METHODE DU PIVOT DE GAUSS

La *méthode du pivot de Gauss* permet la résolution générale des systèmes d'équations linéaires à n équations et p inconnues. Elle s'utilise notamment pour leur résolution numérique à l'aide d'un *programme informatique*, et permet la résolution de systèmes comptant un grand nombre d'inconnues et d'équations (plusieurs centaines, voire plusieurs milliers).

Dans tous les cas, la méthode du pivot de Gauss permet de déterminer si le système a des solutions ou non (et notamment de savoir s'il est un système de Cramer lorsque $n = p$). Le cas des systèmes de Cramer à deux ou trois inconnues a été traité dans le chapitre 4, page 45, de "Toutes les mathématiques" (TLM1).

Lorque le système a des solutions, la méthode du pivot permet de les calculer. Notamment, si $n = p$ et si le système a une solution unique (système de Cramer), on peut la calculer de manière beaucoup plus économique (en nombre d'opérations) que par les formules de Cramer. Lorsque la solution du système n'est pas unique, la méthode du pivot permet d'exprimer les solutions à l'aide des *inconnues principales*.

1 Etude d'un exemple

Reprenons le système de l'exemple 4.8 de TLM1 (page 47), qui est un système de Cramer :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ll} x + y + 2z & = -1 \qquad (1) \\ 2x - y + 2z & = -4 \qquad (2) \\ 4x + y + 4z & = -2 \qquad (3) \end{array} \right.$$

On peut résoudre le système (S) en *éliminant* d'abord l'inconnue x dans les équations (2) et (3), ce qui peut se faire en multipliant l'équation (1) par 2 et en la soustrayant à l'équation (2), et en la multipliant par 4 et en la soustrayant à l'équation (3). Cela signifie qu'on effectue les opérations $(2) \leftarrow (2) - 2 \times (1)$ et $(3) \leftarrow (3) - 4 \times (1)$. On obtient le *système équivalent* :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{ll} x + y + 2z & = -1 \qquad (1) \\ -3y - 2z & = -2 \qquad (2) \\ -3y - 4z & = 2 \qquad (3) \end{array} \right.$$

On peut maintenant éliminer y dans la troisième équation grâce à l'opération $(3) \leftarrow (3) - (2)$. On obtient le système équivalent :

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{ll} x + y + 2z & = -1 \qquad (1) \\ -3y - 2z & = -2 \qquad (2) \\ -2z & = 4 \qquad (3) \end{array} \right.$$

Le système (S_2) obtenu est *triangulaire*. On divise la dernière équation par -2, ce qui revient à effectuer l'opération $(3) \leftarrow -\frac{1}{2} \times (3)$. Cela donne z et le système équivalent :

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{ll} x + y + 2z & = -1 \qquad (1) \\ -3y - 2z & = -2 \qquad (2) \\ z & = -2 \qquad (3) \end{array} \right.$$

Maintenant, on "remplace" z dans (1) et (2) en effectuant les opérations $(2) \leftarrow (2) + 2 \times (3)$ et $(1) \leftarrow (1) - 2 \times (7)$, pour obtenir le système équivalent :

$$(S_4) \left\{ \begin{array}{ll} x + y & = 3 \qquad (1) \\ -3y & = -6 \qquad (2) \\ z & = -2 \qquad (3) \end{array} \right.$$

En divisant l'équation (2) par -3, c'est-à-dire en effectuant $(2) \leftarrow -\frac{1}{3} \times (2)$, on obtient y et le système équivalent :

$$(S_5)\ \left\{\begin{array}{rll} x+y & = 3 & (1) \\ y & = 2 & (2) \\ z & = -2 & (3) \end{array}\right.$$

En effectuant enfin $(1) \leftarrow (1) - (2)$, on obtient x et le système équivalent :

$$(S_6)\ \left\{\begin{array}{rll} x & = 1 & (1) \\ y & = 2 & (2) \\ z & = -2 & (3) \end{array}\right.$$

Ainsi, par une suite d'opérations élémentaires sur les équations du système, on a montré que le système (S) avait une solution unique $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$.

On conçoit bien cependant que l'écriture du système sous forme d'équations n'est pas la mieux adaptée à cette suite d'opérations. En fait, la seule chose qui compte vraiment, c'est de connaître les *coefficients des inconnues* et le *second membre* du système.

L'idée de la méthode du pivot de Gauss consiste donc à remplacer le système (S) par une matrice faisant intervenir à la fois des coefficients des inconnues et le second membre du système, exactement dans l'ordre dans lequel ils apparaissent. Cette matrice s'appelle la *matrice augmentée* associée à (S). Dans notre exemple, elle s'écrit

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

Les opérations sur les *équations* du système reviennent alors à des opérations sur les *lignes* de la matrice augmentée :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\longrightarrow} G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\longrightarrow} G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\longrightarrow} G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}}{\longrightarrow} G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\longrightarrow} G_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\longrightarrow} G_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice G_6 exprime que (S) a une solution unique, $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$.

2 Méthode du pivot de Gauss

2.1 Démarrage

Dans le cas général, nous considérons un système linéaire (S) à n équations et p inconnues x_1, x_2, ..., x_p :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$$

On note comme d'habitude (TLM1, page 544)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$$

respectivement la matrice associée au système , le vecteur colonne associé au second membre, et le vecteur colonne des inconnues. Ainsi la résolution de (S) équivaut à trouver X tel que

$$AX = B.$$

En pratique, on dispose le système en matrice sans les inconnues. La *matrice augmentée* associée au système est

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p+1}(\mathbb{K}).$$

On opère alors uniquement sur les lignes de A_0. La méthode du pivot consiste d'abord à amener le système à un *système triangulaire*, ceci uniquement par opérations élémentaires sur les lignes.

On suppose que la première colonne n'est pas identiquement nulle (sinon l'inconnue x_1 n'apparait pas !), ainsi quitte à permuter les lignes, on suppose que $a_{11} \neq 0$. Ce coefficient a_{11} est dit *pivot*, l'inconnue x_1 est dite une *inconnue principale*.

Par opérations élémentaires sur les lignes, on "met" des 0 sous le pivot :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & b_n \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}} L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2p} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{np} & b'_n \end{pmatrix} = F.$$

Deux cas peuvent alors se présenter, en fonction de la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2.2 Premier cas

Supposons d'abord que $A' = 0$ (matrice nulle). Alors, si l'un des b'_i est différent de 0, le système n'a pas de solution car la dernière ligne de la matrice F ci-dessus représente les équations

$$\begin{cases} 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_p = b'_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_p = b'_n \end{cases}$$

Par contre, si $b'_2 = \cdots = b'_n = 0$, il y a des solutions. La première ligne de F permet en effet d'exprimer x_1 (inconnue *principale*) en fonction de $x_2, \cdots, x_n$ (inconnues dites *secondaires*). Chaque valeur des inconnues secondaires donne une solution du système. Le rang du système est 1 : il est égal au nombre d'inconnues principales et au rang de la matrice A du système (TLM1, définition 45.10, page 596).

Les relations $b'_2 = \cdots = b'_n = 0$ sont dites *relations de compatibilité*. Si elles ne sont pas vérifiées, le système n'a pas de solution.

Exemple 1 Soit a un paramètre. Considérons le système

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 2 \\ -x - 2y + z = a \end{cases}$$

En l'écrivant sous forme matricielle et en prenant le 1 qui figure en haut et à gauche comme pivot, il vient

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & a \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi (S) est équivalent au système suivant :

$$(S') \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = a + 1 \end{cases}$$

Ce système a une solution si et seulement si $a = -1$. Dans ce cas, on exprime les inconnues principales en fonctions des inconnues secondaires, et

$$(S)_- \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y + z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

L'ensemble des solution est $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{solution du système homogène}},\ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

2.3 Deuxième cas

Supposons maintenant que la matrice A' définie en (1) n'est pas la matrice nulle.

Premier sous-cas : La première colonne de A' est non nulle. Quitte à permuter les lignes (ce qui revient seulement à permuter les équations), on peut supposer que $a'_{22} \neq 0$. Ce coefficient devient le deuxième pivot, x_2 est dite inconnue principale. A l'aide de ce pivot, on "met" des zéros sous a_{22} :

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2p} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{np} & b'_n \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} L_2 \\ \vdots}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & \boxed{a'_{22}} & \cdots & \cdots & a'_{2p} & b'_2 \\ & 0 & a''_{33} & \cdots & a''_{3p} & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{np} & b''_n \end{pmatrix}.$$

On note alors

$$A'' = \begin{pmatrix} a''_{33} & \cdots & a''_{3p} \\ \vdots & & \vdots \\ a''_{n3} & \cdots & a''_{np} \end{pmatrix} \tag{2}$$

et on réitère le procédé en procédant sur A'' comme on a procédé sur A'.

Deuxième sous-cas : La première colonne de A' est nulle. Alors x_2 est dite inconnue secondaire. Si la deuxième colonne de A' est nulle, x_3 est dite aussi inconnue secondaire . Comme A' n'est pas identiquement nulle, une de ces colonnes n'est pas nulle, et quitte à permuter les lignes, on peut supposer que

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a'_{2j} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} \end{pmatrix},$$

avec $a'_{2j} \neq 0$. Le coefficient a'_{2j} est alors le second pivot, x_j est une inconnue principale et $x_2, x_3, \cdots, x_{j-1}$ sont dites inconnues secondaires. A l'aide de ce pivot, on "met" des 0 sous a_{2j} :

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & 0\cdots 0 & \boxed{a'_{2j}} & \cdots & a'_{2p} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\cdots 0 & a'_{nj} & \cdots & a'_{np} & b'_n \end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a'_{3j}}{a'_{2j}} L_2 \\ \vdots}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ 0 & 0\cdots 0 & \boxed{a'_{2j}} & \cdots & a'_{2p} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & 0 & & & b''_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & (A'') & & \vdots \\ 0 & 0\cdots 0 & 0 & & & b''_n \end{pmatrix}.$$

On recommence alors le procédé avec la matrice A''.

Conclusion : A la fin du processus, on obtient une matrice de la forme suivante, dite *forme échelonnée* :

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \times & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & a_{1p} & | & \beta_1 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \boxed{a'_{2j}} & \cdots & & \cdots & a'_{2p} & | & \beta_2 \\ \vdots & & & 0 & & & & & | & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & \boxed{a^{(r)}_{rk}} & \times & \cdots & | & \beta_r \\ \vdots & & & & & 0 & \cdots & 0 & | & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & | & \beta_n \end{pmatrix}$$

Le rang du système est $r =$ *nombre de pivots*. Les inconnues principales sont les inconnues qui correspondent aux pivots (x_j est une inconnue principale si la colonne j contient un pivot). Il y a $r = \mathrm{rg}(S)$ inconnues principales. Les autres inconnues sont dites secondaires.

Dans le cas où $n = p = r$, le système est un système de Cramer et la méthode du pivot de Gauss donne l'unique solution du système (voir l'exemple traité en section 1).

Dans le cas général, les *relations de compatibilité* sont $\beta_{r+1} = \cdots = \beta_n = 0$. *Le système n'a des solutions que si ces relations sont vérifiées.* Dans ce cas, *on exprime les inconnues principales en fonctions des inconnues secondaires.*

Exemple 2 Considérons le système de 3 équations à 4 inconnues

$$(S) : \begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + y + z - t = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on écrit

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ceci est la forme échelonnée. Ainsi (S) est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} \boxed{1}x & +2y & +z & +t & = 1 \\ & \boxed{-1}y & & -2t & = 1 \\ & & \boxed{-1}z & +4t & = -2 \end{cases}$$

Les inconnues principales sont x, y, z. L'inconnue secondaire est t. Il n'y a pas de relation de compatibilité. En "remontant" à partir du dernier pivot comme dans l'exemple traité en section 1, il vient d'abord

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Puis en "remontant" à partir de l'avant dernier pivot, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ceci se traduit par le système :

$$\begin{cases} x + t = 1 \\ y + 2t = -1 \\ z - 4t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$$

Par conséquent les solutions du système (S) sont données par

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il y a une infinité de solutions dépendant du paramètre t (inconnue secondaire).

Exemple 3 Soit a un paramètre réel, et soit le système

$$(S) : \begin{cases} x + y + 2z - t - u = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + 2y - z + 4t + 4u = 2 \\ 3x + 3y + z - 6t - 6u = 93 \\ x + y = a \end{cases}$$

Nous indiquons les résultats successifs des opérations, les détails étant laissés au lecteur.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & -6 & -6 & 93 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & -3 & 90 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -8 & 80 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & a-5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-15 \end{pmatrix}.$$

On est arrivé à la forme échelonnée. Le système (S) est donc équivalent à

$$\begin{cases} \boxed{1}x + y + 2z - t - u = 1 \\ \boxed{-1}z + t + u = 2 \\ \boxed{1}t + u = -10 \\ 0 = 0 \\ 0 = a - 15 \end{cases}$$

Les inconnues principales sont x, z, t. Les inconnues secondaires sont y et u. Il y a une relation de compatibilité : $a = 15$. Si $a \neq 15$, il n'y a pas de solution. Si $a = 15$, la "remontée" grâce aux pivots successifs s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -10 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions du système est donc

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -12 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ (y,u) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Il y a une infinité de solutions dépendant des paramètres y et u (inconnues secondaires).

Exercices

Exercice 1 Résoudre le système suivant par la méthode du pivot :

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{array} \right.$$

Exercice 2 Résoudre le système suivant par la méthode du pivot :

$$(S_2) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{array} \right.$$

Exercice 3 Résoudre le système suivant par la méthode du pivot :

$$(S_3) \left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 7y = -4 \\ x + 2y - 3z = 6 \\ 7x + 4y - z = 22 \end{array} \right.$$

Exercice 4 Déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système

$$(\Sigma_a) \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3 \end{array} \right.$$

a) N'a pas de solution.
b) A une infinité de solutions.
c) A une solution unique.

Exercice 5 Déterminer la solution générale et une base de l'espace des solutions du système

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - t + w = 0 \\ x + y + 2z - t = 0 \\ 2x - 2y + 3z - t + 2w = 0 \\ 4x - 2y + 6z - 3t + 3w = 0 \end{array} \right.$$

Solutions des exercices

Exercice 1 La matrice augmentée associée au système s'écrit

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

On effectue les opérations suivantes :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & -2 & 9 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 8L_1}}{\longrightarrow} G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & -14 & 22 & 17 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ici G_2 est la forme échelonnée. La dernière ligne équivaut à $0 = -7$. Il y a donc incompatibilité et le système (S_1) n'a pas de solution.

Exercice 2 On effectue les opérations suivantes sur la matrice augmentée associée au système, en faisant apparaître d'abord le 1 de la deuxième équation comme premier pivot par échange des deux premières équations :

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 4 & -9 \\ 7 & 5 & 1 & 14 \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{\longrightarrow} G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 2 & 1 & -2 & 10 \\ 7 & 5 & 1 & 14 \end{pmatrix} \\ \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1}}{\longrightarrow} G_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & -1 & -10 & 28 \\ 0 & -2 & -27 & 77 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\longrightarrow} G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & -1 & -10 & 28 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En examinant G_3 (forme échelonnée), on voit que le système a une solution unique, qu'on obtient en "remontant" :

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{7}L_3}{\longrightarrow} G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -9 \\ 0 & -1 & -10 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 10L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3}}{\longrightarrow} G_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\longrightarrow} G_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le système (S_2) a donc pour unique solution $x = 1$, $y = 2$ et $z = -3$.

Exercice 3 On met la matrice augmentée sous forme échelonnée, grâce aux opérations suivantes :

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 6 \\ 7 & 4 & -1 & 22 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1}}{\longrightarrow} G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & 10 \\ 0 & -10 & 20 & -20 \end{pmatrix} \\ \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2/5 \\ L_3 \leftarrow L_3/10}}{\longrightarrow} G_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longrightarrow} G_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La relation de compatibilité est ici vérifiée, la dernière équation disparaît. Les inconnues principales sont x et y, z étant l'inconnue secondaire. Il vient en "remontant" :

$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to G_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc les solutions du système sont $x = -2 - z$, $y = 2 + 2z$, $z = z$, c'est-à-dire

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il y a une infinité de solutions dépendant du paramètre z (inconnue secondaire).

Exercice 4 La matrice augmentée associée au système s'écrit

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}).$$

On effectue les opérations suivantes pour arriver à la forme échelonnée :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 2 & a & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\longrightarrow} G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & a-2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (a-2)L_2}{\longrightarrow} G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & (a+2)(3-a) & 3-a \end{pmatrix}.$$

car $4-(a+1)(a-2) = -a^2+a+6 = -(a+2)(a-3) = (a+2)(3-a)$.

Cette forme échelonnée montre que trois cas peuvent se présenter :

a) Si $a=-2$, la dernière ligne représente l'équation $0=5$, (Σ) n'a donc pas de solution.

b) Si $a=3$, la relation de compatibilité est vérifiée, et dans ce cas x et y sont les inconnues principales, tandis que z est l'inconnue secondaire, qui va servir à exprimer l'ensemble des solutions :

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\longrightarrow} G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les solutions sont donc $x=5z$, $y=1-4z$, $z=z$.

c) Si $a \neq -2$ ou $a \neq 3$, le système a une solution unique, qu'on obtient en "remontant" :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & (a+2)(3-a) & 3-a \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow \frac{1}{(a+2)(3-a)} L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (a+1)L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{a+3}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a+2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'unique solution du système est $x=1$, $y=\frac{1}{a+2}$, $z=\frac{1}{a+2}$.

Exercice 5 On met la matrice du système sous forme échelonnée. On notera que ce système est un *système homogène*, c'est-à-dire que son second membre est nul. Il a donc au moins la solution $x=y=z=t=w=0$. On rencontre des systèmes homogènes notamment dans la recherche de noyaux, effectuée jusqu'à présent par substitution (TLM1, section 46.2, page 603).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2,}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La troisième et la quatrième lignes sont identiques, on peut donc en supprimer une. On prend ensuite t et w comme inconnues secondaires (paramètres) et le "1" encadré comme pivot :

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 - L_3 \\ L_1 \leftarrow -L_1 - L_3}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow -L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les solutions du système sont donc données par $x=\frac{5}{2}t-\frac{1}{2}w$, $y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}w$, $z=-t$. Pour éviter les fractions, introduisons les paramètres $\lambda=\frac{1}{2}t$, $\mu=\frac{1}{2}w$. Les solutions du système s'écrivent :

$$x=5\lambda-\mu,\ \ y=\lambda+\mu,\ \ z=-2\lambda,\ \ t=2\lambda,\ \ w=2\mu.$$

L'ensemble F des solutions de l'équation est donc

$$\mathsf{F} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Il s'agit d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^5$. En fait $\mathsf{F} = \operatorname{Ker} \varphi$ est le noyau de l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ associée à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}^4$.