

---

## Chapitre 2 : Etude des systèmes linéaires

### I- Systèmes de premier ordre

#### 1. Définition

On appelle système de premier ordre d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$  tout système régi par une équation différentielle de type :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t)$$

Avec :

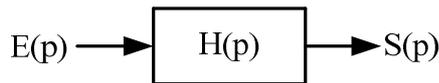
$K$  : gain statique,

$\tau$  : constante de temps (en s).

En appliquant la transformée de Laplace à cette équation à condition initiale nulle ( $s(0) = 0$ ).

On peut alors définir la fonction de transfert (ou transmittance) du système de premier ordre par la forme canonique de suivante :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

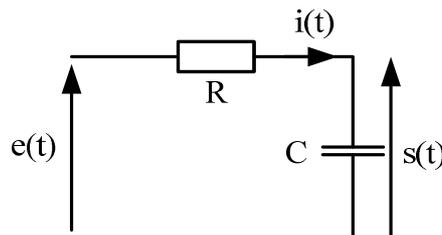


#### 2. Exemples

##### Circuit RC :

Charge d'une capacité  $C$  au travers d'une résistance.

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$



A condition initiale est nulle ( $s(0) = 0$ ) la fonction de transfert est défini par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \tau_e p}, \text{ Avec : } \tau_e = RC.$$

---

### Circuit RL :

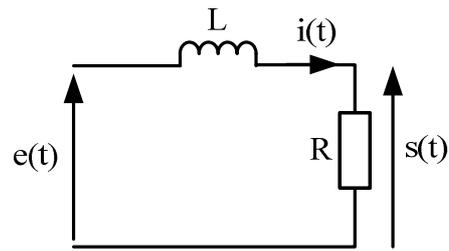
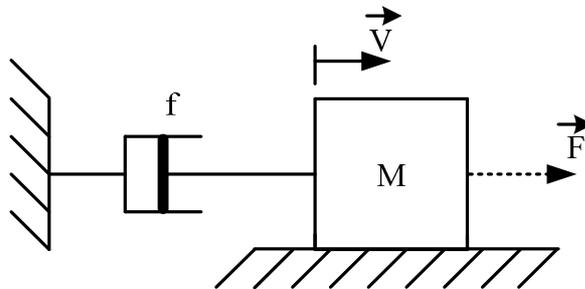


Figure-1-Circuit RL

A condition initiale nulle ( $s(0) = 0$ ) la fonction de transfert est défini par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + \tau_e p}, \text{ Avec : } \tau_e = \frac{L}{R}.$$

### Système mécanique :



Avec :

f : coefficient de frottement,

M : masse du corps en mouvement,

F : force extérieure appliquée.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique (RFD) pour ce système donne :

$$F = M \frac{dv}{dt} + f v$$

La transformée de Laplace, à conditions initiales nulles, donne

$$F(p) = (Mp + f)V(p)$$

La fonction de transfert de ce système est :

$$\frac{V(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp + f} = \frac{\frac{1}{f}}{1 + \frac{M}{f} p}$$

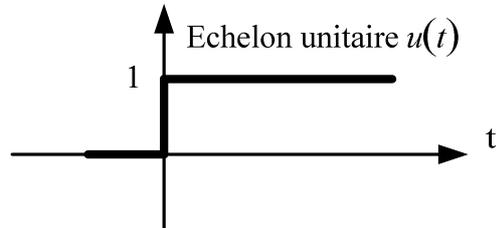
avec :  $\tau_m = \frac{M}{f}$  , constante mécanique

---

### 3. Etude temporelle

#### a. Réponse indicielle

On considère une entrée  $e(t) = Eu(t)$  où  $u(t)=1$  ( $t > 0$ ) est un échelon unitaire décrit par la figure suivante :

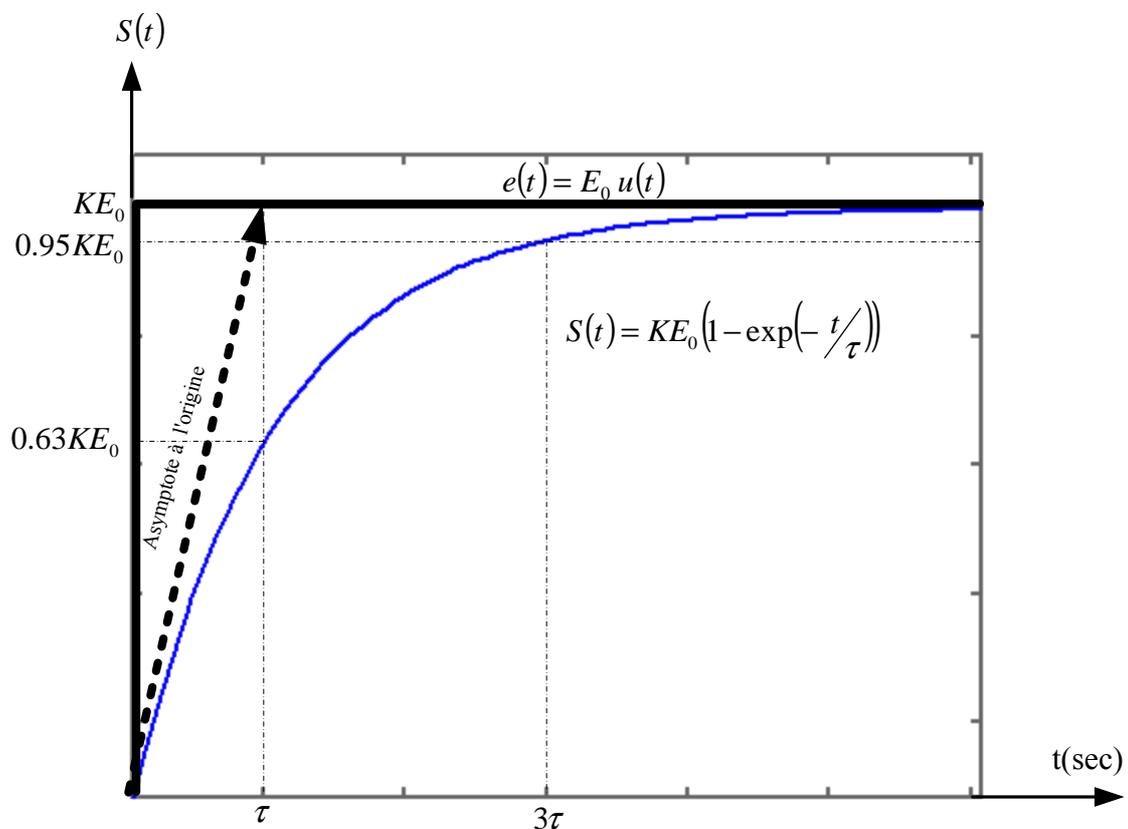


$$E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{p(1 + \tau p)}$$

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = KE_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) u(t)$$

$$s(t) = KE_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) u(t)$$



Pour le système de premier ordre on définit les paramètres suivants :

---

❖ **Constante de temps** :  $s(\tau) = KE_0(1 - e^{-1}) = 0.63KE_0$

C'est le temps au bout duquel la réponse atteint 63% de la valeur finale. La constante de temps du système caractérise la rapidité du régime transitoire.

❖ **Temps de stabilisation à 5% (ou de réponse)** :  $s(3\tau) = KE_0(1 - e^{-3}) = 0.95KE_0$

Le temps de réponse est défini comme étant le temps au bout duquel la réponse du système ne s'écarte pas de plus de 5% de son état permanent.

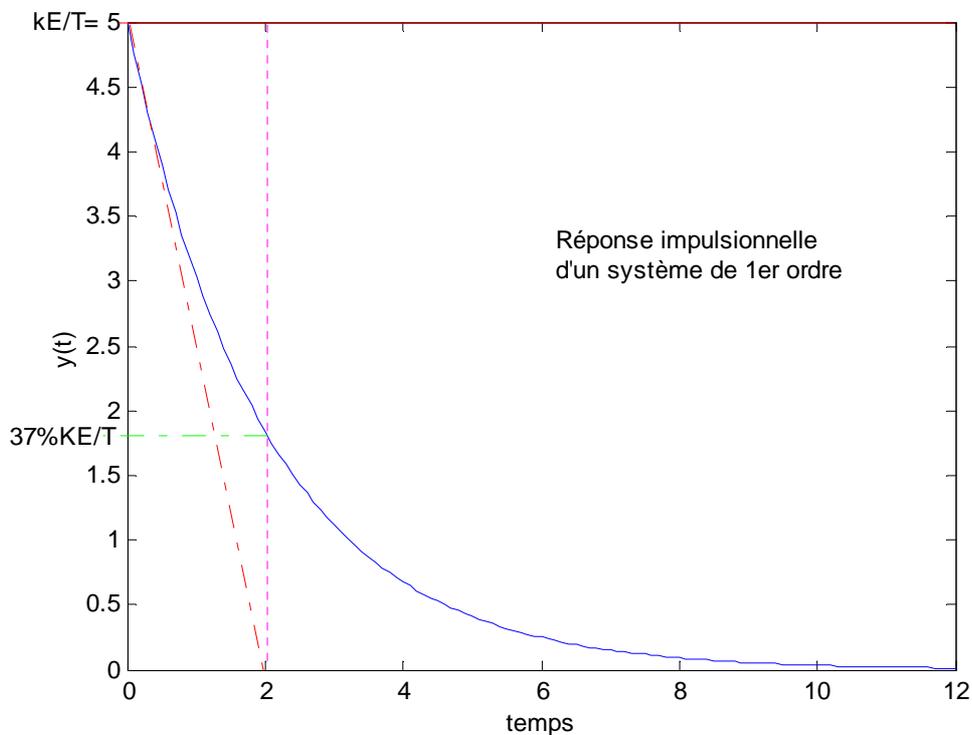
Pour le système de premier ordre  $t_r$  à 95% =  $3\tau$ .

**b. Réponse à une impulsion**  $e(t) = \delta(t) = 1$  pour  $t = 0$

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow S(p) = \frac{k}{1 + \tau p} E(p)$$

$$E(p) = E_0 \Rightarrow S(p) = \frac{kE_0}{1 + \tau p} = \frac{kE_0}{\tau} \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{\tau} + p} \right) \quad \text{donc} \quad \boxed{s(t) = \frac{kE_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$s(\tau) = 0.36 \frac{kE_0}{\tau}$$



**Réponse impulsionnelle d'un système de 1<sup>er</sup> ordre (KE=10).**

---

\*\*si  $t \rightarrow 0$ ;  $y(t) \rightarrow \frac{kE_0}{\tau}$

\*\* si  $t \rightarrow \infty$ ;  $y(t) \rightarrow 0$

**c. Réponse à une rampe**

On a  $e(t) = E_0 t u(t)$ , soit  $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

$$S(p) = H(p)E(p) = \frac{KE_0}{P^2(1 + \tau p)}$$

Décompositions en éléments simples  $S(p)$

$$S(p) = \frac{KE_0}{P^2(1 + \tau p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{1 + \tau p}$$

$$B = [p^2 S(p)]_{(p=0)} = kE_0$$

$$C = [(1 + \tau p) S(p)]_{(p = -\frac{1}{\tau})} = kE_0 \tau^2$$

$$S(p) = \frac{kE_0}{p^2(1 + \tau p)} = \frac{A p(1 + \tau p) + B(1 + \tau p) + C p^2}{p^2(1 + \tau p)} = \frac{B + (A + B\tau)p + (C + A\tau)p^2}{p^2(1 + \tau p)}$$

Par identification terme à terme on aura :  $KE_0 = B + (A + B\tau)p + (C + A\tau)p^2$

$$\begin{cases} B = kE_0 \\ (A + B\tau)p = 0 \\ (C + A\tau)p^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = kE_0 \\ A = -kE_0\tau \\ C = kE_0\tau^2 \end{cases}$$

Finalement  $S(p) = \frac{kE_0}{p^2(1 + \tau p)} = kE_0 \left[ -\frac{\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau^2}{1 + \tau p} \right]$

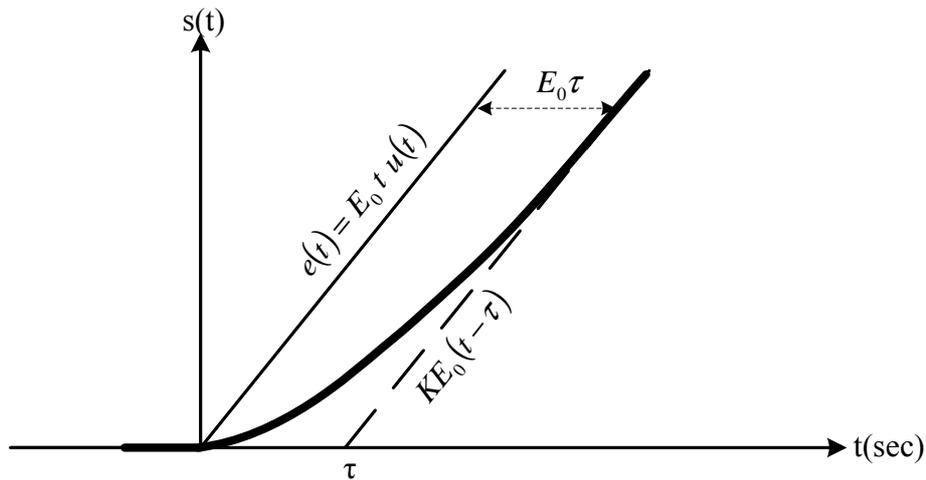
En appliquant la transformée inverse de Laplace, on obtient :

$$s(t) = L^{-1}[S(p)] = K E_0 \tau \left( \frac{t}{\tau} - 1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) u(t)$$

Pout t tend vers l'infini :

L'équation de l'asymptote :  $y = KE_0(t - \tau)$

---



Erreur de traînage : erreur entrée-sortie en régime permanent

$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - s(t)]$$

si  $k \gg 1$  alors  $\varepsilon \rightarrow -\infty$

si  $k = 1$  alors  $\varepsilon \rightarrow E_0 \tau$

si  $k \ll 1$  alors  $\varepsilon \rightarrow +\infty$

#### 4. Etude harmonique (fréquentielle) ( $p = j\omega$ )

La transmittance harmonique du système est :  $H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{K}{1 + j\tau\omega}$

Posons  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$  et  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$

$$H(ju) = \frac{K}{1 + ju}$$

- Module de  $H(ju)$

$$|H(ju)| = \frac{K}{\sqrt{1+u^2}}$$

- Argument de  $H(ju)$

$$\varphi = \arg[H(ju)] = -\arctg(u)$$

##### a. Diagramme de Bode

##### Diagramme asymptotique

Posons  $|H(ju)| = |H|$

##### Etude du module et de l'argument

➤ Pour  $\omega = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow \begin{cases} |H| = k & \text{ou } |H|_{dB} = 20 \log_{10}(k) \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$

- 
- Pour  $\omega = \omega_0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = \frac{k}{\sqrt{2}} & \text{ou } |H|_{dB} = 20\log_{10}(K) - 3 \\ \varphi = -45^\circ \end{cases}$
  - Pour  $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow u \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = K & \text{ou } |H|_{dB} = 20\log_{10}(K) \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$
  - Pour  $\omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow u \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = \frac{K}{u} & \text{ou } |H|_{dB} = 20\log_{10}(K) - 20\log_{10}(u) \\ \varphi = -90^\circ \end{cases}$

La représentation asymptotique de Bode en amplitude est donc composée de deux asymptotes :

- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour  $(\omega \ll \omega_0) \quad |H|_{dB} = 20\log_{10}(K)$
- ✓ Une asymptote oblique d'équation  $(|H|_{dB} = 20\log_{10}(K) - 20\log_{10}(u))$  de pente  $(-20)dB/décade$  pour  $(\omega \gg \omega_0)$
- ✓ Le point d'intersection entre les deux asymptotes est le point où  $\omega = \omega_0$

La représentation asymptotique de Bode en phase est donc composée de deux asymptotes :

- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour  $(\omega \ll \omega_0) \quad (\varphi = 0^\circ)$
- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour  $(\omega \gg \omega_0) \quad (\varphi = -90^\circ)$

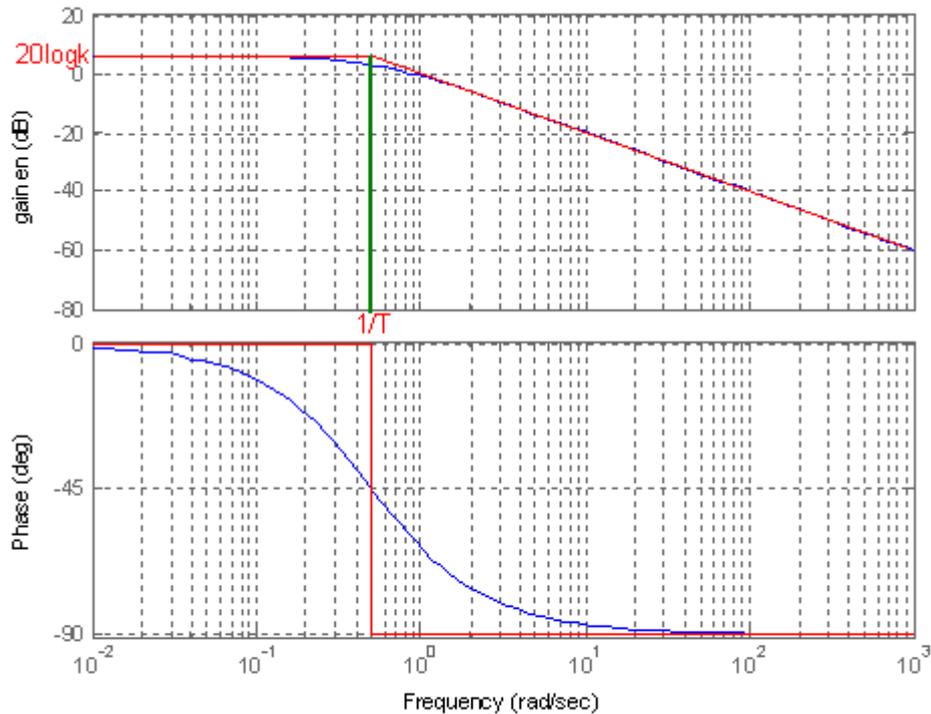


Diagramme de Bode d'un système de premier ordre

Le système possède une fréquence de coupure pour  $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$

**Remarque** pour tracer le diagramme de Bode, il faut utiliser du papier semi-logarithmique.

### b. Diagramme de Nyquist

Il représente dans le plan complexe la partie imaginaire en fonction de la partie réelle et qui évolue en fonction de  $\omega$ .

On représente  $\text{Im} [H(j\omega)] = f(\text{réel}[H(j\omega)])$

$$H(ju) = \frac{K}{1+ju} = \frac{K(1-ju)}{(1+ju)(1-ju)} = \frac{K}{1+u^2} - j \frac{Ku}{1+u^2}$$

$$\text{Posons : } \begin{cases} X = \frac{K}{1+u^2} & (1) \\ Y = -\frac{Ku}{1+u^2} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) \Rightarrow u^2 = \frac{K}{X} - 1 & (1') \\ (2) \Rightarrow Y = -uX & (2') \end{cases}$$

$$(2')^2 \Rightarrow Y^2 = u^2 X^2 = \left(\frac{K}{X} - 1\right) X^2 = KX - X^2$$

$$Y^2 = kX - X^2$$

$$\Rightarrow Y^2 + X^2 - kX = 0$$

$$Y^2 + \left[ X^2 - 2X \frac{k}{2} + \left( \frac{k}{2} \right)^2 \right] = \left( \frac{k}{2} \right)^2$$

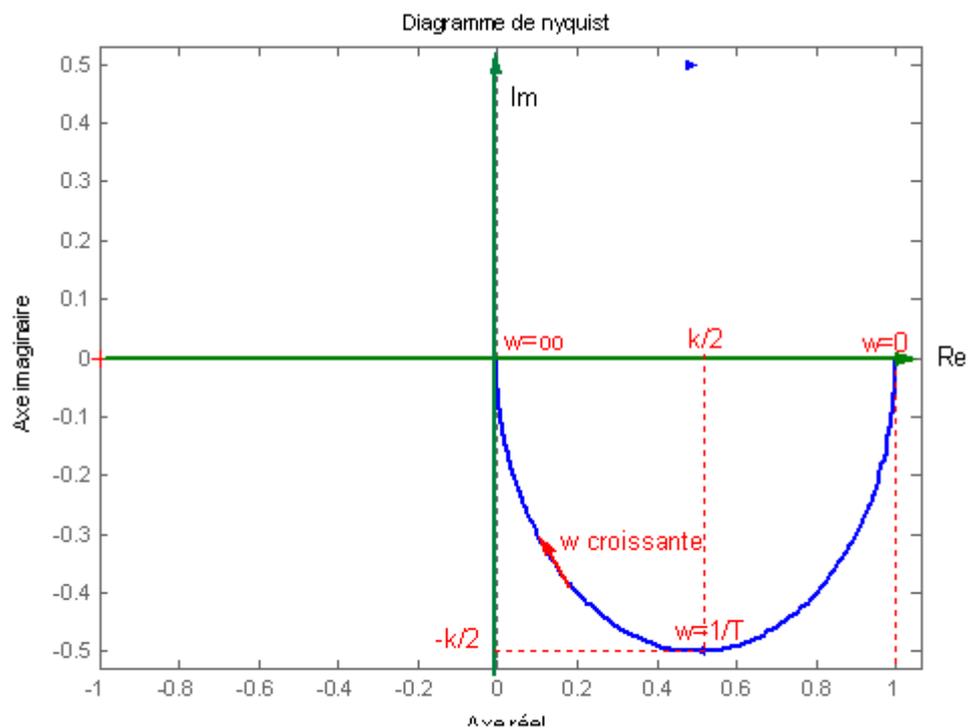
$$\Rightarrow \left( X - \frac{k}{2} \right)^2 + Y^2 = \left( \frac{k}{2} \right)^2$$

Le lieu de Nyquist est un cercle de centre  $\left( \frac{k}{2}, 0 \right)$  et de rayon  $\left( \frac{k}{2} \right)$

Or  $\forall \omega \in [0, \infty[$ , on a  $\begin{cases} X > 0 \\ Y < 0 \end{cases}$

$\omega$	$\omega = 0$	$\omega = 1/\tau$	$\omega \rightarrow \infty$
X	k	k/2	0
Y	0	-k/2	0

Donc le diagramme de Nyquist est un demi-cercle.



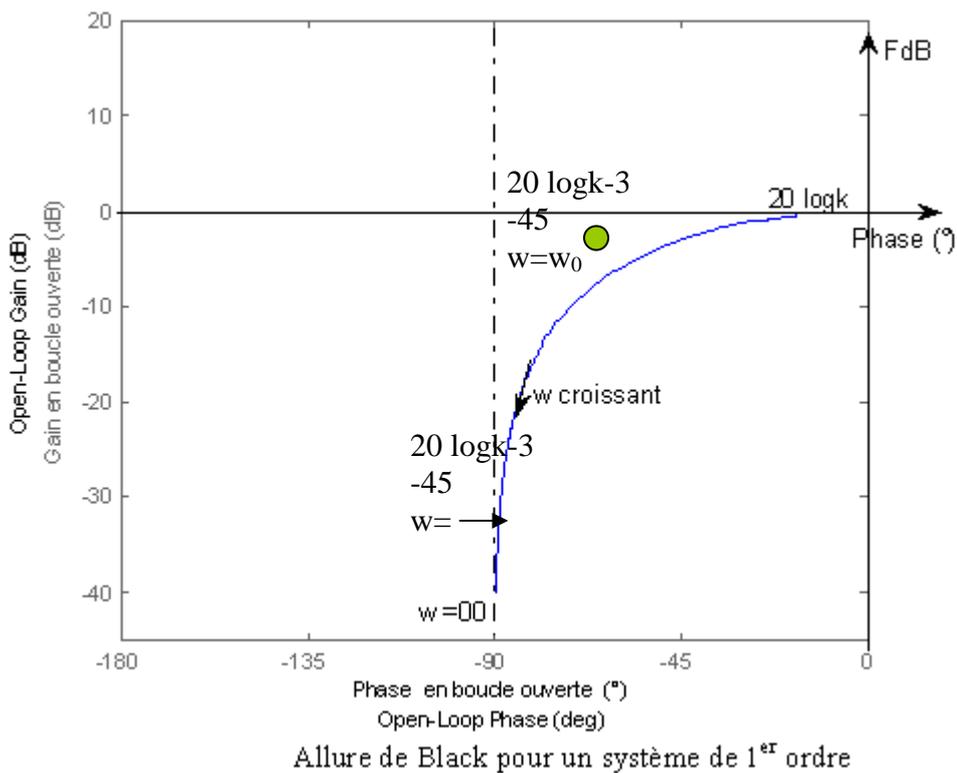
**Allure de Nyquist pour un système de 1<sup>er</sup> ordre**

### c. Diagramme de Black

$$H(p) = \frac{k}{1 + \tau p} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{k}{1 + j\tau\omega}$$

$$\begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \\ \varphi = \arg(H(j\omega)) = -\arctg(\tau\omega) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |H|_{dB} = 20 \log k - 20 \log(1 + (\tau\omega)^2)^{1/2} \\ \varphi = -\arctg(\tau\omega) \end{cases}$$

$$|H(j\omega)| = f(\arg[H(j\omega)])$$



## II. Système de premier ordre généralisé

### 1. Définition

On appelle systèmes de premier ordre généralisé, les systèmes dont l'équation différentielle est de la forme suivante :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \left( e(t) + \tau \cdot \frac{de(t)}{dt} \right)$$

Hypothèse : conditions initiales nulles

La fonction de transfert est :

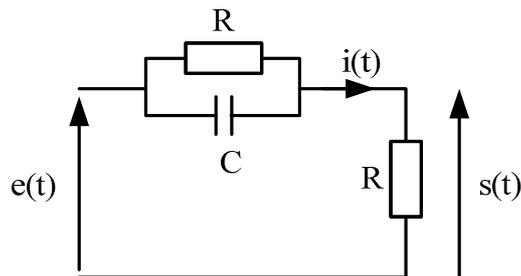
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{1 + \tau' p}{1 + \tau p}$$

Soit  $\lambda = \frac{\tau'}{\tau}$ ,  $\tau$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K \frac{1 + \lambda \tau p}{1 + \tau p}$$

## 2. Exemples

### a. Système électrique à avance de phase



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

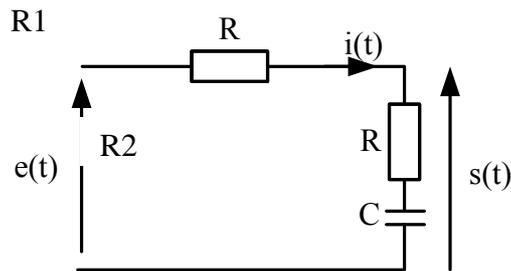
$$H(p) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{Cp}}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_1 C p}{1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C p}$$

Soient :  $\tau' = R_1 C$ ,  $\tau = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$  et  $K = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Finalement on obtient la forme d'un système de premier ordre généralisé  $H(p) = K \frac{1 + \tau' p}{1 + \tau p}$

$$\lambda = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1 \Rightarrow \text{Système à avance de phase.}$$

**b . Système électrique à retard de phase**



Calculons  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1 + R_2 C p}{1 + (R_1 + R_2) C p} = \frac{1 + \tau' p}{1 + \tau p}$

Avec :  $\tau' = R_2 C$  ,  $\tau = (R_1 + R_2) C$  et  $k = 1$

$\lambda = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} < 1 \Rightarrow$  Système à retard de phase.

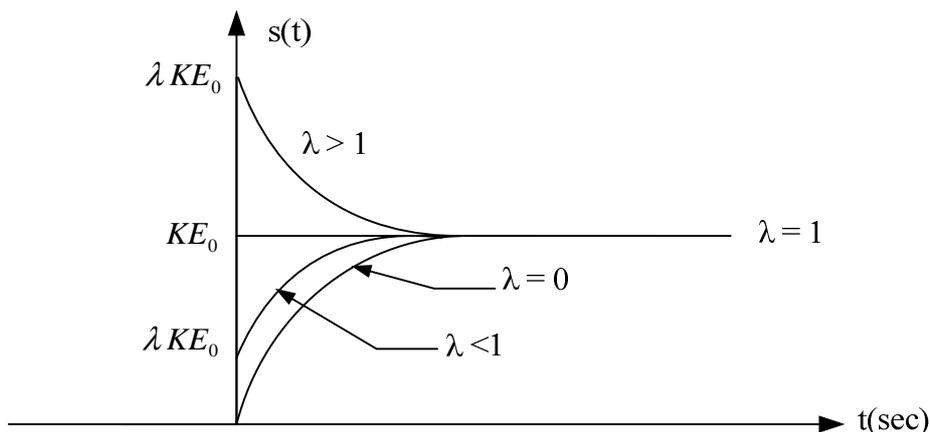
**3. Etude temporelle**

On considère une entrée  $e(t) = E_0 u(t)$

$$S(p) = H(p) \times E(p) = k \frac{1 + \lambda \tau p}{1 + \tau p} \cdot \frac{E_0}{p}$$

$$\Rightarrow s(t) = k E_0 \left( 1 + (\lambda - 1) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) u(t)$$

Cette réponse est représentée schématiquement, selon la valeur de  $\lambda$ , sur la figure suivante :



Réponses indicielle d'un système de premier ordre généralisé

$s(0) = \lambda k E_0$

$s(\infty) = k E_0$

---

**Remarque :**

Pour  $\lambda=0$  on retrouve le cas du système de premier ordre.

On note aussi que pour  $\lambda>1$ , le système commence par dépasser sa valeur finale, de sorte que sa sortie atteint des valeurs notables bien plus vite que celle du système de premier ordre.

**4. Etude harmonique ( $p = j\omega$ )**

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = K \frac{1 + \lambda \tau j\omega}{1 + \tau j\omega} = H_1(j\omega) * H_2(j\omega)$$

$$\text{Avec } \begin{cases} H_1(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} \\ H_2(j\omega) = 1 + \lambda \tau j\omega \end{cases} \text{ et } \begin{cases} |H_1(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \\ |H_2(j\omega)| = \sqrt{1 + (\lambda\tau\omega)^2} \end{cases}$$

**a. Diagramme de Bode**

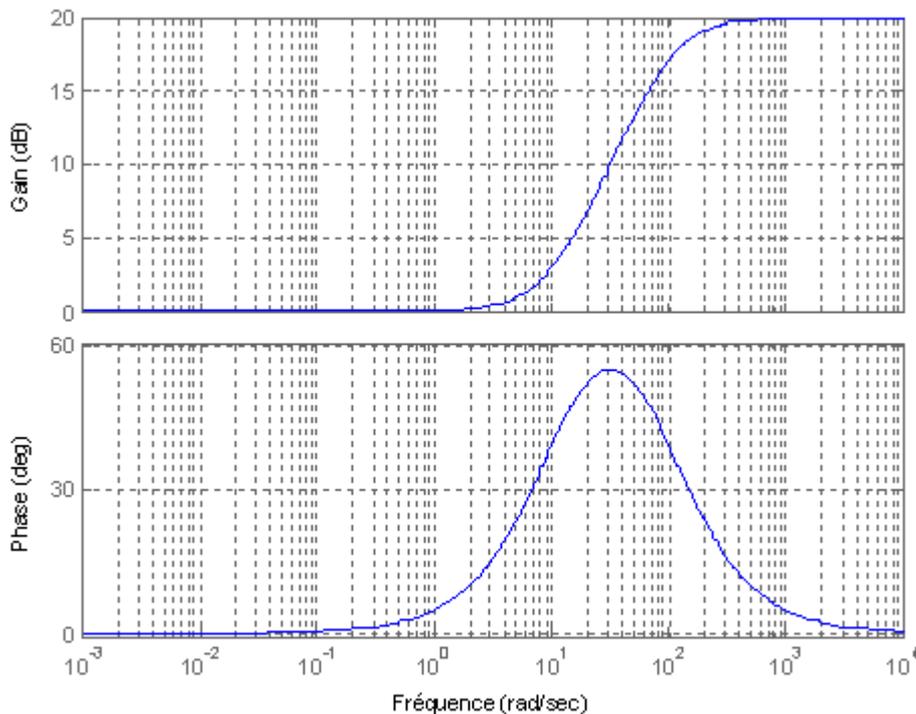
**Diagramme asymptotique**

$$|H(j\omega)| = |H| = k \frac{\sqrt{1 + (\lambda\tau\omega)^2}}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

**Module :**  $|H|_{dB} = 20 \log_{10} |H| = 20 \log_{10} |H_1| + 20 \log_{10} |H_2|$

**Argument :**  $Arg[H(j\omega)] = arg[H_1(j\omega)] + arg[H_2(j\omega)]$

**Premier cas ( $\lambda > 1$ ) système à avance de phase**



· Diagramme de Bode d'un système de 1<sup>er</sup> ordre généralisé  $\lambda = 10 > 1$

Deuxième cas ( $\lambda < 1$ ) système à retard de phase

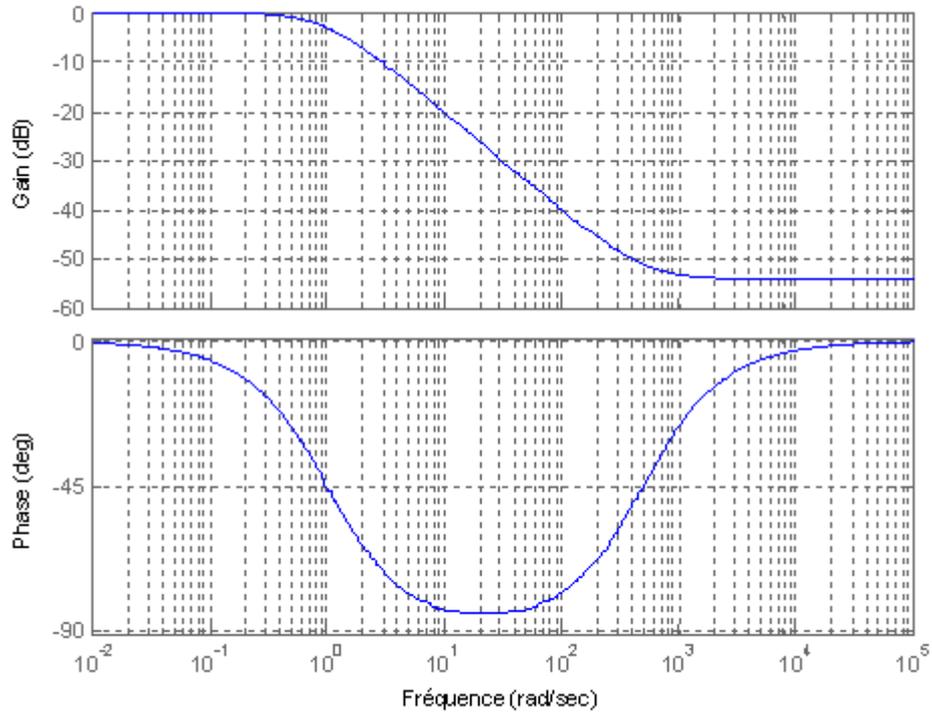


Diagramme de Bode d'un système de 1<sup>er</sup> ordre généralisé  $\lambda = 0.002 < 1$

**Remarques :**

Pour un système de premier ordre généralisé, la courbe de phase présente un extremum :

Si ( $\lambda < 1$ ) : un minimum.

Si ( $\lambda > 1$ ) : un maximum.

$$\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\lambda}}$$

$$\varphi_m = \arcsin\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)$$

$$|H(j\omega)| = k\sqrt{\lambda}$$

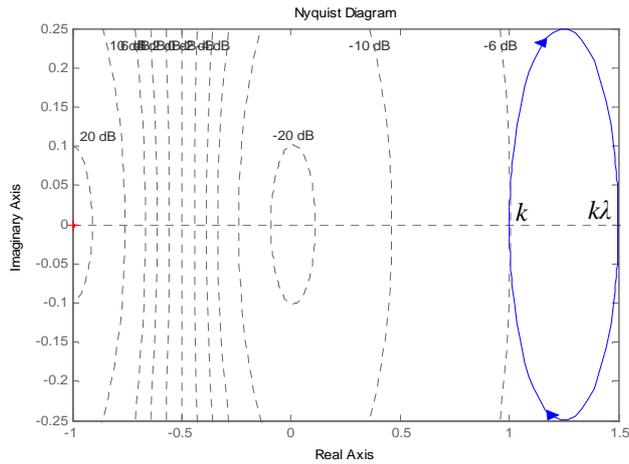
**b. lieu de niquist :**

$$H(j\omega) = k \frac{1 + \lambda(\tau\omega)^2}{1 + (\tau\omega)^2} + jk \frac{(\lambda-1)\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2} = X + jY$$

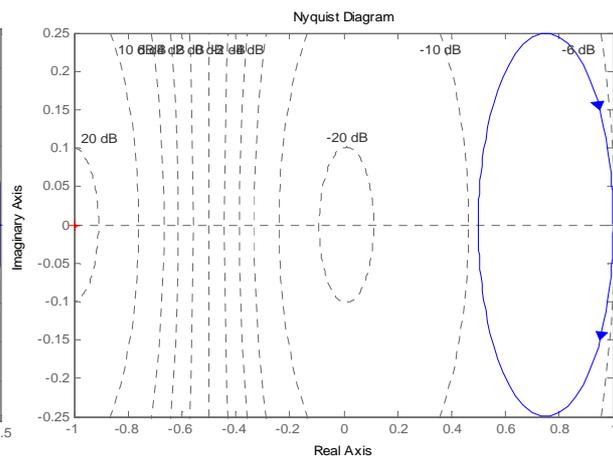
$$\Rightarrow Y^2 + \left(X - \frac{k(\lambda+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{k(\lambda-1)}{2}\right)^2$$

$$\text{pour } \omega = 0 \begin{cases} X = k \\ Y = 0 \end{cases}$$

$$\text{pour } \omega \rightarrow \infty \begin{cases} X = k\lambda \\ Y \rightarrow 0 \end{cases}$$

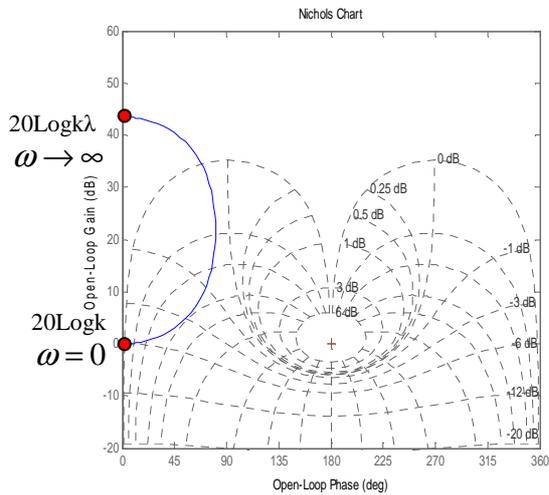


Système à avance de phase ( $Y > 0$ )

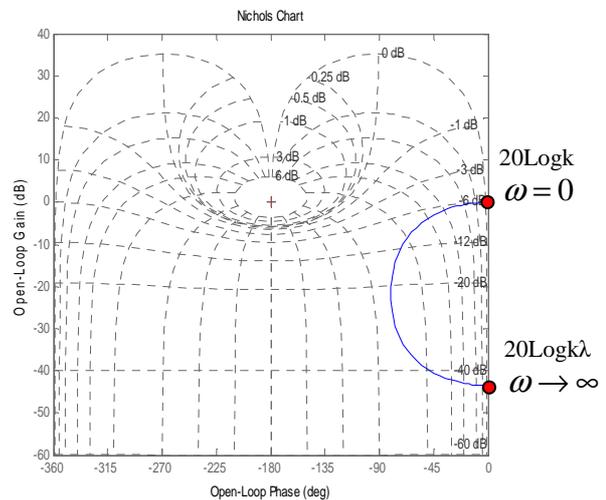


Système à retard de phase ( $Y < 0$ )

**b. lieu de black :**



Système à avance de phase ( $\lambda > 1$ )



Système à retard de phase ( $\lambda < 1$ )

### III. Systèmes de second ordre

#### 1. Définition

On appelle système de second ordre d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$  tout système régi par une équation différentielle de type :

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

Avec :

$K$  est le **gain statique** du système (gain en régime permanent).

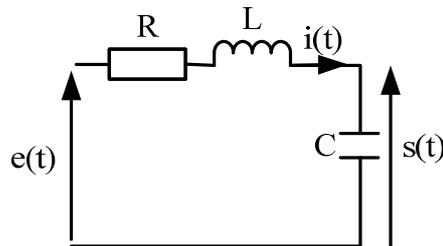
$\omega_0$  : est appelé pulsation libre ou pulsation naturelle ou **pulsation propre** du système **non amorti** (se mesure en rad/s).

$m$  : est appelé **amortissement** du système ou facteur d'amortissement ou coefficient d'amortissement.

En appliquant la transformée de Laplace à conditions initiales nulles ( $s(0) = 0$  et  $s'(0) = 0$ )

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

## 2. Exemple (Circuit RLC)



On appliquant la loi de maille on détermine l'équation différentielle du circuit

$$\begin{cases} e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + s(t) \\ i(t) = C \frac{ds(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow e(t) = LC \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace (T.L) à condition initiales nulles à l'équation différentielle précédente on obtient :

$$E(p) = (LC p^2 + RC p + 1) S(p)$$

La fonction de transfert du circuit est défini par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{LC p^2 + RC p + 1} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}}$$

---

Soit

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ m = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

### 3. Etude temporelle du système de second ordre

L'équation caractéristique du système second ordre est défini par :

$$E_c(p) = D(p) = 0$$

$$\Rightarrow p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = \omega_0^2(m^2 - 1)$$

#### a. Système du second ordre hyper-amorti ( $m > 1$ )

$$\Delta' = \omega_0^2(m^2 - 1) > 0$$

L'équation caractéristique à deux pôles réels : 
$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + \omega_0\sqrt{m^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_1} \\ p_2 = -m\omega_0 - \omega_0\sqrt{m^2 - 1} = -\frac{1}{\tau_2} \end{cases}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} = \frac{\frac{k}{\tau_1 \tau_2}}{p^2 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{\tau_1 \tau_2} p + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}} = \frac{k \omega_0^2}{p^2 + 2m \omega_0 p + \omega_0^2}$$

Par identification on aura : 
$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \\ m = \frac{1}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \end{cases}$$

#### Réponse indicielle

L'entrée appliquée est un échelon de position  $e(t) = E_0 u(t)$

$$\Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p)E(p) = \frac{kE_0}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

La transformée de Laplace inverse de  $S(p)$  donne :

---

$$s(t) = kE_0 \left[ 1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \left( \tau_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) - \tau_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right) \right] u(t)$$

### b. Système du second ordre critique ( $m=1$ )

On a :  $m=1 \Rightarrow \Delta=0$

$$p_1 = p_2 = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}$$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{k \omega_0^2}{p^2 + 2 \omega_0 p + \omega_0^2} = \frac{K \omega_0^2}{(p + \omega_0)^2}$$

#### Réponse indicielle

$$e(t) = E_0 u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p) E(p) = \frac{K \omega_0^2 E_0}{p(p + \omega_0)^2} = \frac{K E_0}{p(1 + \tau p)^2}$$

$$s(t) = L^{-1} \left[ \frac{kE_0}{p(1 + \tau p)^2} \right] = kE_0 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] u(t)$$

### c. Système du second ordre oscillant amorti ( $0 < m < 1$ )

$$m < 1 \Rightarrow \Delta < 0$$

$$\Delta = -\omega_0^2(1 - m^2) = j^2 \omega_0^2(1 - m^2) \quad (j^2 = -1)$$

Donc l'équation caractéristique à deux pôles complexes conjugués

$$\begin{cases} p_1 = -m\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-m^2} \\ p_2 = -m\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-m^2} \end{cases}$$

#### Réponse indicielle

Cette réponse est obtenue pour ( $e(t) = E_0 u(t)$ ),

La sortie  $s(t)$  du système est :

$$S(p) = H(p) E(p) = \frac{kE_0 \omega_0^2}{p(p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2)}$$

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}[S(p)]$$

$$\Rightarrow s(t) = kE_0 \left[ 1 - \frac{\exp(-m\omega_0 t)}{\sqrt{1-m^2}} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-m^2} t + \psi\right) \right] u(t)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$$

$$\psi = \arccos(m)$$

Pour le système du second ordre oscillant amorti, on définit:

❖ *Pseudo pulsation du système*

Cette pseudo pulsation est définie par  $\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-m^2}$

❖ *Temps de premier dépassement :*

On appelle temps de premier dépassement, l'instant où la sortie atteint son premier maximum.

On le note par  $t_p$ .

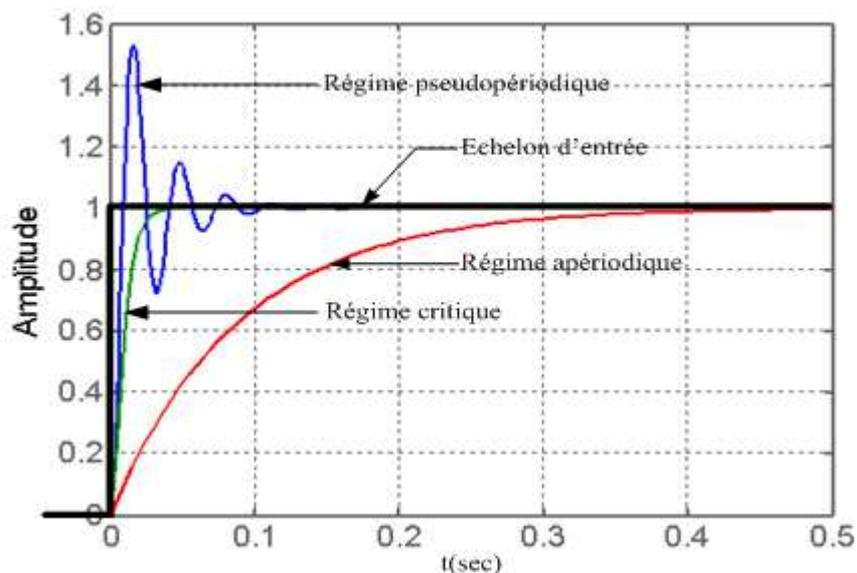
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}} : \text{Temps de premier pic}$$

❖ *Dépassement:*

On appelle amplitude de premier dépassement, l'amplitude du premier maximum sur la valeur finale de la sortie.

$$D = \frac{s(t_p) - s(\infty)}{s(\infty)} = \exp\left(-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$$

$$\text{En (\%)} : D(\%) = \frac{s(t_p) - s(\infty)}{s(\infty)} \times 100 = 100 \exp\left(-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$$



Réponses indicielles d'un système de second ordre pour  $m=(0.5;1;3)$

---

#### d. Système de second ordre oscillant pur ( $m = 0$ )

$$m = 1 \Rightarrow \Delta = -\omega_0^2$$

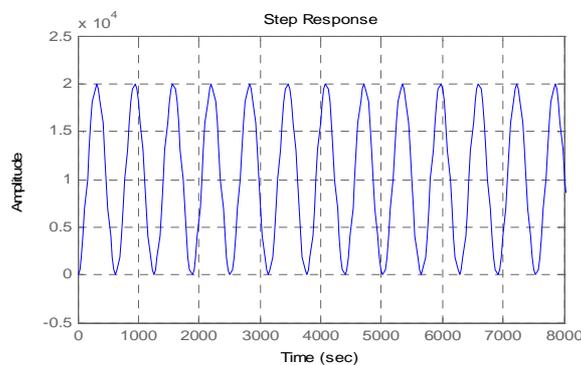
$$\text{poles } p_{1,2} = \pm j\omega_0$$

$$H(p) = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2}$$

#### Réponse indicielle

$$S(p) = \frac{k\omega_0^2 E_0}{p(p^2 + \omega_0^2)}$$

$$s(t) = kE_0(1 - \cos \omega_0 t)u(t)$$



#### 4. Etude harmonique des systèmes de second ordre ( $p = j\omega$ )

##### Règles générale de tracé asymptotique pour le diagramme de Bode

Les règles générales pour les tracés asymptotiques sont les suivantes :

- Représenter le module des pôles  $|p_i|$  et des zéros  $|z_i|$  sur l'axe des pulsations  $\omega$ .
- Chaque fois qu'on rencontre un pole, le tracé asymptotique du module voit sa pente diminuer de 20db/décade.
- Quant on rencontre un zéro, le tracé asymptotique du module voit sa pente augmenter de 20db/décade.
- Pour un pole négatif ou un zéro positif, le tracé asymptotique de l'argument diminue de  $\frac{\pi}{2}$
- Pour un pole positif ou un zéro négatif, le tracé asymptotique de l'argument augmente de  $\frac{\pi}{2}$ .

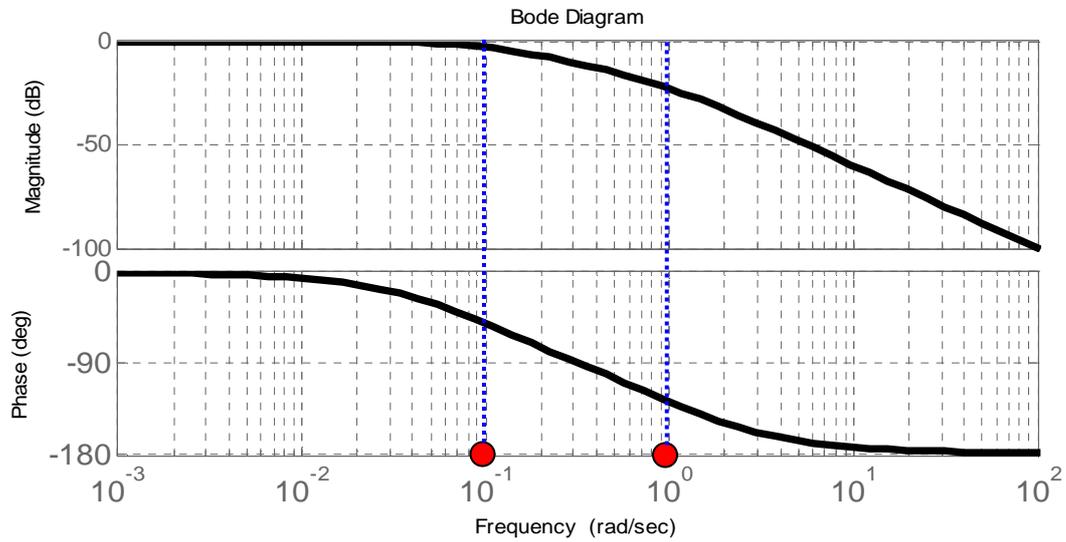
#### a. Système hyperamorti ( $m > 1$ )

$$H(p) = \frac{k}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

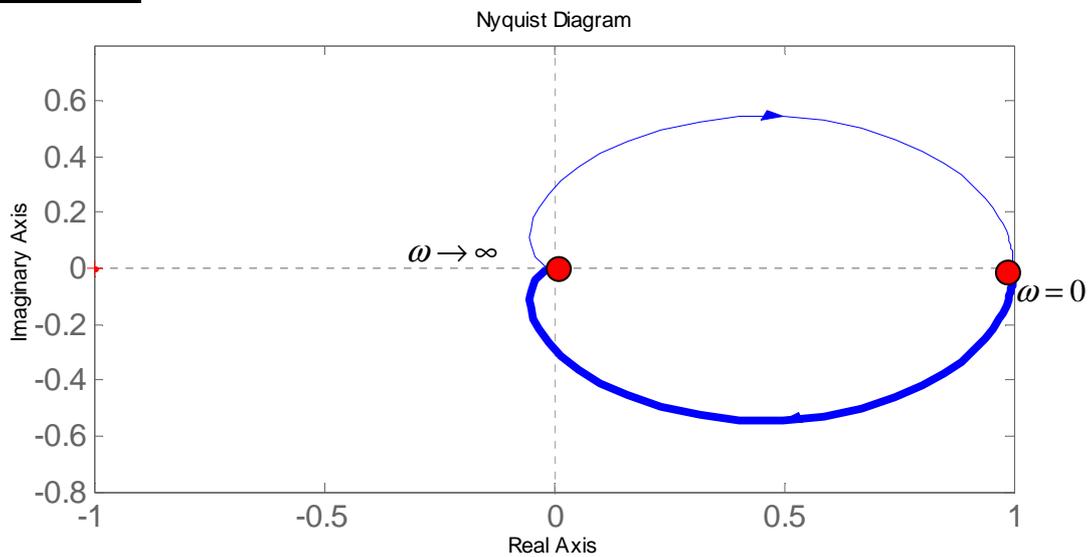
---

## Lieu de Bode

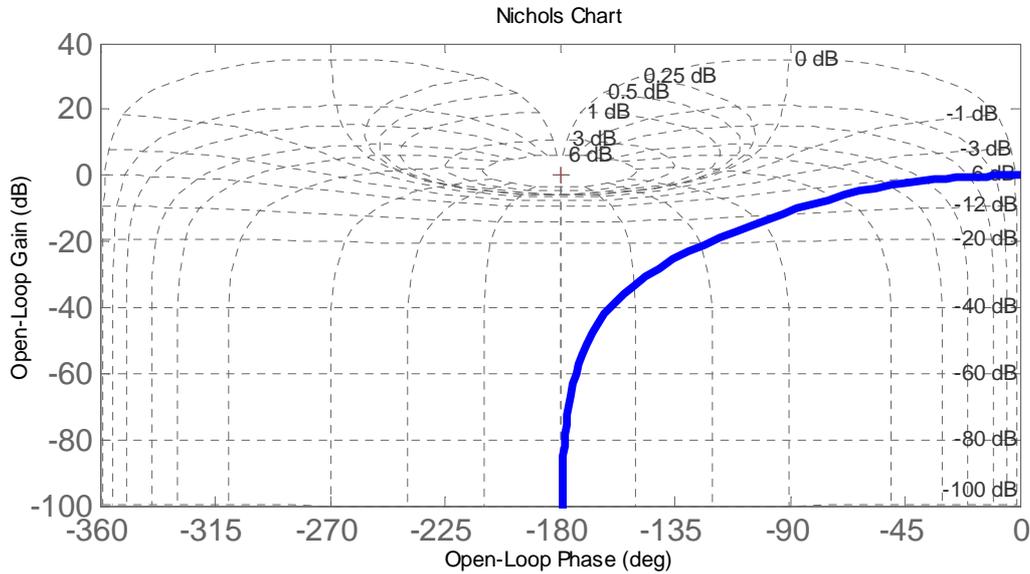
Exemple :  $H(p) = \frac{1}{(1+p)(1+10p)} = \frac{0.1}{p^2 + 1.1p + 0.1}$   $\left\{ \begin{array}{l} p_1 = -\frac{1}{\tau_1} = -0.1 \\ p_2 = -\frac{1}{\tau_2} = -1 \end{array} \right.$



## Lieu de Nyquist



**Lieu de Black**



**b. Système du second ordre oscillant amorti (0 < m < 1)**

La transmittance harmonique du système est :  $H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{k\omega_0^2}{-\omega^2 + 2jm\omega_0\omega + \omega_0^2}$

Posons  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  : pulsation normalisée (réduite).

$$H(ju) = \frac{k}{1 - u^2 + 2jmu}$$

Posons  $|H(ju)| = |H|$

$$\begin{cases} |H(ju)| = \frac{k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4m^2u^2}} \\ \varphi = \arg[H(ju)] = -\arctg\left(\frac{2mu}{1-u^2}\right) \end{cases}$$

**Lieu de Bode**

➤ Pour  $\omega = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Rightarrow \begin{cases} |H| = k & \text{ou } |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$

➤ Pour  $\omega = \omega_0 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = \frac{k}{2m} & \text{ou } |H|_{dB} = 20\log_{10}(k) - 20\log_{10}(2m) \\ \varphi = -90^\circ \end{cases}$

➤ Pour  $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow u \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = k \Rightarrow |H|_{dB} = 20 \log_{10}(k) \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$

➤ Pour  $\omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow u \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} |H| = \frac{k}{u^2} \text{ ou } |H|_{dB} = 20 \log_{10}(k) - 40 \log_{10}(u) \\ \varphi = -180^\circ \end{cases}$

La représentation asymptotique de Bode en amplitude est donc composée de deux asymptotes :

- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour  $(\omega \ll \omega_0) \quad |H|_{dB} = 20 \log_{10}(k)$
- ✓ Une asymptote oblique d'équation  $(|H|_{dB} = 20 \log_{10}(K) - 40 \log_{10}(u))$  de pente  $(-40dB/décade)$  pour  $(\omega \gg \omega_0)$
- ✓ Le point d'intersection entre les deux asymptotes est le point où  $(\omega = \omega_0)$

La représentation asymptotique de Bode en phase est aussi composée de deux asymptotes :

- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour  $(\omega \ll \omega_0) \quad (\varphi = 0^\circ)$
- ✓ Une asymptote parallèle à l'axe des fréquences pour  $(\omega \gg \omega_0) \quad (\varphi = -180^\circ)$

### Calcul de la pulsation de résonance

$$\frac{d|H(ju)|}{du} = \frac{k}{2} \frac{4u^3 - 4u + 8um^2}{\left[ (1-u^2)^2 + (2mu)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d|H(ju)|}{du} = 0 \Leftrightarrow u(4u^2 - 4 + 8m^2) = 0$$

$$\begin{cases} u = 0 \\ 4u^2 - 4 + 8m^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_r = \sqrt{1 - 2m^2}$$

Or  $u_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$  donc  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$  pulsation de résonance

$\omega_r$  est définie quand  $1 - 2m^2 > 0 \Rightarrow m < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$

$$|H_{\max}| = |H(j\omega_r)| = \frac{k}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

Facteur de résonance :

$$Q(m) = \frac{|H_{\max}|}{|H(0)|} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

Pic de résonance :

$$MP = 20 \log Q = 20 \log \frac{|H_{\max}|}{|H(0)|}$$

La valeur optimale de de  $MP=2.3\text{dB}$  correspond à  $Q=1.3$  et  $m=0.42$

Fréquence de résonance :

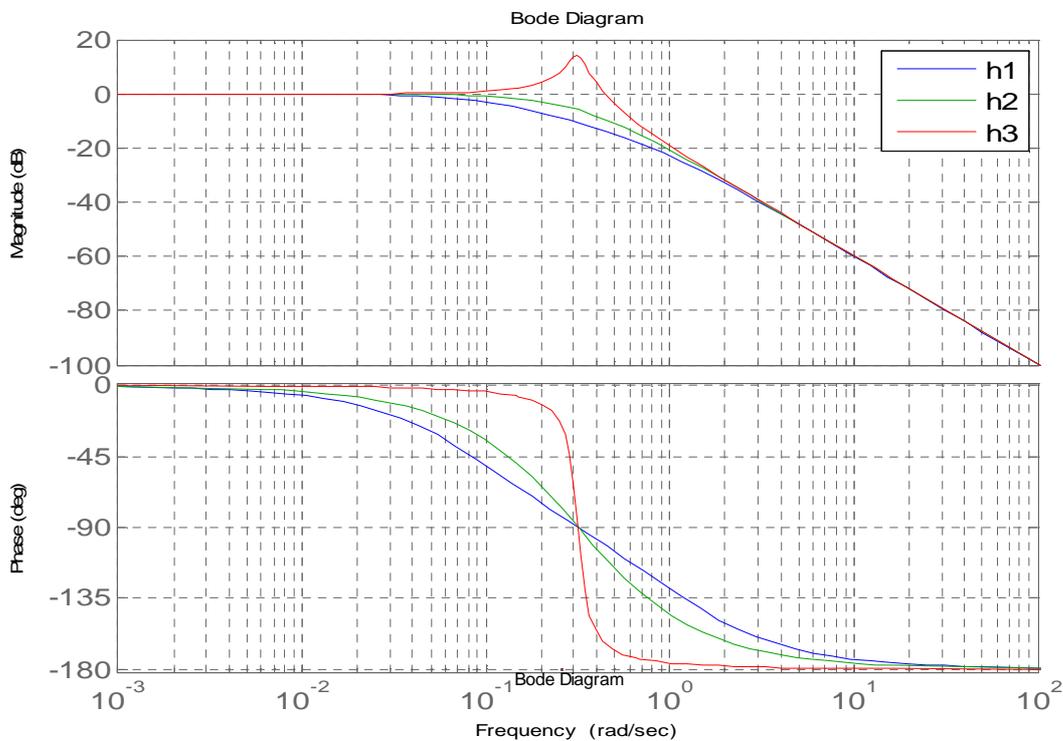
$$fr = \frac{\omega_r}{2\pi} \text{ avec } \omega_r = \omega_0 \sqrt{1-2m^2} \text{ pour } 0 < m < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La bande passante à -3dB :

$$\omega_{BP} = \omega_0 \sqrt{(1-2m^2) + \sqrt{4m^4 - 4m^2 + 2}}$$

$$\text{pour } m=0 \Rightarrow \omega_{BP} = 1.55\omega_0$$

$$\text{pour } m=1 \Rightarrow \omega_{BP} = 0.64\omega_0$$



```
%m=1.74,w0=0.31rad/s
n1=[0.1];
```

```

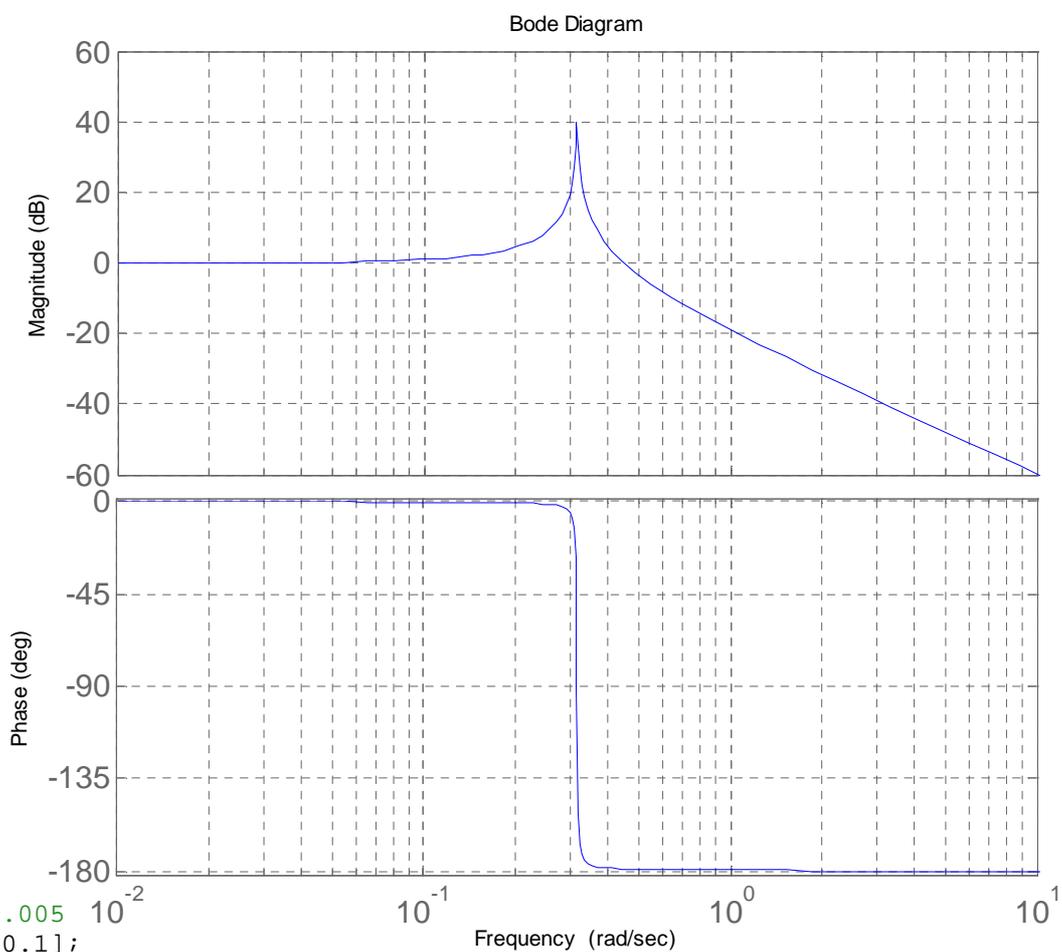
d1=[1 1.1 0.1];
h1=tf(n1,d1);

%m=1
n2=[0.1];
d2=[1 0.63 0.1];
h2=tf(n2,d2);

%m=0.1
n3=[0.1];
d3=[1 0.63*0.1 0.1];
h3=tf(n3,d3);

bode(h1,h2,h3)
grid

```



```

%m=0.005
n4=[0.1];
d4=[1 0.63*0.005 0.1];
h4=tf(n4,d4);
bode(h4)

```

### Lieu de Nyquist

On représente  $\text{Im } g[H(j\omega)] = f(\text{réel}[H(j\omega)])$

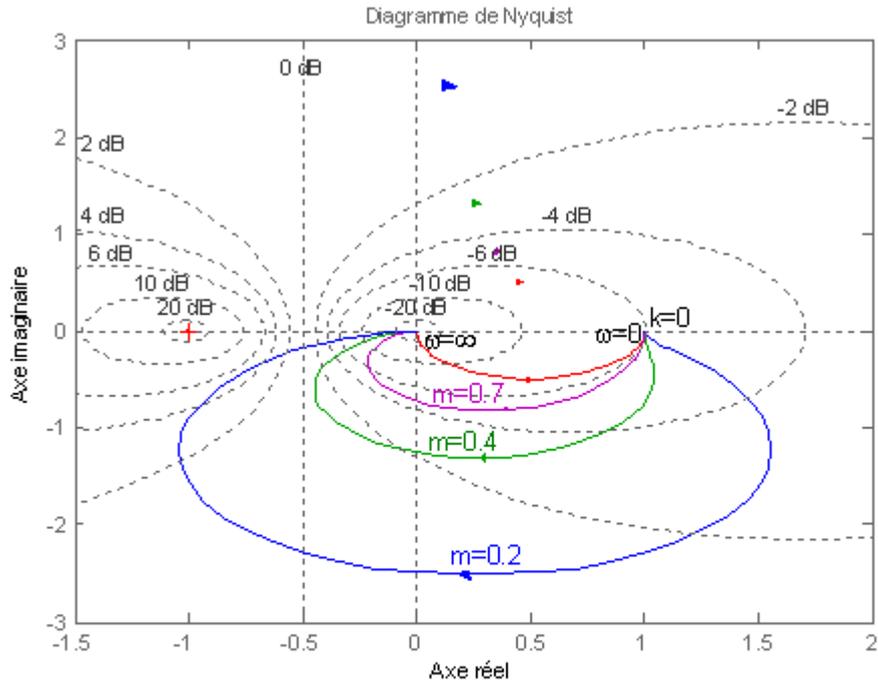


Diagramme de Nyquist pour les différentes valeurs de  $m$  pour un système de second ordre

**Lieu de Black**

C'est une courbe de  $|H(j\omega)| = f(\arg[H(j\omega)])$

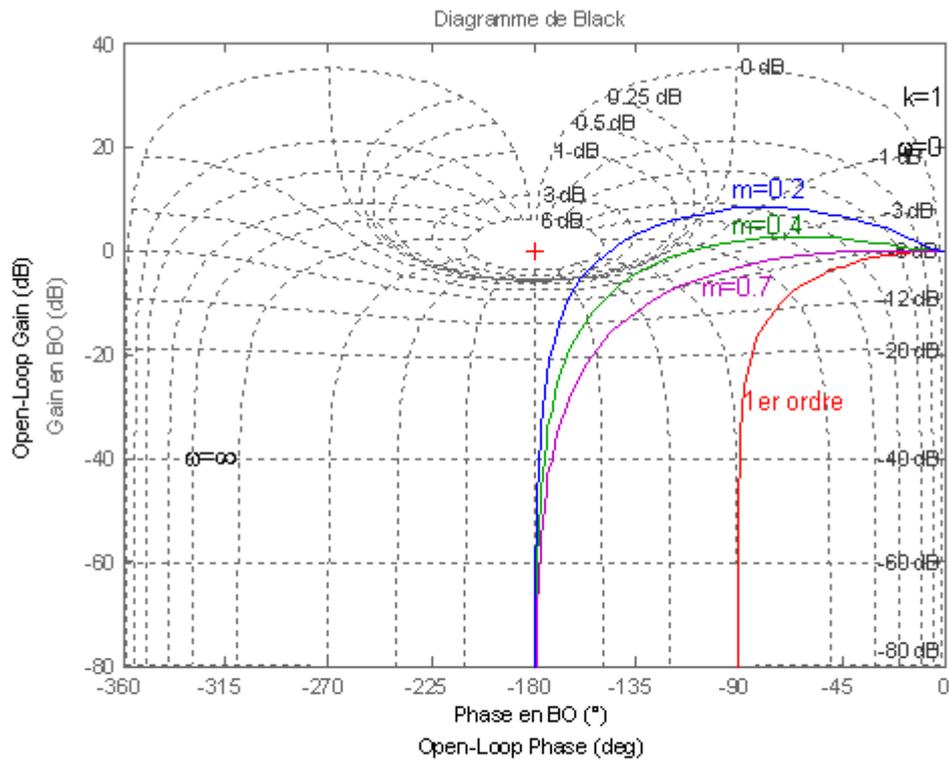


Diagramme de Black pour les différentes valeurs de  $m$  pour un système de second ordre