## ٧. المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية
## Random Variables and Probability Distributions

### (٧-١) مقدمة:

تكلمنا في الباب السابق عن بعض مفاهيم الاحتمالات والتجارب العشوائية. وفي كثير من الأحيان نرغب في التعامل مع قيم عددية مرتبطة بنقاط العينة للتجربة العشوائية بدلاً من التعامل مع نقاط العينة نفسها إذ أن نقاط العينة أو النتائج الممكنة للتجربة العشوائية تكون في بعض الأحيان عبارة عن صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًا. وفي هذه الحالة فإننا نقوم بتحويل هذه القيم الوصفية إلى قيم عددية حقيقية تسمى قيم المتغير العشوائي. إن الآلة المستخدمة لتحويل عناصر فضاء العينة للتجربة العشوائية إلى قيم عددية حقيقية هي ما يسمى بالمتغير العشوائي. إذن، فالمتغيرات العشوائية تستخدم للتعبير عن نتائج التجربة العشوائية وعن الحوادث بقيم عددية بدلاً من مسميات أو صفات. فعلى سبيل المثال قد نكون مهتمين فقط بعدد الصورة الظاهرة على الوجه العلوي عند رمي قطعة عملة عشر مرات متتالية بغض النظر عن التفصيلات الأخرى. إن عدد الصور في هذه الحالة عبارة عن متغير عشوائي تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية. وهناك عدة أنواع للمتغيرات العشوائية نذكر منها نوعين هما:

١. متغيرات عشوائية منفصلة أو متقطعة Discrete Random Variables
٢. متغيرات عشوائية متصلة أو مستمرة Continuous Random Variables

وسنتكلم عن كل نوع منها على حدة في هذا الفصل.

### (٧-٢) المتغير العشوائي Random Variable:

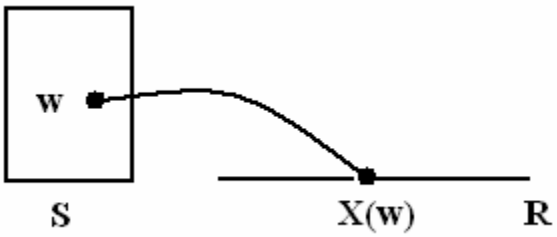
**تعريف:**

لنفرض أن S هو فضاء العينة لتجربة عشوائية. إن المتغير العشوائي X هو دالة حقيقية معرفة على فضاء العينة S. (لابد أن تتحقق بعض الشروط على الدالة لكي تكون متغيرًا عشوائيًا ولكننا لن نتطرق إلى تلك الشروط.)

**ملاحظات:**

١. إن المتغير العشوائي X يعطي قيمة حقيقية وحيدة لكل عنصر من عناصر فضاء العينة S.
٢. إن المتغير العشوائي X هو تطبيق مجاله فضاء العينة S ومجاله المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية **R**، أي أن: $X : S \to \mathbf{R}$.

٣. إذا كانت $w\in S$ نقطة عينة فإن صورة w تحت تأثير المتغير العشوائي X هي $X(w)$ وهي قيمة حقيقية، أي أن $X(w)\in \mathbf{R}$:




$$w: \xrightarrow{X} X(w)\in \mathbf{R}$$

٤. إن المجموعة $X(S)=\{x\in\mathbf{R}: X(w)=x, w\in S\}$ هي مدى التطبيق X وتسمى مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X، وهي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية أي أن $X(S)\subseteq\mathbf{R}$.

**مثال (٧-١):**

لتكن التجربة هي قذف قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين بشكل مستقل. ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهرة في الرميتين.

١. عبر عن المتغير العشوائي X كدالة.

٢. أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

٣. عبر عن الحوادث التالية باستخدام المتغير العشوائي:

$$\{(T,T)\}, \{(H,T), (T,H)\}, \{(H,H)\}, \{(H,H), (H,T), (T,H)\}$$

٤. عبر عن الحوادث التالية باستخدام نقاط العينة:

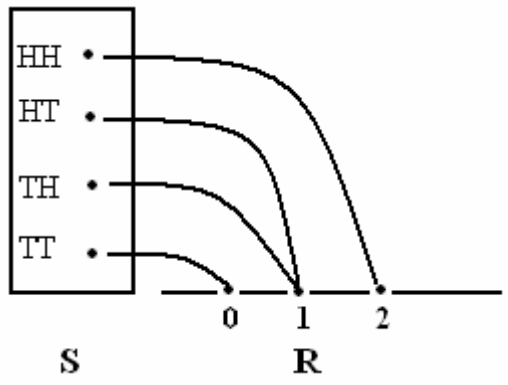
$$\{X=0\}, \{X=1\}, \{X=2\}, \{X<1\}, \{X\leq 1\}, \{X>5\}$$

٥. أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(X=0), P(X=1), P(X=2), P(X<1), P(X\leq 1), P(X>5)$$

**الحل:**

١. فضاء العينة لهذه التجربة هو $S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$.




X = عدد الصور

إن المتغير العشوائي X يعطي كل عنصر من عناصر S قيمة حقيقية وحيدة في **R** كما يلي:

X(H,H) = 2
X(H,T) = 1
X(T,H) = 1
X(T,T) = 0

كما يمكن التعبير عن المتغير العشوائي X كدالة في الجدول التالي:

| نقطة العينة w | قيمة المتغير العشوائي X(w) |
|---|---|
| HH | 2 |
| HT | 1 |
| TH | 1 |
| TT | 0 |

٢. مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي:

$$X(S)=\{x\in\mathbf{R}: X(w)=x, w\in S\} = \{0, 1, 2\}$$

٣. التعبير عن الحوادث باستخدام المتغير العشوائي:

$\{(T,T)\} = \{ X = 0 \}$ ={عدم ظهور صورة}

$\{(H,T), (T,H)\} = \{ X = 1 \}$ ={ظهور صورة واحدة فقط}

$\{(H,H)\} = \{ X = 2 \}$ ={ظهور صورتين }

$\{(H,H), (H,T), (T,H)\} = \{ X \geq 1 \}$ ={ظهور صورة واحدة على الأقل}

٤. التعبير عن الحوادث باستخدام نقاط العينة:

$\{X=0\} = \{(T,T)\}$
$\{X=1\} = \{(H,T), (T,H)\}$
$\{X=2\} = \{(H,H)\}$
$\{X<1\} = \{X=0\} = \{(T,T)\}$
$\{X\leq 1\} = \{X=0\} \cup \{X=1\} = \{(H,T), (T,H), (T,T)\}$
$\{X>5\} = \{ \} = \phi$

٥. إيجاد الاحتمالات:

بما أن العملة متزنة فإن التجربة متساوية الفرص، أي أن:

$$P(\{(H,H)\}) = P(\{(H,T)\}) = P(\{(T,H)\}) = P(\{(T,T)\}) = 1/4 = 0.25$$

وباستخدام هذه الحقيقة فإننا نوجد الاحتمالات المطلوبة فيما يلي:

$P(X=0) = P(\{(T,T)\}) = 0.25$
$P(X=1) = P(\{(H,T), (T,H)\}) = P(\{(H,T)\})+P(\{(T,H)\}) = 0.25 + 0.25 =0.5$
$P(X=2) = P(\{(H,H)\}) = 0.25$
$P(X<1) = P(\{(T,T)\}) = 0.25$
$P(X\leq1) = P(\{(H,T), (T,H), (T,T)\}) = P(\{(H,T)\})+ P(\{(T,H)\}) + P(\{(T,T)\})$
$= 0.25 + 0.25 + 0.25 = 0.75$
$P(X>5) = P(\phi) = 0$

## (٧-٣) المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) Discrete Random Variable:

كما ذكرنا سابقًا فإن المتغيرات العشوائية تنقسم إلى عدة أنواع منها متغيرات عشوائية متقطعة (أو منفصلة) و متغيرات عشوائية مستمرة (أو متصلة). في هذا الجزء سنتناول المتغيرات العشوائية المتقطعة.

**تعريف:**

يكون المتغير العشوائي X متغيرًا عشوائيًا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له X(S) مجموعة متقطعة (أو قابلة للعد).

**ملاحظة:** مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع X تأخذ إحدى الحالتين: $X(S)=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ أو $X(S)=\{x_1,x_2,x_3,\dots\}$.

**مثال (٧-٢):**

في تجربة قذف قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين أوجد مجموعة القيم الممكنة المتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

١. المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور.
٢. المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور.
٣. المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحًا منه عدد الكتابات.

**الحل:**

الجدول التالي يبين القيم الممكنة لكل متغير:

| نقطة العينة w | قيمة المتغير العشوائي X X(w) | قيمة المتغير العشوائي Y Y(w) | قيمة المتغير العشوائي Z Z(w) |
|---|---|---|---|
| HH | 2 | 4 | 2 |

| نقطة العينة w | قيمة المتغير العشوائي X X(w) | قيمة المتغير العشوائي Y Y(w) | قيمة المتغير العشوائي Z Z(w) |
|---|---|---|---|
| HT | 1 | 1 | 0 |
| TH | 1 | 1 | 0 |
| TT | 0 | 0 | –2 |

والجدول التالي يبين مجموعة القيم الممكنة لكل متغير ونوعها وكذلك نوع المتغير:

| المتغير العشوائي | مجموعة القيم الممكنة | نوع مجموعة القيم | نوع المتغير العشوائي |
|---|---|---|---|
| X | X(S) = {0,1,2} | متقطعة | متقطع |
| Y | Y(S) = {0,1,4} | متقطعة | متقطع |
| Z | Z(S) = {–2,0,2} | متقطعة | متقطع |

**مثال (٧-٣):**

لتكن التجربة هي قذف قطعة نقود غير متزنة مرتين متتاليتين بشكل مستقل. ولنفرض أن هذه العملة غير متزنة بحيث أن $P(H)=\frac{1}{3}$ و $P(T)=\frac{2}{3}$. ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهرة في الرميتين.

١. أوجد الاحتمالات التالية ثم لخصها في جدول:

$$P(X=0)\ ,\ P(X=1)\ ,\ P(X=2)$$

٢. باستخدام الفقرة (١) أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(0<X<2)\ ,\ P(X\le 1)\ ,\ P(X\ge 2)\ ,\ P(X\ge 5),\ P(X<5)$$

**الحل:**

فضاء العينة لهذه التجربة هو $S = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$.

X = عدد الصور الظاهرة في الرميتين.

مجموعة القيم الممكنة المتغير العشوائي X هي: $X(S) = \{0,1,2\}$

نلخص حل هذا المثال في الجداول التالية:

| نقطة العينة w | احتمال نقطة العينة P(w) | قيمة المتغير العشوائي X X(w) |
|---|---|---|
| HH | $P(HH)=P(H)\times P(H)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ | 2 |
| HT | $P(HT)=P(H)\times P(T)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ | 1 |

| نقطة العينة w | احتمال نقطة العينة P(w) | قيمة المتغير العشوائي X X(w) |
|---|---|---|
| TH | $P(TH)=P(T)\times P(H)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ | 1 |
| TT | $P(TT)=P(T)\times P(T)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ | 0 |

| الحادثة | عناصر الحادثة | احتمال الحادثة |
|---|---|---|
| (X = 0) | {(T,T)} | $P(X=0)=P(TT)=\frac{4}{9}$ |
| (X = 1) | {(H,T), (T,H)} | $P(X=1)=P(HT)+P(TH)=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$ |
| (X = 2) | {(H,H)} | $P(X=2)=P(HH)=\frac{1}{9}$ |

١. من الجدول السابق نجد أن:

$$P(X=0)=\frac{4}{9},\ P(X=1)=\frac{4}{9},\ P(X=2)=\frac{1}{9}$$

ويمكن تنظيم هذه المعلومات في جدول وهذا الجدول يمثل ما يسمى بدالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع X:

| x | P(X = x) |
|---|---|
| 0 | 4/9 |
| 1 | 4/9 |
| 2 | 1/9 |

٢. من جدول دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X نستطيع حساب جميع احتمالات الحوادث المعبر عنها باستخدام المتغير العشوائي X كما يلي:

$$P(0<X<2)=P(X=1)=\frac{4}{9}$$

$$P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{4}{9}+\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$$

$$P(X\ge 2)=P(X=2)=\frac{1}{9}$$

$$P(X\ge 5)=P(\phi)=0$$

$$P(X<5) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

## (٧-٣-١) دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع Probability Mass Function:

**تعريف:**

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا مجموعة القيم الممكنة لـــه هـــي $X(S)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ أو $X(S)=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$ فإن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X يرمز لها بالرمز $f_X(x)$ وتعرف كما يلي:

$$f_X(x)=\begin{cases} P(X=x); & x \in X(S) \\ 0; & x \notin X(S) \end{cases}$$

**خواص دالة الكتلة الاحتمالية:**

إن دالة الكتلة الاحتمالية $f_X(x) = P(X = x)$ لابد أن تحقق الشروط التالية:

- $0 \le f_X(x) \le 1$
- $\sum_{\forall x} f_X(x)=1$
- $P(X \in A)= \sum_{x \in A} f_X(x) = \sum_{x \in A} P(X=x); \quad \forall A \subseteq \mathbf{R}$

**مثال (٧-٤):**

أوجد دالة الكتلة الاحتمالية $f_X(x) = P(X = x)$ للمتغير العشوائي X في مثال (٧-٣).

**الحل:**

دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X:

| x | $f_X(x) = P(X = x)$ |
|---|---|
| 0 | $4/9= f_x(0)=P(X=0)$ |
| 1 | $4/9= f_x(1)=P(X=1)$ |
| 2 | $1/9= f_x(2)=P(X=2)$ |
| المجموع | 1.00 |

من هذا الجدول نلاحظ أن دالة الكتلة الاحتمالية $f_X(x) = P(X = x)$ تحقق ما يلي:

- $0 \le f_X(x) \le 1 \quad ; \ x = 0, 1, 2$

- $\sum_{\forall x} f_X(x) = \sum_{x=0}^{2} f_X(x) = 1$

## (٧-٣-٢) التوقع (المتوسط) للمتغير العشوائي المتقطع Expected Value (Mean) of A Discrete Random Variable:

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا مجموعة القيم الممكنة لـه هـي $X(S)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ أو $X(S)=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$ ودالة كتلته الاحتمالية هي $f_X(x)$ فإن التوقع (أو القيمة المتوقعة أو المتوسط) للمتغير العشوائي X يرمز له بالرمز E(X) أو بالرمز $\mu_X$ ويعرف بالصيغة التالية:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x \in X(S)} x\, f_X(x) = \sum_{x \in X(S)} x\, P(X=x)$$
$$= x_1\, f_X(x_1) + x_2\, f_X(x_2) + \ldots$$

**ملاحظة:**

إن القيمة المتوقعة أو متوسط المتغير العشوائي X والذي يأخذ القيم الممكنة $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ما هو إلا الوسط المرجح للقيم $x_1,x_2,\ldots,x_n$ باعتبار أن الأوزان هي احتمالات تلك القيم، أي باعتبار أن وزن القيمة $x_i$ هو احتمالها $w_i=f_X(x_i)$ مع ملاحظة أن مجموع الأوزان يساوي الواحد، أي أن $\sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} f_X(x_i) = 1$.

**مثال (٧-٥):**

أوجد توقع (أو متوسط) المتغير العشوائي X الذي دالة كتلته الاحتمالية معطاة في الجدول التالي:

| x | $f_X(x) = P(X = x)$ |
|---|---|
| 0 | 4/9 |
| 1 | 4/9 |
| 2 | 1/9 |

**الحل:**

القيمة المتوقعة (أو متوسط) المتغير العشوائي X هي:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{x=0}^{2} x\, f_X(x) = x_1\, f_X(x_1) + x_2\, f_X(x_2) + x_3\, f_X(x_3)$$
$$= 0 \times 4/9 + 1 \times 4/9 + 2 \times 1/9$$
$$= 0 + 4/9 + 2/9$$
$$= 6/9$$

ويمكن تلخيص الحل في الجدول التالي:

| x | $f_X(x)$ | $x\, f_X(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 4/9 | $0 \times 4/9 = 0$ |
| 1 | 4/9 | $1 \times 4/9 = 4/9$ |
| 2 | 1/9 | $2 \times 1/9 = 2/9$ |
| المجموع | $\sum f_X(x) = 1.0$ | $\mu_X = E(X) = \sum x\, f_X(x) = 6/9$ |

**بعض خواص التوقع:**

ليكن X متغيرا عشوائيا ولتكن a و b ثوابت. إن التوقع يحقق الخواص التالية:

- $E(a) = a$
- $E(X \pm b) = E(X) \pm b$
- $E(aX) = a\, E(X)$
- $E(aX \pm b) = aE(X) \pm b$

**نتيجة:**

ليكن X متغيرا عشوائيا متقطعًا ولتكن g(X) دالة حقيقية في المتغير العشوائي X. إن توقع الدالة g(X) يمكن حسابه بالصيغة التالية:

$$\mu_{g(X)} = E[(g(X)] = \sum_{x \in X(S)} g(x)\, f_X(x) = g(x_1)\, f_X(x_1) + g(x_2)\, f_X(x_2) + \dots$$

وكحالة خاصة عندما تكون $g(X)=X^2$ فإن:

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(S)} x^2\, f_X(x) = x_1^2 f_X(x_1) + x_2^2 f_X(x_2) + \dots$$

**مثال (٧-٦):**

أوجد توقع (أو متوسط) المتغيرات العشوائية التالية في مثال (٧-٥):

(أ) $g(X) = 9X+2$

(ب) $g(X) = X^2$

**الحل:**

(أ) وجدنا أن $E(X)=6/9$ وباستخدام خواص التوقع فإن:

$$E[g(X)] = E(9X+2) = 9\, E(X) + 2 = 9 \times 6/9 + 2 = 8$$

(ب) باستخدام نتيجة التوقع فإن:

$$E[g(X)] = E(X^2) = \sum x^2\, f_X(x)$$
$$= x_1^2 f_X(x_1) + x_2^2 f_X(x_2) + \dots$$
$$= 0^2 \times 4/9 + 1^2 \times 4/9 + 2^2 \times 1/9$$

$= 0 \times 4/9 + 1 \times 4/9 + 4 \times 1/9$
$= 0 + 4/9 + 4/9$
$= 8/9$

ويمكن تلخيص حل هذه الفقرة في الجدول التالي:

| x | $f_X(x)$ | $x^2$ | $x^2 f_X(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 4/9 | 0 | $0 \times 4/9 = 0$ |
| 1 | 4/9 | 1 | $1 \times 4/9 = 4/9$ |
| 2 | 1/9 | 4 | $4 \times 1/9 = 4/9$ |
| المجموع | | | $E(X^2) = \sum x^2 f_X(x) = 8/9$ |

## (٧-٣-٣) التباين للمتغير العشوائي Variance of A Random Variable:

إذا كان X متغيرا عشوائيا توقعه (متوسطه) $\mu_X$. فإن تباين المتغير العشوائي X يرمز له بالرمز $\sigma_X^2$ أو Var(X) أو V(X) ويعرف بالصيغة التالية:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E[(X - \mu_X)^2]$$

ويرمز للانحراف المعياري للمتغير العشوائي X بالرمز $\sigma_X$ ويعرف بالصيغة التالية:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$$

**نتيجة:**

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعًا دالة كتلته الاحتمالية هي $f_X(x)$ وتوقعه (متوسطه) $\mu_X$ فإن تباين المتغير العشوائي X يمكن أن يحسب بالصيغة التالية:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \sum_{x \in X(S)} (x - \mu_X)^2 f_X(x) = \sum_{x \in X(S)} (x - \mu_X)^2 P(X = x)$$

هذه النتيجة هي نتيجة مباشرة لخواص التوقع وذلك بجعل $g(X) = (X - \mu_X)^2$.

**نتيجة: (صيغة حسابية للتباين)**

باستخدام خواص التوقع فإنه يمكن إثبات الصيغة التالية:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu_X^2$$

حيث أن: $E(X^2) = \sum x^2 f_X(x)$ .

**مثال (٧-٧):**

أحسب المتوسط والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X الذي دالة كتلته الاحتمالية معطاة في الجدول أدناه:

| x | $f_X(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0.6 |
| 1 | 0.3 |
| 2 | 0.1 |

**الحل:**

نلخص الحل في الجدول التالي:

| x | $f_X(x)$ | $x\, f_X(x)$ | $(x-\mu_X)^2$ | $(x-\mu_X)^2 f_X(x)$ | $x^2$ | $x^2 f_X(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.6 | 0.0 | 0.25 | 0.150 | 0 | 0.0 |
| 1 | 0.3 | 0.3 | 0.25 | 0.075 | 1 | 0.3 |
| 2 | 0.1 | 0.2 | 2.25 | 0.225 | 4 | 0.4 |
| المجموع | 1.0 | $\mu_X = \sum x f_X(x) = 0.5$ | | $\sigma_X^2 = \sum (x-\mu)^2 f_X(x) = 0.450$ | | $E(X^2) = \sum x^2 f_X(x) = 0.7$ |

(١) حساب المتوسط:

$$\mu_X = \sum x f_X(x) = 0.5$$

(٢) حساب التباين:

(أ) حساب التباين بصيغة التعريف:

$$\sigma_X^2 = \sum (x-\mu)^2 f_X(x) = 0.450$$

(ب) حساب التباين بالصيغة الحسابية:

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 = 0.7 - (0.5)^2$$
$$= 0.7 - 0.25$$
$$= 0.45$$

(٣) حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{0.45} = 0.6708$$

**بعض خواص التباين:**

ليكن X متغيرا عشوائيا ولتكن a و b ثوابت. إن التباين يحقق الخواص التالية:

- $Var(a) = 0$
- $Var(X \pm b) = Var(X)$

- $Var(aX) = a^2 Var(X)$
- $Var(aX \pm b) = a^2 Var(X)$

**مثال (٧-٨):**

أحسب تباين المتغيرات العشوائية التالية في مثال (٧-٧):

أ- $g(X) = 10X$

ب- $g(X) = 10X+2$

**الحل:**

وجدنا أن $Var(X)=0.45$ وباستخدام خواص التباين فإن:

(أ)

$$Var[g(X)] = Var(10X) = 10^2 Var(X) = 100 \times 0.45 = 45$$

(ب)

$$Var[g(X)] = Var(10X+2) = 10^2 Var(X) = 100 \times 0.45 = 45$$

## (٧-٤) بعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة Some Discrete Prabability Distributions:

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة هي توزيعات احتمالية (أو دوال كتل احتمالية) لمتغيرات عشوائية متقطعة. وفي هذه الفقرة سنتطرق إلى اثنين من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة المهمة هما توزيع بيرنوللي وتوزيع ذات الحدين أو التوزيع ذي الحدين. وقبل استعراض هذين التوزيعين فإن من المفيد لنا معرفة ما يسمى بمحاولة بيرنوللي.

### (٧-٤-١) محاولة بيرنوللي Bernoulli's Trial

محاولة بيرنوللي هي تجربة عشوائية لها نتيجتين اثنتين فقط. نسمي النتيجة الأولى اصطلاحًا بالنجاح (Success) ونرمز لها بالرمز (s) والنتيجة الثانية نسميها بالفشل (Failure) ونرمز لها بالرمز (f). لذلك فإن فراغ العينة لمحاولة بيرنوللي هو $S=\{s,f\}$. ونرمز لاحتمال النجاح بالرمز $p=P(s)$ ولاحتمال الفشل بالرمز $q=P(f)$ وينبغي ملاحظة أن: $q=1-p$. ومن أمثلة محاولات بيرنوللي نذكر ما يلي:

١. تجربة قذف قطعة نقود (صورة أو كتابة)
٢. تجربة تسجيل جنس المولود (ذكر أو أنثى)
٣. تجربة رصد نتيجة طالب في الاختبار (ناجح أو راسب)

٤. تجربة رصد نتيجة تحليل إصابة بمرض معين (مصاب أو غير مصاب)

٥. تجربة فحص قطعة من إنتاج أحد المصانع (سليمة أو تالفة)

## (٧-٤-٢) توزيع بيرنوللي Bernoulli's Distribution

لنفرض أن لدينا محاولة بيرنوللي ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد مرات النجاح عند إجراء محاولة بيرنوللي، أي أن:

$$X(s) = 1, \quad X(f) = 0$$

إن مجموعة القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي هي $X(S)=\{0,1\}$ واحتمالاته هي:

$P(X=1) = P(s) = p$

$P(X=0) = P(f) = 1- p$

أي أن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x}; & x = 0, 1 \\ 0; & x \neq 0, 1 \end{cases}$$

إن توزيع المتغير العشوائي X يسمى بتوزيع بيرنوللي بالمعلمة p. ويسمى المتغير العشوائي X بمتغير بيرنوللي. ومعلمة هذا التوزيع هي احتمال النجاح p.

## (٧-٤-٣) التوزيع ذي الحدين Binomial Distribution

إن توزيع ذات الحدين أو التوزيع ذا الحدين من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة المهمة شائعة الاستخدام في كثير من التطبيقات. لنفرض أن التجربة العشوائية تتكون من تكرار محاولة بيرنوللي عدد من المرات تحت الشروط التالية:

١. عدد المحاولات = n

٢. المحاولات مستقلة (نتيجة أي محاولة لا يؤثر ولا يتأثر بنتائج المحاولات الأخرى)

٣. احتمال النجاح $p=P(s)$ ثابت لجميع المحاولات

ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد مرات النجاح عند تكرار إجراء محاولة بيرنوللي وفق الشروط أعلاه. إن مجموعة القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي هي $X(S)=\{0,1,\ldots,n\}$.

ودالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

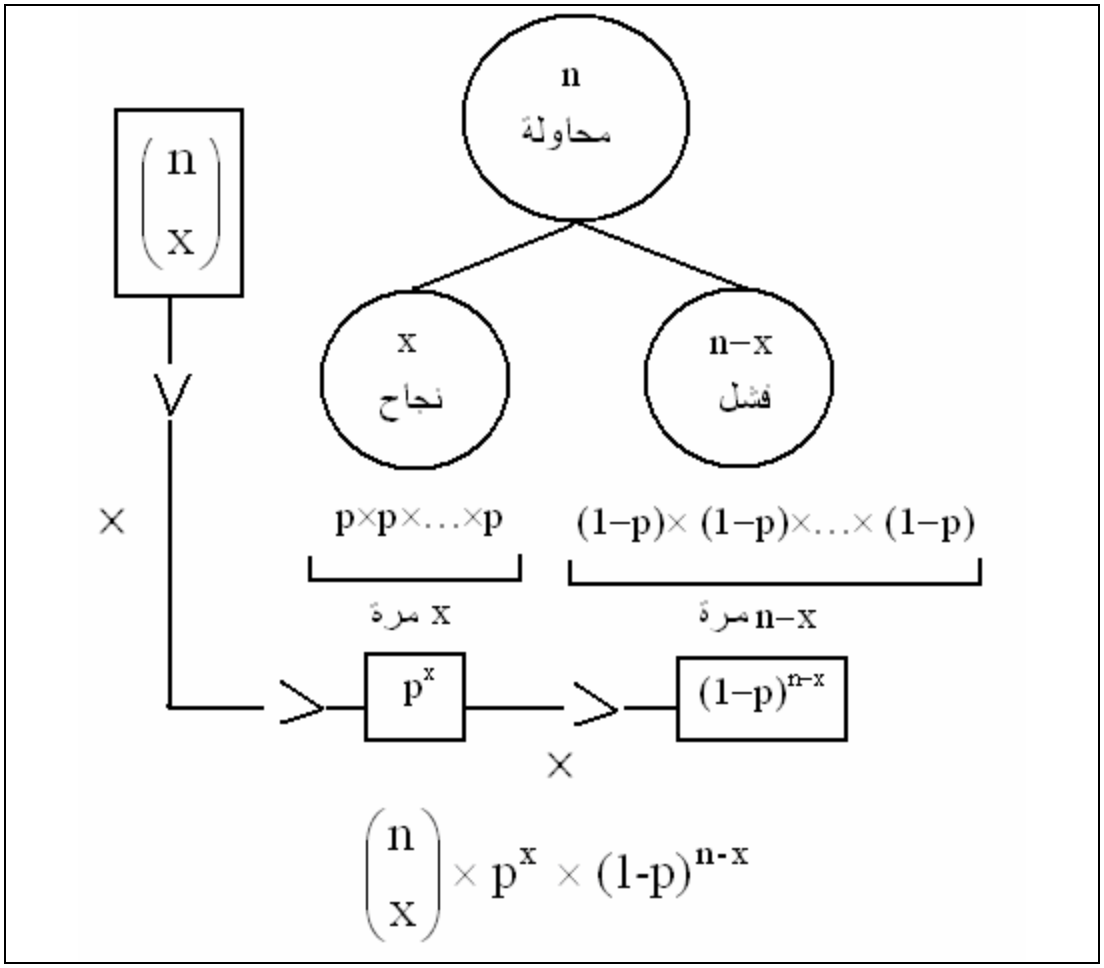
$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}; & x = 0,1,\cdots,n \\ 0; & x \neq 0,1,\cdots,n \end{cases}$$

إن توزيع المتغير العشوائي X أعلاه يسمى بالتوزيع ذي الحدين بالمعالم n و p ونكتب:

$$X \sim \text{Binomial}(n, p)$$

ويسمى المتغير العشوائي X بمتغير ذي الحدين. معلمتا هذا التوزيع هما عدد المحاولات n واحتمال النجاح p. ويمكن تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذات الحدين في الجدول التالي:

| x | $f_X(x) = P(X = x)$ |
|---|---|
| 0 | $\binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} = (1-p)^n$ |
| 1 | $\binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = n\,p(1-p)^{n-1}$ |
| 2 | $\binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2}$ |
| ⋮ | ⋮ |
| n | $\binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} = p^n$ |



**ملاحظات:**

١. إن توزيع بيرنوللي هو حالة خاصة لتوزيع ذي الحدين عندما n=1.

٢. ليكن المتغير العشوائي X هو عدد مرات النجاح وليكن المتغير العشوائي Y هو عدد مرات الفشل، أي أن Y=n−X. إذا كان X يتوزع وفق توزيع Binomial(n,p)، فإن Y يتوزع وفق توزيع Binomial(n,1−p).

**التوقع والتباين للتوزيع ذي الحدين:**

**نتيجة:**

إذا كان X متغيرا عشوائيا يتوزع وفق التوزيع ذي الحدين بالمعلمتين n و p، فإن المتوسط والتباين للمتغير العشوائي X هما على التوالي كما يلي:

$$\mu_X = E(X) = np$$

$$\sigma_X^2 = Var(X) = np(1-p)$$

**مثال (٧−٩):**

لنفرض أن لدينا عملة غير متزنة بحيث أن P(H)=0.4 و P(T)=0.6. رميت هذه العملة ثلاث مرات بشكل مستقل. ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاث.

أ− أوجد دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.

ب− أوجد التوقع (المتوسط) والتباين للمتغير العشوائي X.

ج− أوجد الاحتمالات التالية:

١. الحصول على صورتين

٢. الحصول على صورتين على الأقل

٣. الحصول على صورة واحدة على الأكثر

٤. الحصول على ثلاث كتابات

**الحل:**

محاولة بيرنوللي هي رمي العملة:

- نتيجة النجاح = ظهور الصورة (H) $\Leftarrow$ احتمال النجاح = $p = P(H) = 0.4$
- نتيجة الفشل = ظهور الكتابة (T) $\Leftarrow$ احتمال الفشل = $1-p = P(T) = 0.6$

التجربة هي رمي العملة ثلاث مرات بشكل مستقل:

- عدد المحاولات $n=3$ (عدد الرميات)
- المحاولات مستقلة (لأن الرميات مستقلة)
- احتمال النجاح $p=0.4$ ثابت (لأننا نستخدم نفس العملة)

لنعرف المتغير العشوائي:

$X$ = عدد مرات النجاح في المحاولات الثلاث

= عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاث

إن المتغير العشوائي $X$ يتوزع وفق توزيع ذات الحدين بالمعلمتين $n=3$ و $p=0.4$، أي أن:

$$X \sim Binomial(3, 0.4)$$

أ- دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي $X$ هي:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{3}{x}(0.4)^x (0.6)^{3-x}; & x = 0,1,2,3 \\ 0; & x \neq 0,1,2,3 \end{cases}$$

ويمكن تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية بالجدول التالي:

| x | $f_X(x) = P(X = x)$ |
|---|---|
| 0 | $\binom{3}{0}(0.4)^0 (0.6)^{3-0} = (1)(0.4)^0 (0.6)^3 = 0.216$ |
| 1 | $\binom{3}{1}(0.4)^1 (0.6)^{3-1} = (3)(0.4)(0.6)^2 = 0.432$ |
| 2 | $\binom{3}{2}(0.4)^2 (0.6)^{3-2} = (3)(0.4)^2 (0.6)^1 = 0.288$ |
| 3 | $\binom{3}{3}(0.4)^3 (0.6)^{3-3} = (1)(0.4)^3 (0.6)^0 = 0.064$ |

ب- التوقع (المتوسط) والتباين للمتغير العشوائي $X$ هما على التوالي:

$\mu_X = E(X) = np = 3 \times 0.4 = 1.2$

$\sigma_X^2 = Var(X) = np(1-p) = 3 \times 0.4 \times 0.6 = 0.72$

ج- إيجاد الاحتمالات:

$P(\{\text{الحصول على صورتين}\}) = P(X=2) = f_X(2) = 0.288$

$P(\{\text{الحصول على صورتين على الأقل}\}) = P(X\geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$
$= f_X(2) + f_X(3)$
$= 0.288 + 0.064$
$= 0.352$

$P(\{\text{الحصول على صورة واحدة على الأكثر}\}) = P(X\leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$
$= f_X(0) + f_X(1)$
$= 0.216 + 0.432$
$= 0.648$

$P(\{\text{الحصول على ثلاث كتابات}\}) = P(X=0) = f_X(0) = 0.216$

**<u>مثال (٧-١٠):</u>**

إن نسبة الإنتاج التالف لأحد مصانع المصابيح هي 10%. إذا أخذت عينة مكونة من 5 مصابيح بشكل عشوائي من إنتاج هذا المصنع، فأوجد ما يلي:

أ. أوجد الاحتمالات التالية:

١. الحصول على مصباح واحد تالف
٢. الحصول على جميع المصابيح تالفة
٣. الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر
٤. الحصول على مصباح واحد تالف على الأقل

ب. أوجد العدد المتوقع للمصابيح التالفة في العينة.

**<u>الحل:</u>**

محاولة بيرنوللي هي فحص المصباح:

- نتيجة النجاح = الحصول على مصباح تالف $\Leftarrow$ احتمال النجاح = $p = 0.1$
- نتيجة الفشل = الحصول على مصباح سليم $\Leftarrow$ احتمال الفشل = $1-p = 0.9$

التجربة هي فحص 5 مصابيح بشكل مستقل:

- عدد المحاولات $n=5$ (عدد المصابيح)
- المحاولات مستقلة (لأن العينة أخذت بشكل عشوائي)

- احتمال النجاح p=0.1 ثابت (لأن المصابيح أخذت من نفس المصنع)

لنعرف المتغير العشوائي:

X = عدد مرات النجاح في المحاولات الخمس

= عدد المصابيح التالفة عند فحص 5 مصابيح

إن المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع ذات الحدين بالمعلمتين n=5 و p=0.1، أي أن:

$$X \sim Binomial(5, 0.1)$$

إن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{5}{x}(0.1)^x (0.9)^{5-x}; & x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0; & x \neq 0,1,2,3,4,5 \end{cases}$$

ويمكن تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية بالجدول التالي:

| x | $f_X(x) = P(X = x)$ |
|---|---|
| 0 | $\binom{5}{0}(0.1)^0 (0.9)^{5-0} = 0.59049$ |
| 1 | $\binom{5}{1}(0.1)^1 (0.9)^{5-1} = 0.32805$ |
| 2 | $\binom{5}{2}(0.1)^2 (0.9)^{5-2} = 0.07290$ |
| 3 | $\binom{5}{3}(0.1)^3 (0.9)^{5-3} = 0.00810$ |
| 4 | $\binom{5}{4}(0.1)^4 (0.9)^{5-4} = 0.00045$ |
| 5 | $\binom{5}{5}(0.1)^5 (0.9)^{5-5} = 0.00001$ |

أ. إيجاد الاحتمالات:

$P(\{\text{الحصول على مصباح واحد تالف}\}) = P(X=1) = f_X(1) = 0.32805$

$P(\{\text{الحصول على جميع المصابيح تالفة}\}) = P(X=5) = f_X(5) = 0.00001$

$P(\{\text{الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر}\}) = P(X \leq 1)$

$$= P(X=0) + P(X=1)$$
$$= f_X(0) + f_X(1)$$
$$= 0.59049 + 0.32805$$
$$= 0.91854$$

$P(\{\text{الحصول على مصباح واحد تالف على الأقل}\}) = P(X \geq 1)$

$$= 1 - P(X = 0)$$
$$= 1 - f_X(0)$$
$$= 1 - 0.59049$$
$$= 0.409510$$

ب. العدد المتوقع للمصابيح التالفة في العينة هو:

$$\mu_X = E(X) = np = 5 \times 0.1 = 0.5$$

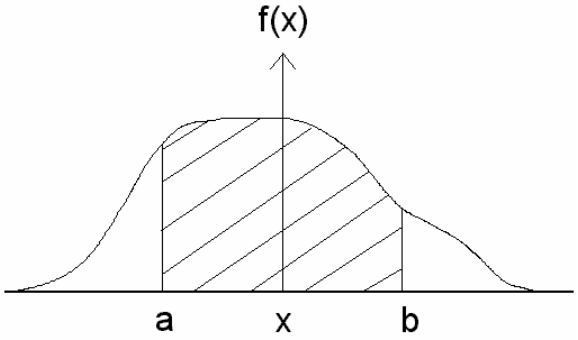
## (٧-٥) المتغير العشوائي المستمر (المتصل) Continuous Random Variable:

لقد ذكرنا سابقًا أن المتغير العشوائي المتقطع X هو متغير عشوائي تكون مجموعة القيم الممكنة له مجموعة متقطعة (أو قابلة للعد) أي على الشكل $X(S)=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ أو $X(S)=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$. أما المتغير العشوائي المستمر (المتصل) فيمكن أن يعرف بشكل مبسط على أنه متغير عشوائي مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة أو إتحاد عدد من الفترات. ومن أمثلة الكميات التي يمكن تمثيلها بواسطة متغيرات عشوائية متصلة:

- درجة حرارة تفاعل كيميائي معين
- نسبة تركيز مركب ما في محلول كيميائي
- الفترة الزمنية بين الإصابة بمرض الإيدز والوفاة
- طول الشخص
- المسافة المقطوعة لجسم معين خلال وحدة الزمن

## (٧-٥-١) دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر Probability Density Function:

لأي متغير عشوائي مستمر (متصل) X يوجد دالة حقيقية غير سالبة يرمز لها بالرمز $f_X(x)$ وتسمى دالة الكثافة الاحتمالية ومن خلالها نستطيع إيجاد احتمالات الحوادث المعبر عنها بواسطة المتغير العشوائي X. فالمساحة تحت منحنى هذه الدالة تعطي احتمال وقوع المتغير العشوائي X في الفترات المناظرة على المحور الأفقي.




المساحة تحت منحنى الدالة وفوق الفترة $(a,b) = \int_a^b f_X(x)\,dx = P(a < X < b)$

**تعريف:**

أي دالة حقيقية غير سالبة $f_X(x)$ والمعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية **R** تسمى دالة كثافة احتمالية للمتغير العشوائي المستمر X إذا وإذا فقط كان:

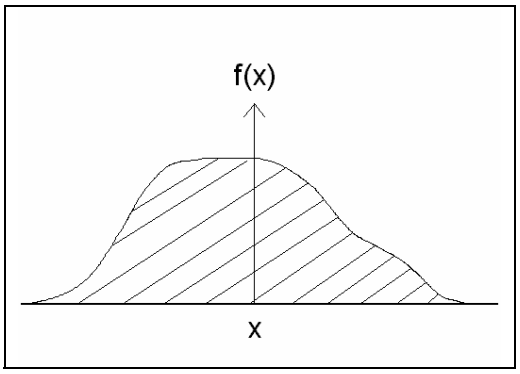
$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(x)\,dx \quad \forall\ a, b \in \mathbf{R};\ a \le b$$

أي أن: احتمال وقوع المتغير العشوائي X في أي فترة يساوي المساحة فوق تلك الفترة وتحت منحنى الدالة $f_X(x)$.

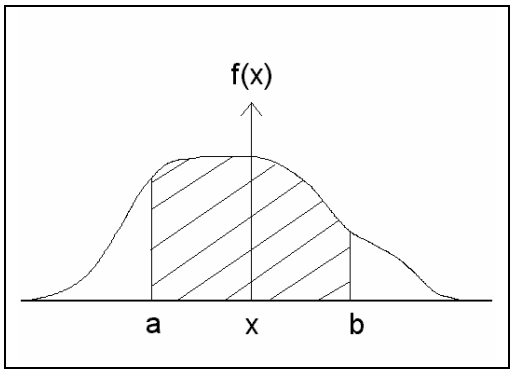
**ملاحظات:**

إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا دالة كثافته الاحتمالية هي $f_X(x)$، فإن:

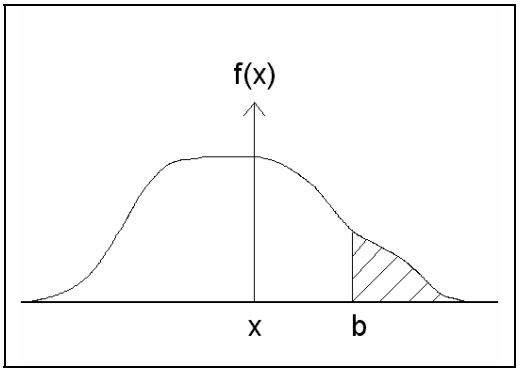
- $f_X(x) \neq P(X=x)$ (بشكل عام)
- $P(X=x) = 0\ ,\ \forall\ x \in \mathbf{R}$
- $P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$
- $f_X(x) \ge 0\ ,\ \forall\ x \in \mathbf{R}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (أي أن المساحة الكلية تحت منحنى الدالة يساوي الواحد)



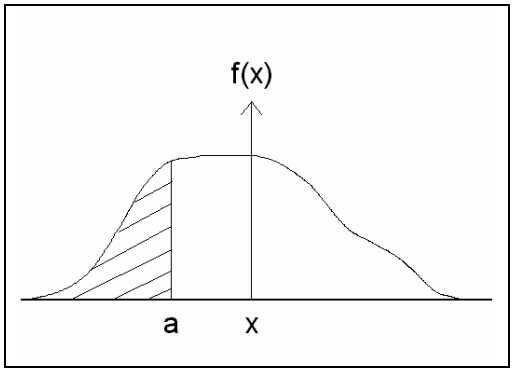

المساحة الكلية = 1




$P(a < X < b)$




$P(X > b)$




$P(X < a)$

## (٧-٥-٢) التوزيع الطبيعي: Normal Distribution

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المستمرة وذلك لأن كثير من الظواهر الطبيعية تخضع لهذا التوزيع. كما أن كثير من الظواهر الطبيعية التي لا تخضع لهذا التوزيع يمكن أن يقرب توزيعها بالتوزيع الطبيعي.

**تعريف:**

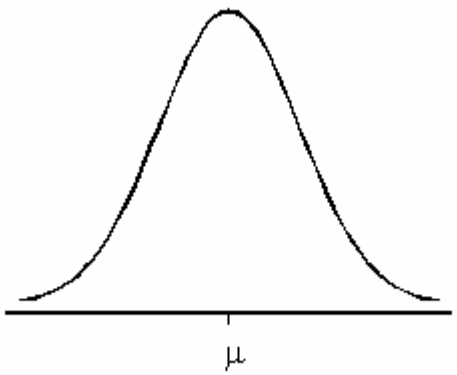
يقال أن المتغير العشوائي المستمر X يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu$ وتباين $\sigma^2$ إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية $f_X(x)$ تأخذ الصيغة التالية:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}; \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{cases}$$

وفي هذه الحالة نكتب:

$$X \sim N(\mu,\sigma^2)$$

إن دالة الكثافة الاحتمالية $f_X(x)$ للمتغير العشوائي الذي يتوزع وفق التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ لها شكل الجرس ومتماثلة حول المتوسط.




**ملاحظات:**

- منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ متماثل حول المتوسط $\mu$.
- للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ فإن: المتوسط = الوسيط = المنوال = $\mu$.
- تعتمد دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ على معلمتي التوزيع وهما المتوسط $\mu$ والتباين $\sigma^2$ لذلك نكتب: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. وهاتان المعلمتان تحددان

$\mu$ تحدد موضع التوزيع والمعلمة $\sigma^2$

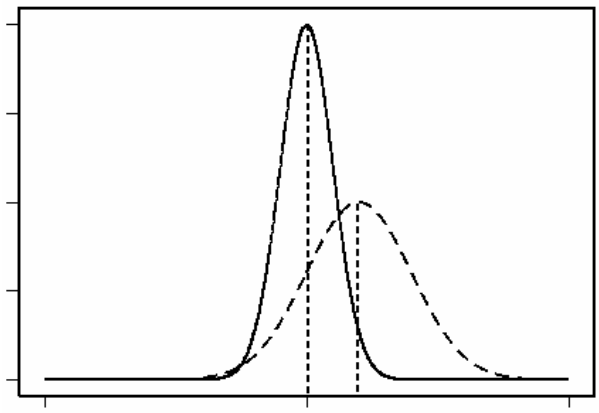
تحدد شكل وتشتت التوزيع.

- المساحة الكلية تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ تساوي الواحد.

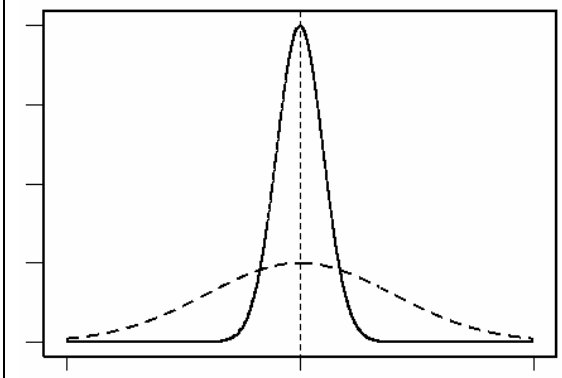
الأشكال التالية تبين تأثير المعالم على شكل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي بفرض أن لدينا توزيعين طبيعيين $N(\mu_1,\sigma^2_1)$ و $N(\mu_2,\sigma^2_2)$ :

_____ $N(\mu_1, \sigma^2_1)$

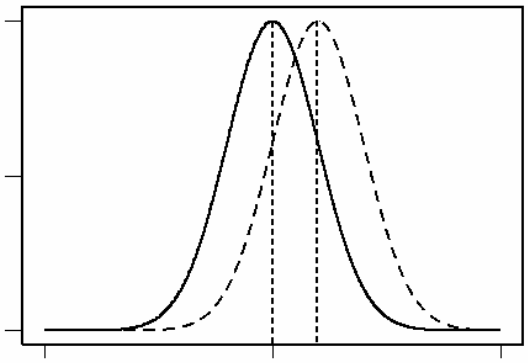
---------- $N(\mu_2, \sigma^2_2)$



$\mu_1 < \mu_2, \sigma^2_1<\sigma^2_2$



$\mu_1 = \mu_2, \sigma^2_1<\sigma^2_2$



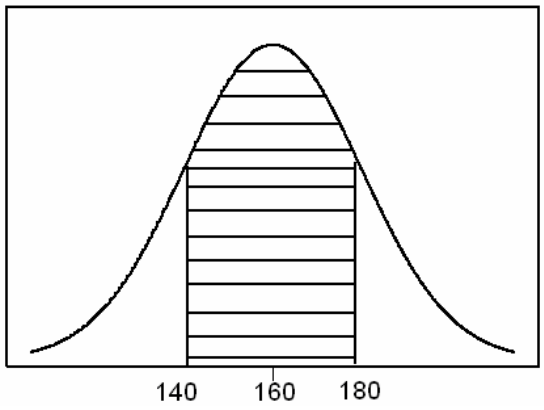
$\mu_1 < \mu_2, \sigma^2_1=\sigma^2_2$

**مثال:**

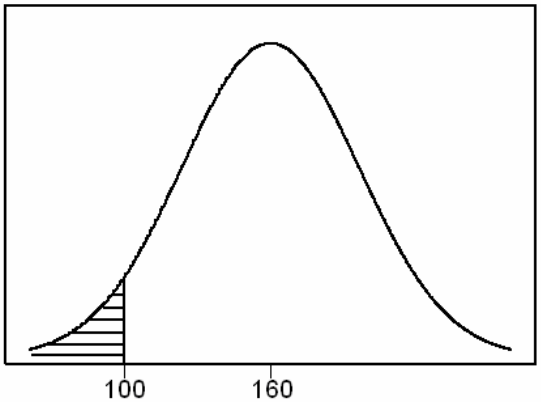
إذا كان طول الشخص في مجتمع ما X يتوزع تقريبًا وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 160 سم وانحراف معياري 5 سم. مثل الاحتمالات التالية بمساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي:

$P(X<100),\ P(140<X<180),\ P(X>180),\ P(X>140)$

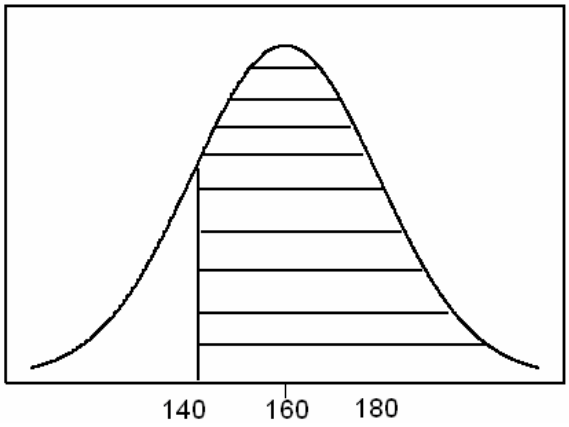
**الحل:**



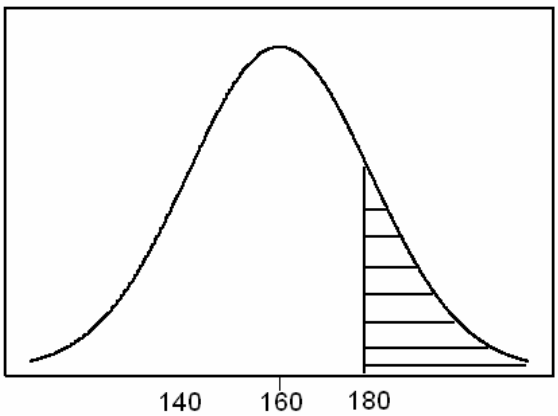

$$P(140<X<180)=\int_{140}^{180} f_X(x)\,dx$$




$$P(X<100)=\int_{-\infty}^{100} f_X(x)\,dx$$




$$P(X>140)=\int_{140}^{\infty} f_X(x)\,dx$$




$$P(X>180)=\int_{180}^{\infty} f_X(x)\,dx$$

## (٧-٥-٣) التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي): Standard Normal Distribution

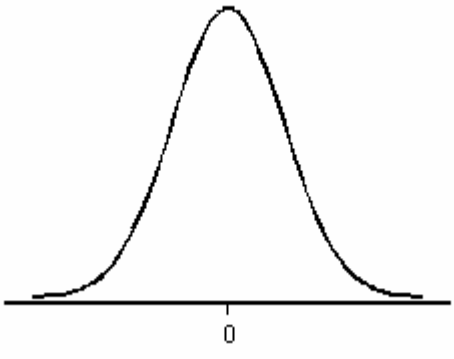
يقال بأن المتغير العشوائي $Z$ يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري إذا كان يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي الصفر ($\mu=0$) وتباين يساوي الواحد ($\sigma^2=1$). ودالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي $Z$ تأخذ الصيغة التالية:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}z^2\};\ -\infty < z < \infty$$

وفي هذه الحالة نكتب:

$$Z \sim N(0,1)$$

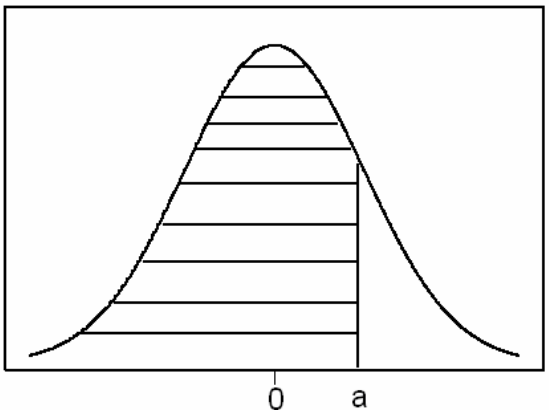
والشكل التالي يصف دالة الكثافة الاحتمالية $f_Z(z)$ للتوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$.




**إيجاد الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري $Z\sim N(0,1)$:**

**Calculating Probabilities for Standard Normal Distribution**

مر معنا سابقًا أن المساحة المحصورة تحت منحنى دالة الكثافة الاحتمالية والواقعة فوق فترة معينة يمثل احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المستمر قيمة في تلك الفترة. فإذا كان $Z\sim N(0,1)$ فإن:




$$P(Z\le a) = \int_{-\infty}^{a} f_Z(z)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}z^2\}\,dz$$

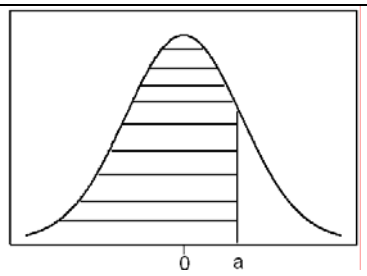
وهذا التكامل يساوي المساحة المحصورة تحت منحنى الدالة $f_Z(z)$ وعن يسار النقطة a

يرمز للاحتمال $P(Z<a)$ بالرمز $\Phi(a)$ أي أن:

$$P(Z\le a) = \Phi(a)$$

هناك جدول خاص يسمى "جدول التوزيع الطبيعي المعياري" لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي المعياري $Z\sim N(0,1)$ من النوع $P(Z\le a) = \Phi(a)$. أي أن هذا الجدول يستخدم لإيجاد الاحتمالات من النوع $P(Z \le z)$ لكل $z\in \mathbf{R}$. ولذلك فإننا في غنى عن إيجاد قيم التكامل السابق. ولإيجاد الاحتمالات المتعلقة بالمتغير العشوائي الطبيعي المعياري $Z\sim N(0,1)$ فإننا نستعين بهذا الجدول مع مراعاة الملاحظات التالية:

1. $P(Z < z) = \Phi(z)$ = من الجدول مباشرة
2. $P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 1 - \Phi(z)$
3. $P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$
   $= \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$
4. $P(Z < 0) = P(Z > 0) = \Phi(0) = 0.5$
5. $P(Z = z) = 0$



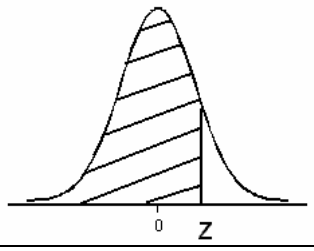
المساحة المظللة = $P(Z < z) = \Phi(z)$

**طريقة إيجاد $P(Z < z) = \Phi(z)$ من الجدول:**

لتكن القيمة z مقربة إلى خانتين عشريتين أي على الصورة $z = a.bc$.

جدول التوزيع الطبيعي المعياري

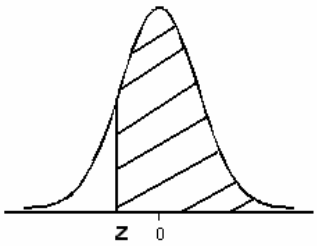
المساحة المظللة = $P(Z < z) = \Phi(z)$




| z | 0.00 | 0.01 | … | 0.0c | … | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| –3.4 | | | | ↓ | | |
| : | | | | ↓ | | |
| a.b | → | → | → → | $P(Z<z)= \Phi(z)$ | | |
| : | | | | | | |
| 3.4 | | | | | | |

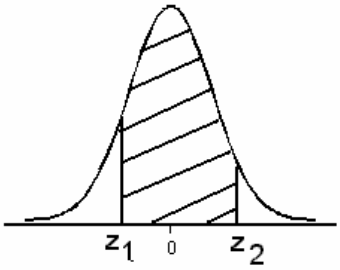
**طريقة إيجاد $P(Z > z)$:**

$P(Z > z) = 1 - P(Z < z) = 1 - \Phi(z)$



**طريقة إيجاد $P(z_1 < Z < z_2)$:**

$$P(z_1 < Z < z_2) = P(Z < z_2) - P(Z < z_1)$$
$$= \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$$




**مثال:**

إذا كان $Z \sim N(0, 1)$ فأوجد:

١. احتمال أن يأخذ Z قيمة أقل من 1.50.

٢. $P(Z < 0.98)$.

٣. $P(Z > 0.98)$

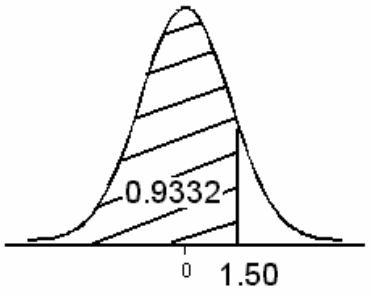
٤. $P(-1.33 < Z < 2.42)$

٥. أوجد قيمة Z التي يسبقها مساحة مقدارها 0.9505.

**الحل:**

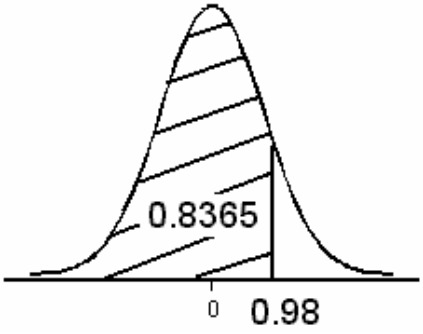
١. $P(Z < 1.50) = \Phi(1.50) = 0.9332$

| z | 0.00 | … |
|---|---|---|
| : | ↓ | |
| : | ↓ | |
| 1.5 | → → 0.9332 | |
| : | | |
| : | | |



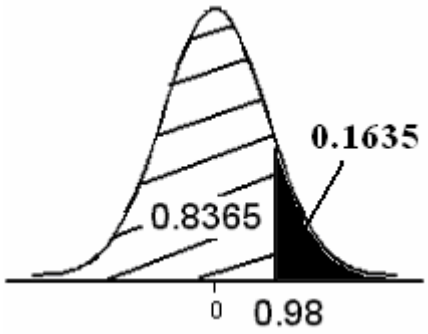

٢. $P(Z < 0.98) = \Phi(0.98) = 0.8365$

| z | … 0.08 | … |
|---|---|---|
| : | ↓ | |
| : | ↓ | |
| 0.9 | → → 0.8365 | |
| : | | |
| : | | |



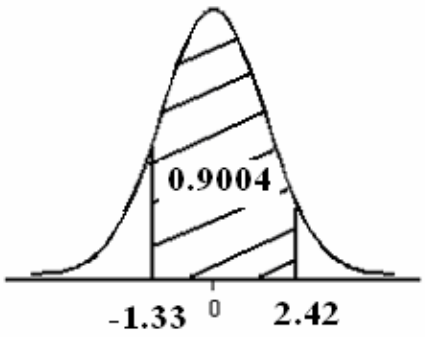
.٣

$$P(Z > 0.98) = 1 - P(Z < 0.98)$$
$$= 1 - \Phi(0.98)$$
$$= 1 - 0.8365$$
$$= 0.1635$$



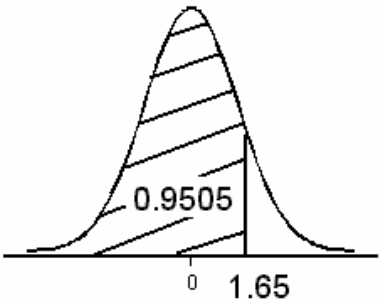

.٤

$$P(-1.33 < Z < 2.42)$$
$$= P(Z < 2.42) - P(Z < -1.33)$$
$$= \Phi(2.42) - \Phi(-1.33)$$
$$= 0.9922 - 0.0918$$
$$= 0.9004$$




.٥ $z = 1.65 \Leftrightarrow P(Z < z) = \Phi(z) = 0.9505$

| z | … 0.05 … |
|---|---|
| : | ↑ |
| : | ↑ |
| 1.6 | ← ← 0.9505 |
| : | |
| : | |




**<u>تحويل التوزيع الطبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ إلى توزيع طبيعي معياري N(0,1)</u>**

**<u>وإيجاد الاحتمـــالات للتوزيـــع الطبيعـــي $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ : Calculating Probabilities for Normal Distribution</u>**

لإيجاد احتمالات المتغير العشوائي الطبيعي $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ فإننا نحوله أولاً إلى متغير عـــشوائي طبيعي معياري $Z\sim N(0,1)$ ومن ثم نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد الاحتمالات من النوع $P(Z < z)= \Phi(z)$ وذلك باستخدام النتيجة التالية:

**نتيجة:**

$$X \sim N(\mu , \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

فمثلاً إذا كان $X \sim N(10,16)$ فإن $Z = \frac{X - 10}{4} \sim N(0,1)$.

وباستخدام النتيجة السابقة فإن:

$$X < x \Leftrightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma} \Leftrightarrow Z < \frac{x - \mu}{\sigma}$$

وبالتالي فإن:

- $P(X < x) = P(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma}) = P(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(Z < \frac{x - \mu}{\sigma}) = 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$
- $P(x_1 < X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1)$

$$= P(Z < \frac{x_2 - \mu}{\sigma}) - P(Z < \frac{x_1 - \mu}{\sigma})$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

**ملاحظة:**

إذا كان $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ وكانت x هي قيمة المتغير العشوائي X فإن القيمة $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ تسمى القيمة المعيارية (أو القياسية) للقيمة x.

**مثال:**

إذا كان المتغير العشوائي X الذي يمثل الطول في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 165 سم وانحراف معياري 5 سم. فأوجد ما يلي:

١. القيمة المعيارية للقيمة $x=172$.

٢. القيمة x إذا كانت القيمة المعيارية هي $z = -0.52$.

**الحل:**

$\mu = 165$
$\sigma = 5 \Leftrightarrow \sigma^2 = 25$
$X \sim N(165 , 25)$

1. $z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{172 - 165}{5} = 1.4$

2. $z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Leftrightarrow x = \mu + \sigma z$

$x = \mu + \sigma z$
$= 165 + 5 \times (-0.52)$
$= 162.5$

**مثال:**

لنفرض أن مستوى هيموجلوبين الدم في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 16 وانحراف معياري 0.9.

١. إذا اخترنا أحد الأشخاص بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يكون مستوى هيموجلوبين الدم لديه أكبر من 14.
٢. ما هي نسبة الأشخاص الذين مستوى هيموجلوبين الدم لديهم أكبر من 14.
٣. ما هي نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموجلوبين الدم لديهم من 14 إلى 18.

**الحل:**

ليكن X = مستوى هيموجلوبين الدم

المعطيات:

$\mu = 16$
$\sigma = 0.9 \Leftrightarrow \sigma^2 = 0.81$
$X \sim N(16 , 0.81)$

١.

$P(X > 14) = 1 - P(X < 14)$
$= 1 - P(Z < \frac{14 - 16}{0.9})$
$= 1 - P(Z < -2.22)$
$= 1 - \Phi(-2.22)$

$= 1 - 0.0132$
$= 0.9868$

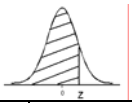
٢. نسبة الأشخاص الذين مستوى هيموجلوبين الدم لديهم أكبر من 14 هي:

$P(X > 14) \times 100\% = 0.9868 \times 100\% = 98.68\%$

.٣

$$P(14 < X < 18) = P(X < 18) - P(X < 14)$$
$$= P(Z < \frac{18-16}{0.9}) - P(Z < \frac{14-16}{0.9})$$
$$= P(Z < 2.22) - P(Z < -2.22)$$
$$= \Phi(2.22) - \Phi(-2.22)$$
$$= 0.9868 - 0.0132$$
$$= 0.9736$$

وعليه فإن نسبة الأشخاص الذين يتراوح مستوى هيموجلوبين الدم لديهم من 14 إلى 18 هي 97.36%.



## جدول التوزيع الطبيعي المعياري

| Z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -3.4 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0002 |
| -3.3 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0003 |
| -3.2 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 |
| -3.1 | 0.0010 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0007 | 0.0007 |
| -3.0 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 |
| -2.9 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| -2.8 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| -2.7 | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| -2.6 | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| -2.5 | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| -2.4 | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| -2.3 | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| -2.2 | 0.0139 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| -2.1 | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| -2.0 | 0.0228 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| -1.9 | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| -1.8 | 0.0359 | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| -1.7 | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| -1.6 | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| -1.5 | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| -1.4 | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| -1.3 | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| -1.2 | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| -1.1 | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| -1.0 | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| -0.9 | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| -0.8 | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| -0.7 | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| -0.6 | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| -0.5 | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| -0.4 | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| -0.3 | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| -0.2 | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| -0.1 | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| -0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |