinétique ΔE_C, la variation correspondante d'énergie potentielle ΔE_P peut donner par :

$$\Delta E_P = E_P(B) - E_P(A) = -\Delta E_C = -W_{A\to B}\left(\vec{F}_C\right)$$

Avec $\vec{F}_C$ est une force conservative

$$\Longrightarrow \Delta E_P = -\int_A^B \vec{F}_C . \overrightarrow{dl}$$

En utilisant la notion du travail élémentaire dW :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl} \Longrightarrow dE_P = -\vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

On a:

$$1\text{-} \begin{cases} \vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k} \\ \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k} \end{cases} \Longrightarrow \vec{F}.\overrightarrow{dl} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$2 - \ dE_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz \quad \text{(differentielle totale d'une fonction)}$$

$$dE_P = -\vec{F}.\overrightarrow{dl} \ \Longrightarrow \frac{\partial E_P}{\partial x}dx + \frac{\partial E_P}{\partial y}dy + \frac{\partial E_P}{\partial z}dz = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

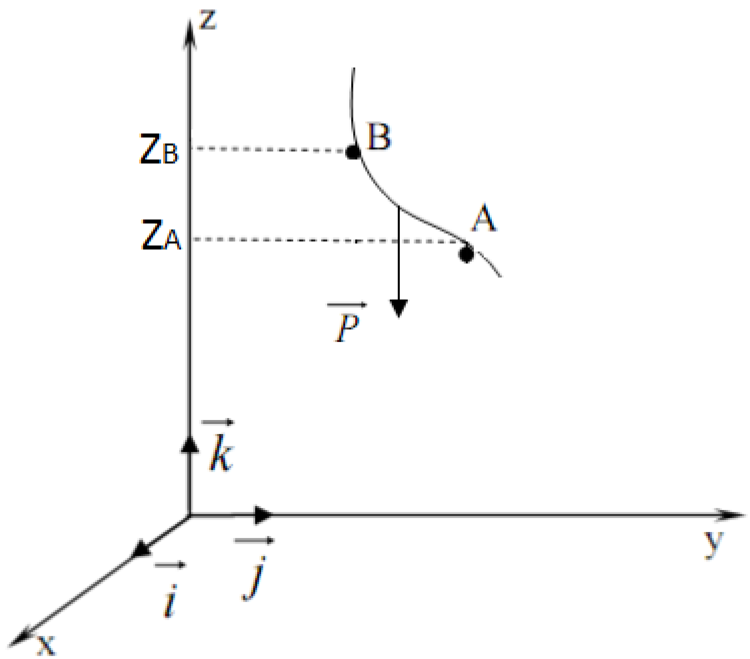
$$\Longrightarrow \begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_P}{\partial x} \\ F_y = -\dfrac{\partial E_P}{\partial y} \\ F_z = -\dfrac{\partial E_P}{\partial z} \end{cases} \Longrightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P$$

III. 3.1.1. Energie Potentielle de la force de pesanteur:

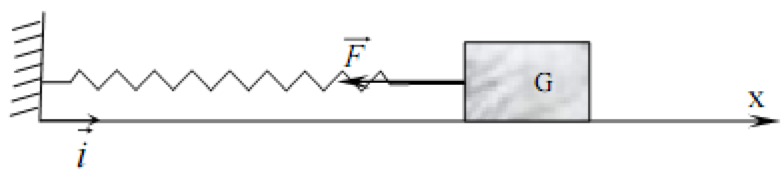
$$\Delta E_P = E_P(B) - E_P(A) = -\int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

$$\vec{F} = \vec{P} = -mg\overrightarrow{k}\ ; \quad \overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$\Delta E_P = \int_A^B mgdz \ = mg(Z_B - Z_A) = mgh$$



III. 3.1.2. Energie Potentielle d'une force élastique:

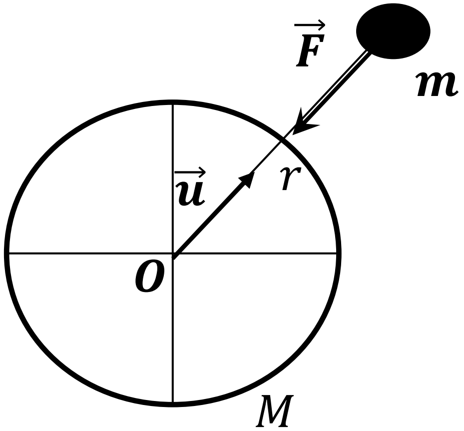


$$\vec{F} = -kx\vec{\imath}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_P = -\frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{\imath} \quad \Longrightarrow \frac{dE_P}{dx} = kx$$

$$E_P = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + Cte$$

III. 3.1.3. Energie Potentielle d'une force gravitationnelle:



$$\vec{F}(r) = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r} \qquad \left(\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}\right)$$

$$\vec{F}(r) = -\overrightarrow{grad}E_P(r) = -\frac{dE_P(r)}{dr}\vec{u} \Longrightarrow \frac{dE_P(r)}{dr} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\Longrightarrow dE_P(r) = \frac{GMm}{r^2}dr$$

$$\boxed{\Longrightarrow E_P(r) = \int \frac{GMm}{r^2}dr = -\frac{GMm}{r} + Cte}$$

III.3.2. Energie mécanique

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatives et non conservatives. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_C) + \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

Avec :$\vec{F}_C$: Force conservative et $\vec{F}_{NC}$: Force non conservative

On a : $\sum W_{A\to B}(\vec{F}_C) = -(E_P(B) - E_P(A))$

$$\Longrightarrow E_C\ (B) - E_C(A) = -(E_P(B) - E_P(A)) + \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

$$\Longrightarrow (E_C(B) + E_P(B)) - (E_C(A) + E_P(A)) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})$$

- $\boldsymbol{E_C + E_P = E}$: **appelée "Energiemécanique (totale)"**

$$\boxed{\Longrightarrow \boldsymbol{E(B) - E(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})}}$$

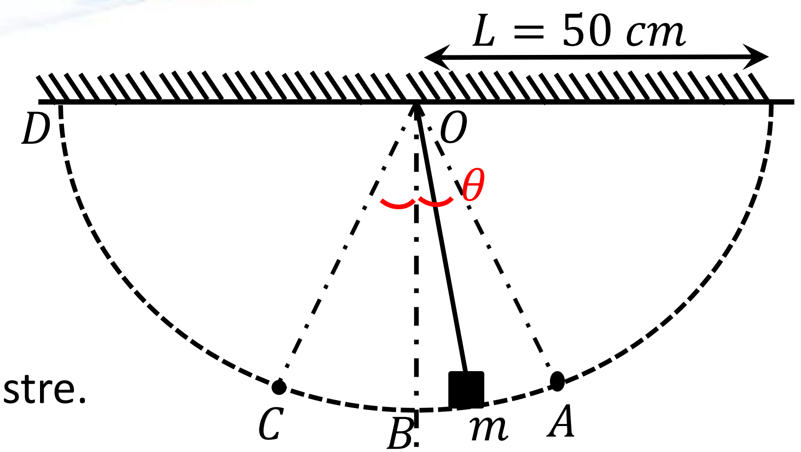
<u>Théorème de l'énergie mécanique</u>

La variation de l'énergie mécanique d'un système, en mouvement entre deux points *A* et *B*, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatives appliquées à ce système

$$\boldsymbol{E(B) - E(A) = \sum W_{A\to B}(\vec{F}_{NC})}$$

Cependant, lorsque le système est isolé (c'est dire, il ne subit aucune force extérieure non conservative) l'énergie mécanique se conserve $\Longrightarrow \Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$.

Exercice:



Un petit objet de masse m modélisé par un point est pendu au bout d'un fil inextensible de longueur L dont l'autre extrémité est fixée à un support (voir la figure). On fait l'étude dans le référentiel terrestre.

L'angle initial est $\theta = 20°$, la longueur L = 50 cm.

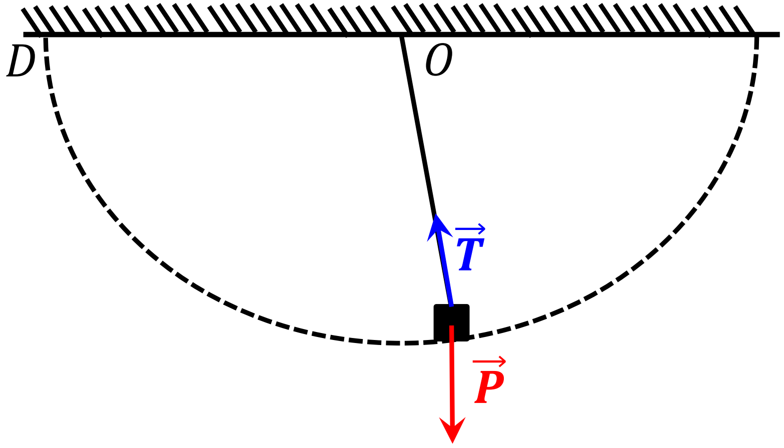
a. Tracer le bilan des forces qui s'exercent sur l'objet.

b. On lâche l'objet du point *A*. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer sa vitesse V_B au point *B* en fonction de *g*, *L* et , puis la calculer.

c. Quelle est sa vitesse au point *C* ?

d. On lance maintenant l'objet du point *A* avec une vitesse $\vec{V}_A$ tangente au cercle, vers la gauche. Exprimer la valeur minimale de la norme V_A pour que l'objet aille jusqu'au point *D* en fonction de *g*, *L* et . La calculer.

Solution:



a. Poids de l'objet $\vec{P}$ et tension du fil $\vec{T}$

b. En *A*, la vitesse étant nulle $E_C(A) = 0\ J$.

En *B* l'énergie cinétique est $E_c(B) = \frac{1}{2} m {V_B}^2$

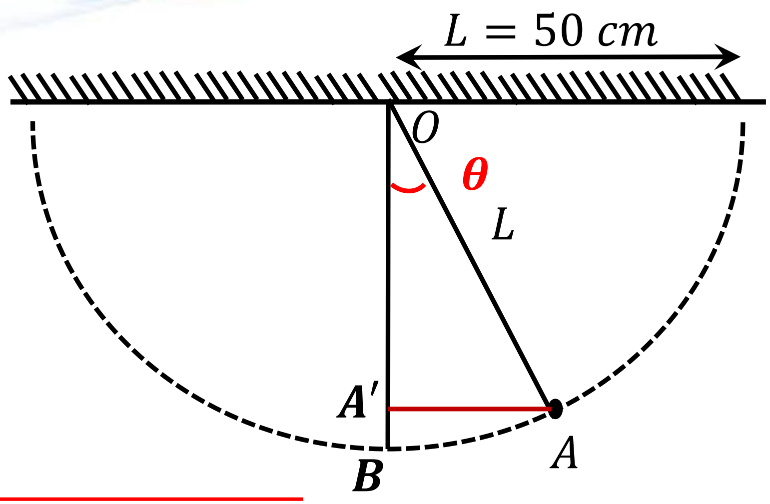
En appliquant le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum W_{A\to B}\left(\vec{F}_{ext}\right) = W_{A\to B}\left(\vec{T}\right) + W_{A\to B}\left(\vec{P}\right)$$

- La tension du fil $\vec{T}$ est perpendiculaire à la trajectoire son travail est toujours nul.
- Le poids $\vec{P}$ est une force conservative, son travail ne dépend que des positions de départ et d'arrivée, et donc de la différence d'altitude *h* entre le point *A* et le point *B*.

$$h = A'B = OB - OA' = L - L\cos\theta$$

$$\Longrightarrow h = L(1 - \cos\theta)$$



$$\boldsymbol{\Delta E_C = E_C(B) - 0 = W_{A \to B}(\vec{P})}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} m V_B{}^2 = mgh = mgL(1 - \cos\theta)$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow V_B = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)} = \sqrt{2.9,8.0,5(1-\cos 20°)} = 0,77 m/s}$$

C. Le point *C* est à la même hauteur que le point *A*, si aucune énergie est perdue, l'objet est en *C* avec une vitesse nulle, toute l'énergie mécanique est groupée dans l'énergie potentielle.

D. l'objet atteint le point D avec une vitesse nulle

Appliquant le principe de conservation de l'énergie mécanique entre A et D

$$\Delta E_m = 0 \Longrightarrow E_m(D) - E_m(A) = 0$$

$$\Longrightarrow (E_C(D) + E_P(D)) - (E_C(A) + E_P(A)) = 0$$

$$\begin{cases} E_C(D) = 0 \\ E_P(D) = mgL \\ E_C(A) = \dfrac{1}{2} m {V_A}^2 \\ E_P(A) = mgL(1 - cos\theta) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow mgL = \frac{1}{2} m {V_A}^2 + mgL(1 - cos\theta) = \frac{1}{2} m {V_A}^2 + mgL - mgLcos\theta$$

$$\boxed{\Longrightarrow \boldsymbol{V_A = \sqrt{2gLcos\theta} = 3\ m/s}}$$