- طريقة التحليل بالمركبات الأساسية المرجحة (ACP normé) -

مثال : لتكن لدينا المعطيات المتعلقة بثلاث متغيرات ذات وحدات قياس مختلفة والمتعلقة بأربعة أفراد :

الأفراد / المقياس	X_1	X_2	X_3
A	50	5	1
B	43	6	3
C	62	7	2
D	30	8	3

- باستخدام طريقة ACP، حلل معطيات الجدول .
- مثل بيانيا الأفراد والمتغيرات في المستوي الأكبر كثافة . اشرح النتائج .

* تعطى القيم الذاتية كما يلي : $\lambda_1 = 2,12$ ، $\lambda_2 = 0,61$ ، $\lambda_3 = 0,27$

والأشعة الذاتية كما يلي : $u_1 = \begin{pmatrix} -0,54 \\ 0,56 \\ 0,63 \end{pmatrix}$ ، $u_2 = \begin{pmatrix} 0,76 \\ 0,64 \\ 0,07 \end{pmatrix}$ ، $u_3 = \begin{pmatrix} 0,36 \\ -0,52 \\ 0,78 \end{pmatrix}$

1/ حساب المتوسطات الحسابية والإنحرافات المعيارية :

المتوسط الحسابي : $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ ، الإنحراف المعياري : $\sigma_j = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}$

	X_1	X_2	X_3	① $(X_1-\bar{X}_1)$	② $(X_2-\bar{X}_2)$	③ $(X_3-\bar{X}_3)$	$(X_1-\bar{X}_1)^2$	$(X_2-\bar{X}_2)^2$	$(X_3-\bar{X}_3)^2$	①×②	①×③	②×③
A	50	5	1	3,75	-1,5	-1,25	14,06	2,25	1,56	-5,62	-4,68	1,87
B	43	6	3	-3,25	-0,5	0,75	10,56	0,25	0,56	1,62	-2,43	-0,37
C	62	7	2	15,75	0,5	-0,25	248,06	0,25	0,06	7,87	-3,93	-0,12
D	30	8	3	-16,25	1,5	0,75	264,06	2,25	0,56	-24,37	-12,18	1,12
$\sum$	185	26	9				536,75	5	2,75	-20,5	-23,25	2,5
$\bar{X}$	46,25	6,5	2,25									
σ	11,58	1,11	0,82									

2/ حساب المصفوفة $\hat{X}_{ij}$:

مصفوفة إحداثيات الأفراد

حيث : $\hat{x}_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{\sigma_j}$

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \frac{3,75}{11,58} & \frac{-1,5}{1,11} & \frac{-1,25}{0,82} \\ \frac{-3,25}{11,58} & \frac{-0,5}{1,11} & \frac{0,75}{0,82} \\ \frac{15,75}{11,58} & \frac{0,5}{1,11} & \frac{-0,25}{0,82} \\ \frac{-16,25}{11,58} & \frac{1,5}{1,11} & \frac{0,75}{0,82} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,32 & -1,34 & -1,50 \\ -0,28 & -0,44 & 0,90 \\ 1,36 & 0,44 & -0,30 \\ -1,4 & 1,34 & 0,90 \end{pmatrix}$$

3/ إيجاد مصفوفة الارتباط C :

ملاحظة :

$$C=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

$(r_{jj}=1)$

يعني $r_{11}=r_{22}=r_{33}=1$

و $(r_{jK}=r_{Kj})$

يعني $r_{12}=r_{21}$ ، $r_{13}=r_{31}$ ، $r_{23}=r_{32}$

حساب r_{jK} بالطريقة التالية :

$$r_{jK}=\frac{1}{n}\frac{\sum(x_{ij}-\bar{x}_j)(x_{iK}-\bar{x}_K)}{\sigma_j\,\sigma_K}$$; (r دائما محصور بين -1 و 1)

مثلا :

$$r_{12}=\frac{1}{4}\frac{\sum(x_{i1}-\bar{x}_1)(x_{i2}-\bar{x}_2)}{\sigma_1\,\sigma_2}$$

$$r_{12}=\frac{1}{4}\frac{-20,5}{11,58\times 1,11}=-0,39$$

$$r_{13}=\frac{1}{4}\frac{-23,25}{11,58\times 0,82}=-0,60$$

$$r_{23}=\frac{1}{4}\frac{2,5}{1,11\times 0,82}=0,68$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -0,39 & -0,6 \\ -0,39 & 1 & 0,68 \\ -0,6 & 0,68 & 1 \end{pmatrix}$$

4/ حساب نسب التمثيل على المحاور :

المحاور	القيم الذاتية	نسب التمثيل	النسب التجميعية
1	2,12	$\tau_1=\frac{2,12}{3}\times 100=70,67$	٪70,67
2	0,61	$\tau_2=\frac{0,61}{3}\times 100=20,33$	٪91
3	0,27	$\tau_3=\frac{0,27}{3}\times 100=9$	٪100
المجموع	3	٪100	

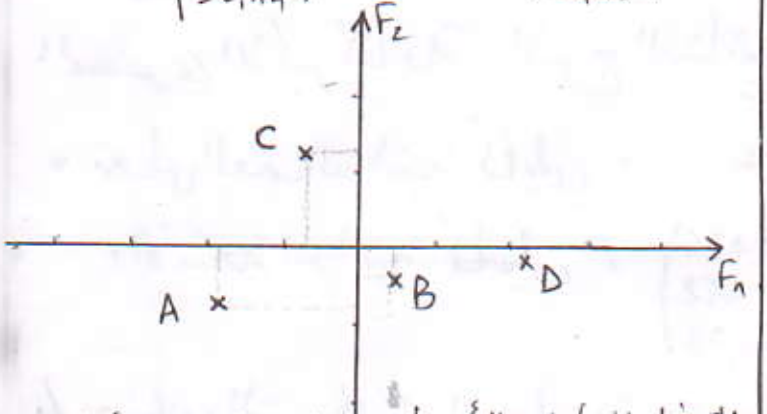
- نلاحظ أن المحور ① يمثل 70,67٪ من بيانات الجدول، كما أن 20,33٪ ممثلة على المحور ② .
- إذن المستوى الأول الذي يضم المحورين الأول والثاني بنسبة 91٪ من بيانات الجدول هو الأكثر كفاءة ويمكن الإعتماد عليه في التحليل .

5/ حساب إحداثيات الأفراد على المحاور :

$$F_B=\hat{X}*U_B \Rightarrow F_1=\hat{X}.U_1$$

$$F_1=\begin{pmatrix} 0,32 & -1,34 & -1,5 \\ -0,28 & -0,44 & 0,9 \\ 1,36 & 0,44 & -0,3 \\ -1,4 & 1,34 & 0,9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0,54 \\ 0,56 \\ 0,63 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1,87 \\ 0,47 \\ -0,67 \\ 2,07 \end{pmatrix}$$

$$F_2=\begin{pmatrix} -0,71 \\ -0,43 \\ 1,29 \\ -0,14 \end{pmatrix} \quad ; \quad F_3=\begin{pmatrix} -0,36 \\ 0,83 \\ 0,02 \\ -0,49 \end{pmatrix}$$



التمثيل البياني للأفراد على المستوى الأول .

- كلما كانت النقاط بعيدة عن المركز، تتزايد جودة تمثيلها على المحور والعكس .

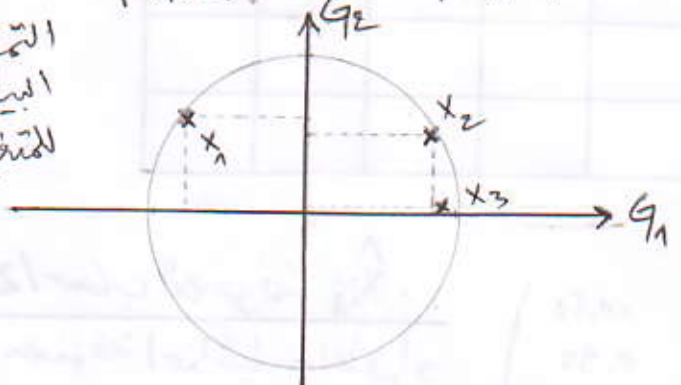
6/ حساب إحداثيات المتغيرات على المحاور :

$$G_B=\sqrt{\lambda_B}*U_B \Rightarrow G_1=\sqrt{\lambda_1}.U_1$$

$$G_1=\sqrt{2,12}\begin{pmatrix} -0,54 \\ 0,56 \\ 0,63 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0,79 \\ 0,82 \\ 0,92 \end{pmatrix}$$

$$G_2=\begin{pmatrix} 0,29 \\ 0,5 \\ 0,05 \end{pmatrix} \quad ; \quad G_3=\begin{pmatrix} 0,19 \\ -0,27 \\ 0,41 \end{pmatrix}$$

التمثيل البياني للمتغيرات



- كل المتغيرات تقع على سطح دائرة مركزها و ونصف قطرها 1 ، ولا يمكن أن تخرج عن هذا السطح .
- كلما كانت المتغيرات بعيدة عن المركز تزداد جودة تمثيلها