$$A\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

إيجاد القيم الذاتية :

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\left|\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 2-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

تثبيت العمود الأول :

$$(5-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)\left[(2-\lambda)(5-\lambda)-4\right]+2\left[-2(5-\lambda)-2(-4)\right]-4\left[-2(2)-(2-\lambda)(-4)\right]$$

$$(5-\lambda)\left[\lambda^2-7\lambda+6\right]+2\left[-2+2\lambda\right]-4\left[4-4\lambda\right]=0$$

$$5\lambda^2-35\lambda+30-\lambda^3+7\lambda^2-6\lambda-4+4\lambda-16+16\lambda=0$$

$$-\lambda^3+12\lambda^2-21\lambda+10=0$$

نعوض $\lambda=1$ نجد انها حل للمعادلة ومنه نقوم باجراء عملية تحليل حيث تصبح معادلة درجة 1 × معادلة درجة 2 .

$$(\lambda-1)(-\lambda^2+11\lambda-10)=0$$

نحسب

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$=11^2-4(-1)(-10)$$

$$=121-40=81$$

$$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11-9}{-2} = +10$$

$$\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-11+9}{-2} = 1$$

ومنه القيم الذاتية لـ A

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 10$

$\lambda_3 = 1$

حساب الأشعة الذاتية :

لما $\lambda = 1$ نجد

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 & (1) \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 & (2) \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

نضع $x_1 = 1$

$$\begin{cases} 4 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ -2 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ -4 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_3 = 4 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

نفرض $x_2 = 1$ نجد

$$2 + 4x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 1/2$$

$$\vec{X}_I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ +1/2 \end{pmatrix}$$

لما $\lambda=10$

$$\begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ -2 & -8 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$$

$-5x_1-2x_2-4x_3=0$ (1)

$-2x_1-8x_2+2x_3=0$ (2)

$-4x_1+2x_2-5x_3=0$ (3)

(1) + (3) نجد

$-9x_1-9x_3=0 \Rightarrow \boxed{x_1=-x_3}$

نعوض في (2) نجد

$-2(-x_3)-8x_2+2x_3=0$

$2x_3-8x_2+2x_3=0 \Rightarrow 4x_3=8x_2 \Rightarrow \boxed{x_3=2x_2}$

معناه لما

$x_1=1$

$x_2=-1/2$

$x_3=-1$

نجد

ومنه الشعاع $X_{II}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ شعاع ذاتيا لـ A عند $\lambda=10$