الاحصاء الرياضي

الفصل الثالث: المتغيرات العشوائية وحيدة البعد

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى جذع مشترك

الأستاذة غيدة فوزية

21/04/2019

قائمة المحتويات

I-المتغيرات العشوائية وحيدة البعد 5

آ. مفهوم المتغير العشوائي.....5

ب. مفهوم قانون التوزيع الاحتمالي.....7

پ. مفهوم تابع التوزيع الاحتمالي.....7

ت. أنواع المتغيرات العشوائية.....7

1. المتغيرات العشوائية المتقطعة.....7
2. المتغيرات العشوائية المستمرة.....13

ث. عزوم المتغيرات العشوائية.....19

1. العزوم الابتدائية (البسيطة).....19
2. العزوم المركزية.....20

ج. مقاييس الشكل.....21

1. مقاييس الالتواء (عدم التناظر).....21
2. مقاييس التطاول.....23

II-نشاط التعلم 25

آ. تمرين.....25

حل التمارين 27

I
المتغيرات العشوائية وحيدة البعد

مفهوم المتغير العشوائي 5
مفهوم قانون التوزيع الاحتمالي 7
مفهوم تابع التوزيع الاحتمالي 7
أنواع المتغيرات العشوائية 7
عزوم المتغيرات العشوائية 19
مقاييس الشكل 21

آ. مفهوم المتغير العشوائي

المتغير العشوائي هو خاصية أو ميزة نهتم بدراستها عشوائيا.

يرمز للمتغير العشوائي بحروف كبيرة، مثلا:Z,Y,X....و يرمز لقيم هذا المتغير بأحرف صغيرة، مثلا:,zi,yi xi....و القيم التي يأخذها المتغير العشوائي تخضع للصدفة أو العشوائية أي لا يمكن تحديدها مسبقا.

أن X كمتغير عشوائي يأخذ قيمه الممكنة فقط:xn... ,x1,x2,x3 و كل قيمة ممكنة تقابلها قيمة احتمالية: p1,p2,p3,....pn و بناء على ذلك، يمكن تمثيل المتغير العشوائي X بالصورة التالية:

القيم الممكنة xi	x1	x2	x3	....	xn
الاحتمالات المقابلة pi	p1	p2	p3	...	pn

حيث أن مجموع الاحتمالات =1

و منه نستطيع أن نعرف المتغير العشوائي على أنه تابع أو دالة تربط كل حادث أولي من المجموعة الأساسية بعدد حقيقي.

القيم الممكنة للمتغير عشوائي X تمثل مجموعة جديدة من الحوادث الاولية. هذه المجموعة تسمى بالمجموعة الاساسية التي يولدها المتغير العشوائي و يرمز لها بالرمز Sx حيث: Sx={0,1,2,....n}

مثلل : مثال 1

- في تجربة عشوائية متمثلة في "رمي قطعة نقود 3 مرات" أو "رمي 3 قطع نقود مرة واحدة" في هذه الحالة المجموعة الأساسية هي:S={PPP,PPF,PFP,PFF,FPP,FPF,FFP,FFF}

قد نهتم في هذه التجربة بعدد الأوجه المتحصل عليها (P)، و في هذه الحالة عدد الأوجه يمثل المتغير عشوائي، قيمه الممكنة هي: {3,2,1,0}.

مثلل : مثال 2

- في تجربة عشوائية متمثلة في "رمي زهرتي نرد" فان المجموعة الأساسية لهذه التجربة هي :
{(S={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),.....,(4,1),(4,2),(4,3),.....(5,6),(6,6
في هذه التجربة قد نهتم بما يلي: "مجموع نتيجتين"، "فرقهما" أو "جداؤهما". فالقيم الممكنة في حالة مجموع نتيجتين هي:{4,3,2.....,12,11} .

ب. مفهوم قانون التوزيع الاحتمالي

عند إجراء التجربة العشوائية E، فالمتغير العشوائي X يأخذ قيمة حقيقية ضمن فراغ إمكاناته، و كل حادث من هذه الحوادث الممكنة المشكلة لإمكاناته تتحقق باحتمال معين. و بما أن هذه الحوادث تشكل بمجموعها الحادث الأكيد فان مجموع احتمالات المقابلة =1.

إذا فيمكننا أن نقول أن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو تلك العلامة التي تربط بين القيم الممكنة لهذا المتغير و بين احتمالاته المرافقة.

پ. مفهوم تابع التوزيع الاحتمالي

ان جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يبين توزيع الاحتمالات على قيم مختلفة للمتغير، إلا اننا نحتاج احيانا الى معرفة مجموع الاحتمالات التي تقل قيمتها عن قيمة معينة أو تزيد عنها للمتغير العشوائي X و من أجل ذلك نقوم باستخدام ما يسمى بتابع التوزيع الاحتمالي و يرمز له بـــ F(x). و بالتالي فان تابع التوزيع الاحتمالي هو ذلك التابع الذي يعطينا احتمال ان يأخذ المتغير العشوائي X اية قيمة أصغر أو تساوي قيمة معينة xi، و يعبر عن ذلك بالصيغة الرياضية التالية:

$$F(xi)=P(X\leq xi)$$

فرنسية

ت. أنواع المتغيرات العشوائية

يوجد نوعين من التغيرات العشوائية:

1. المتغيرات العشوائية المتقطعة

هي المتغيرات العشوائية التي تكون فيها قيم المتغير قابلة للعد. مثلا: نتائج تجربة تعداد الزوار المترددين على منطقة أثرية خلال يوم و التي يكون فراغها منتهيا حيث :
Sx={0,1,2....,n

1) قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع (تابع او دالة احتمال)

لنفرض أنه لدينا متغير عشوائي X، فراغ امكاناته محدود أي Sx={x1,x2,.....,xn} و الاحتمالات pi المقابلة لقيم xi التي يمكن أن ياخذها المتغير العشوائي أي:

فقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يمكن عرضه بصورة جدولية التالية:

P(X=xi)

فقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يمكن عرضه بصورة جدولية التالية:

X=xi	x1	x2	x3	...	xn
P(X=xi)	P(X=x1)	P(X=x2)	P(X=x3)	...	P(X=xn)

فهذا القانون يحقق شرطين التاليين:

$$P(X=xi)\geq 0$$

فرنسية

$$\sum_{(i=1)}^{n} P(X=xi)=1$$

فرنسية

مثلد : مثال 1

لتكن التجربة العشوائية E الممثلة في "رمي قطعتي نرد"، نعرف المتغير العشوائي Y على أنه مجموع نتيجتين المتحصل عليهما.

1- حدد فضاء الحوادث الأولية

2- حدد المجموعة الأساسية التي يولدها المتغير العشوائي Y

3- أوجد قانون التوزيع الاحتمالي

الحل:

1- المجموعة الاساسية للتجربة هي:

{(S={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)....,(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6

2- المجموعة الاساسية للمتغير العشوائي Y :

{Sy={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12

3- قانون التوزيع الاحتمالي:

P(Y=2)=P{(1,1)}=1/36

P(Y=3)=P{(2,1),(1,2)}=2/36

P(Y=4)=P{(2,2),(1,3),(3,1)}=3/36

P(Y=5)=P{(4,1),(1,4),(2,3),(3,2)}=4/36

P(Y=6)=P{(3,3),(5,1)(1,5),(4,2),(2,4)}=5/36

P(Y=7)=P{(4,3),(3,4),(6,1),(1,6),(5,2),(2,5)}=6/36

P(Y=8)=P{(4,4),(6,2),(2,6),(5,3),(3,5)}=5/36

P(Y=9)=P{(6,3),(3,6),(5,4),(4,5)}=4/36

P(Y=10)=P{(5,5),(4,6),{(6,4)}=3/36

P(Y=11)=P{(5,6),(6,4)}=2/36

P(Y=12)=P{(6,6)}=1/36

2) تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع

إذا كان X متغيرا عشوائيا متقطعا، و كانت قيم xi مرتبة ترتيبا تصاعديا و كان قانون توزيعه محددا، فيمكننا أن نجد تابع التوزيع الاحتمالي F(xi) كما يلي:

$$F(xi)=P(X\leq xi)=\sum_{(x\leq xi)}P(X=xi)$$

فرنسية

فإذا كان لدينا جدول قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X معطى كما يلي:

X=xi	x1	x2	x3	...	xn
P(X=xi)	P(X=x1	P(X=x2)	P(X=x3)	...	P(X=xn)

احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أقل أو يساوي xk هو:

$$F(xk)=P(X\leq xk)=\sum_{(i=1)}^{k}P(X=xi)$$

فرنسية

مثلد : مثال 1

احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أقل أو تساوي x3 هو:

$$F(x3)=P(X\leq x3)=\sum_{(i=1)}^{3}P(X=xi)=P(X=x1)+P(X=x2)+P(X=x3)$$

فرنسية

- احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة اكبر من xk هو:

$$P(X>xk)=\sum_{(i=k+1)}^{n}P(X=xi)=1-F(xk)=1-P(X\leq xk)$$

فرنسية

1خواص تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع

ان تابع التوزيع الاحتمالي يحقق دوما العلاقة F(x)≥0

ان تابع التوزيع الاحتمالي F(x) هو تابع غير متناقص، اي انه اذا كان x1 و x2 عددين حقيقيين أي:

$$x1\ ,\ x2\in R\ et\ x2>x1\ alors:\ F(x2)>F(x1)$$

فرنسية

3) المميزات العددية للمتغير العشوائي المتقطع

1التوقع الرياضي

و يساوي إلى مجموع القيم xi مضروب بالقيم الاحتمالية الموافقة لـــ xi، و هذا ما يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$E(X)=(\sum \llbracket xi\ pi \rrbracket)/(\sum pi)$$

فرنسية

و بنا ان ∑pi=1 فان:

$$E(X)=\sum \llbracket xi\ pi \rrbracket$$

فرنسية

1خواص التوقع الرياضي

1- التوقع الرياضي لعدد ثابت يساوي الى هذا العدد أي: E(c)= c
2-إذا كان X متغير عشوائي يأخذ و a عدد ثابت فان : E(aX)=aE(X)
3- E(aX+b)=a E(X)+b
4-التوقع الرياضي للتوقع الرياضي يساوي نفسه : E[E(X)]=E(X)

2التباين

تباين متغير عشوائي X هو عبارة عن التوقع لمربع الانحرافات أي:

$$V(X)=\sum pi\ \llbracket [xi-E(X)] \rrbracket^2=\sum xi^2\ pi-(E(X))^2=E(X^2)-\llbracket (E(X)) \rrbracket^2$$

فرنسية

1خواص التباين

1- تباين عدد ثابت =0 أي V(c)=0
2- V(cX)=c2V(X)
3- V(aX+b)=a2 V(X)

مثال

ليكن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي يقدمه الجدول التالي:

X-xi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X-xi)	0,05	0,07	0,08	0,09	0,16	0,2	0,15	0,1	0,05	0,04	0,01

فرنسية

أحسب : V(X), E(X)

طريقة : الحل

1- حساب E(X)

$$E(X)=\sum [\![xi\ pi]\!] =4,6$$
فرنسية

2- حساب V(X)

$$V(X)=\sum [\![[\![xi]\!]^2 pi-(E(X))^2=26,5-[\![(4,6)]\!]^2]\!] =5,34$$
فرنسية

2. المتغيرات العشوائية المستمرة

نقول عن المتغير العشوائي X أنه مستمر، عندما يأخذ هذا المتغير أية قيمة بين الحد الأدنى و الحد الأعلى لمجال تغيره المحدود ة غير محدود دون انقطاع. مثلا: نتائج تجربة حصر أطوال الطلبة في جامعة ما. هنا نعتبر الأطوال بمثابة متغير عشوائي يأخذ قيما كثيرة (محدودة بعدد الطلبة) ضمن مجال محدد بحد أدنى يمثله أقصر طالب و بحد أعلى يمثله أطول طالب، أي تكون الأطوال على شكل مجالات.

1) قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

لنفرض الجدول التالي يبين توزيع الأجر الساعي في مؤسسة اقتصادية ما

الفئات الأجرية	التكرار النسبي fi
40-120	0.08
120-200	0.34
200-280	0.316
280-360	0.184
360-440	0.064
440-520	0.016

لنرمز لـــــ : X أجر شخص سجلناه بشكل عشوائي من هذه المؤسسة. إن X هنا بمثابة متغير عشوائي مستمر يستطيع ان يأخذ أية قيمة بين الحد الأدنى للأجر 40دج و الحد الأعلى الأعلى للأجر 520 دج و ذلك ضمن مجال تغيره.

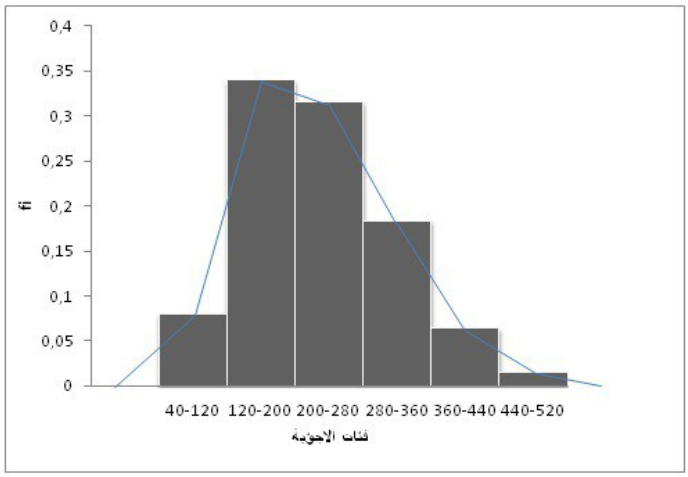
التكرار النسبي مقابل لكل فئة أجرية (مركز الفئة xi) هو عبارة عن احتمال.

نلاحظ من الجدول أن التوزيع الأجري للعمال في الساعة هو عبارة عن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر (دالة كثافة الاحتمال)، لأنه يحقق شرطين:

$f(xi)\geq 0$

$\Sigma f(xi)=1$

التمثيل المقابل لهذا التوزيع هو عبارة عن مدرج تكراري و المضلع التكراري:



فرنسية

ملاحظة : ملاحظة

إذا كانت n كبيرة جدا في هذه الحالة لا يمكننا تلخيص قانون التوزيع الاحتمالي بجدول و لكن نستعمل تابع الرياضي للمتغير العشوائي X و ذلك كما يلي:

$$P(x1 \le X \le x2) = \int_{x1}^{x2} f(x)\,dx$$

فرنسية

انطلاقا من هذا القانون و الممثل بتابع رياضي، يمكننا أن نحسب قيمة الاحتمالات لأي مجال جزئي [x1, x2] ضمن المدى العام لتغير المتغير العشوائي X ضمن[a,b] أي:

[x1, x2]⊂ [a,b]

حيث أن:

f(x)تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير.

f(x)dx تمثل احتمال أن ينتمي المتغير العشوائي x الى مجال [x, x+dx] اللامتناهي عند الصفر:

P(x<X<x+dx)=f(x) dx و ذلك عندما (dx→0)

نصيحة

أ- أنه مهما صغر المجال [x1, x2] فهناك أعداد كبيرة من قيم المتغير العشوائي المستمر داخله، و عليه فان احتمال أن يأخذ هذا المتغير قيمة معينة يساوي الصفر، أي أن:

∀xi:P(X=xi)=0

و هذا راجع بالأساس الى صفة الاستمرار التي يتمتع بها التابع f(x)

ب-إن الإشارتين <،≥و>،≤ متكافئتين في التوزيعات المستمرة أي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

فرنسية

و هذا يعني أن الرمزين<،≥أو،≤,> يمكن استبدال أحدهما بالآخر دون حرج عند وصف الحوادث، لان ذلك لا يغير القيمة العددية لاحتمال هذه الحوادث.

2) تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

اذا كان X متغير عشوائي مستمر و محددا بقانون التوزيع الاحتمالي (بتابع كثافة احتمالية) f(x)، فيمكننا أن نحدد تابع التوزيع F(x) كما يلي:

$$F(X_k) = \int_{(-\infty)}^{k} f(x)\,dx$$

فرنسية

و هذا يعني ان احتمال ان يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أصغر أو تساوي X_k، أي:

$$F(X_k) = P(X \le x_k) = \int_{(-\infty)}^{k} f(x)\,dx$$

فرنسية

- في حالة ايجاد احتمال وقوع المتغير العشوائي X في مجال محصور بين قيمتين a و b و حيث أن (a<b) فيحسب هذا الاحتمال كالتالي:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{(-\infty)}^{b} f(x)\,dx - \int_{(-\infty)}^{a} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

فرنسية

- أما اذا أردنا أن يأخذ X قيمة لا تقل عن b فان الاحتمال عندها هو:

$$P(X > b) = \int_b^{(+\infty)} f(x)\,dx = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} f(x)\,dx - \int_{(-\infty)}^{b} f(x)\,dx = 1 - F(b)$$

فرنسية

1خواص تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر

1-أن تابع التوزيع يحقق دوما : F(X≥0)و هو متزايد.
2-أن قيمة تابع التوزيع عند نقطة (∞-) يساوي 0 لان 0 = F(-∞)= lim(x→-∞)□F(x)
3- أن قيمة تابع التوزيع عند نقطة (∞+) يساوي 1 لان 1=F (∞+)= lim(x→+∞)□F(x)
و لان كذلك عند∞+ متغير عشوائي يعتبر أكبر قيمة و التي تشمل جميع القيمة الممكنة حيث:

$$F(+\infty) = \int_{(-\infty)}^{(+\infty)} f(x)\,dx = 1$$

فرنسية

4-نستنتج من الخاصة 1 و 2 أن :

$$0 \le F(x) \le 1$$
فرنسية

3) المميزات العددية للمتغير العشوائي المستمر

1التوقع الرياضي

يعرف التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المستمر، حسب قانون توزيعه f(x) بالصيغة الرياضية التالية:

$$E(x) = \int_D x\, f(x)\, dx$$
فرنسية

مثال

ليكن متغير عشوائي مستمر، تابع كثافته الاحتمالية (f(x يعطى وفقا للعلاقة التالية:

$$f(x) = 1/3 \; si \; 0 \le X \le 3 \; f(x) = 0 \; ailleurs$$
فرنسية

المطلوب : ايجاد التوقع الرياضي.
الحل:

$$E(x) = \int_0^3 x\, f(x)\, dx = \int_0^3 x\, 1/3\, dx = [x^2/6]_0^3 = 3/2 = 1{,}5$$
فرنسية

2التباين

في حالة متغير عشوائي مستمر، التباين يكتب بالصيغة الرياضية التالية:

$$V(x) = \int_D x^2 f(x)\, dx - [E(x)]^2 = E(x^2) - [E(x)]^2$$
فرنسية

مثال

ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا، تابع الكثافة الاحتمالية له هو f(x) حيث أن:

$$f(x) = 1/12(2x+1) \; si \; 0 \le X \le 3 \; f(x) = 0 \; ailleurs$$
فرنسية

1-أوجد احتمال أن تقع قيمة x في المجال [1،2] أي: P(1≤X≤2)
2-أوجد كل من : V(x), E(x)

الحل:

1- ايجاد الاحتمال التالي:

$$P(1\le X\le 2)=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 1/12(2x+1)\,dx=1/12\int_1^2(2x+1)\,dx=1/12[2/2\,x^2+x]_1^2=6/12=1/2$$

فرنسية

2- ايجاد كل من:

$$E(x)=\int_0^3 x\,f(x)\,dx=\int_0^3 x\,1/12(2x+1)\,dx=1/12\int_0^3(2x^2+x)\,dx=1/12[2/3\,x^3+1/2\,x^2]_0^3=45/24=1,875$$

فرنسية

$$V(x)=\int_0^3 x^2 f(x)\,dx-E(x)^2=\int_0^3 x^2\,1/12(2x+1)\,dx-E(x)^2=1/12\int_0^3(2x^3+x^2)\,dx-E(x)^2=1/12[2/4\,x^4+1/3\,x^3]_0^3-1,875^2=0,61$$

فرنسية

3التحولات الخطية للمتغير العشوائي

ليكن X متغيرا عشوائيا، يمكن اجراء تغيرات أو تحويلات عليه، هذه التحويلات تكون من شكل y=ax+b حيث أن a, b عبارة عن ثوابت و المتغير y عبارة عن متغير جديد تم استنتاجه انطلاقا من المتغير قديم x و ذلك عن طريق اجراء تحويلات خطية على x، و بالتالي فان المتغير y يسمى "المتغير المستنتج".

من أجل كل قيمة xi للمتغير العشوائي X هناك قيمة واحدة وواجدة فقط yi للمتغير المستنتج Y حيث أن yi=axi+b.

دالة الاحتمال للمتغير العشوائي Y هي:

$$f(yi)=f(xi)=P(Y=yi)=P(X=xi)$$

فرنسية

- تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y يرمز له بالرمز :

$$F(yi)=P(Y\le yi)$$

فرنسية

مثال

لنعتبر التجربة العشوائية الممثلة في رمي 3 قطع نقود. نعرف المتغير العشوائي X على أنه "عدد مرات الحصول على F". المطلوب:

- قدم جدول التوزيع الاحتمالي و كذا تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

لنفرض أننا نعطي مبلغ 10 دج من اجل كل F محتصل عليها و نقدم 20 دج من اجل المشاركة. نعرف المتغير العشوائي Y "المبلغ المتحصل عليه". المطلوب:

- أكتب صيغة y، ثم أوجد كل من(F(yi), f(yi

الحل: نتائج المثال ملخصة في الجدول التالي :

F(yi)	f(yi)	Yi=10xi+20	F(xi)	f(xi)	X=xi
1/8	1/8	20	1/8	1/8	0
4/8	3/8	30	4/8	3/8	1
7/8	3/8	40	7/8	3/8	2
8/8	1/8	50	8/8	1/8	3

فرنسية

ث. عزوم المتغيرات العشوائية

نميز بين نوعين من العزوم: العزوم الابتدائية (البسيطة) و العزوم المركزية.

1. العزوم الابتدائية (البسيطة)

ان مفهوم العزوم البسيطة لا يختلف اطلاقا عن التوقع الرياضي إلا من حيث القوة التي يرفع اليها المتغير العشوائي X ، و بالتالي فالعزم البسيط من الدرجة k حيث: (k=1,2,3, ...) للمتغير العشوائي هو التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X.

- بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع X عرف قانون توزيعه، يعرف العزم البسيط من درجة k، بالصيغة التالية:

$$m_k = \sum_{(i=1)}^{n} xi^k \, Pi$$

فرنسية

- أما بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر X عرف قانون توزيعه، يعرف العزم البسيط من درجة k، بالصيغة التالية:

$$m_k = \int_D x^k f(x)\, dx$$

فرنسية

هذا يمكننا أن نعرف العزم البسيط لأي متغير عشوائي بالعلاقة التالية:

$$m_k = E(X^k)$$

فرنسية

ملاحظة : ملاحظة 1

ان العزوم الابتدائية من الدرجة الاولى ليست سوى عبارة عن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X لان:

$$K=1\Rightarrow m_1=E(X^1)=\sum_{(i=1)}^{n} xi^1\ Pi=E(X)$$

فرنسية

ملاحظة : ملاحظة 2

من الناحية العملية، تستخدم العزوم البسيطة من مراتب أعلى من الدرجة الاولى لحساب العزوم المركزية.

مثال

لنفرض اننا نريد حساب العزم البسيط من الدرجة الثالثة للتوزيع الاحتمالي التالي:

X=xi	1	2	3
Pi	0.2	0.5	0.3

نعلم أن:

$$K=3\,;\,m3=E(X3)=\sum_{(i=1)}^{3} xi^3\ Pi=1^{3.0},2+2^{3.0},5+4^{3.0},3=23,4$$

فرنسية

2. العزوم المركزية

يدعى التوقع الرياضي للمتغير العشوائي $(x-E(X))^k$ بالعزم المركزي من المرتبة k للمتغير العشوائي X و يرمز له بالرمز Mk حيث أن:

$$Mk=E[x-E(X)]^k=E(X^k)-E(X)^k/k=0,1,2\ldots$$

فرنسية

- فإذا كان المتغير العشوائي متقطع، عرف قانون توزيعه، فان العزم المركزي من المرتبة k لهذا المتغير يعرف بالصيغة التالية:

$$M_k=\sum_{(i=1)}^{n} Pi[xi-E(X)]^k$$

فرنسية

- فإذا كان المتغير العشوائي مستمر، عرف قانون توزيعه، فان العزم المركزي من المرتبة k لهذا المتغير يعرف بالصيغة التالية:

$$M_k=\int_{(i=1)}^{n}(x-E(x))^k\ f(x)\,dx$$

فرنسية

مثال:

استعمل معطيات المثال السابق لحساب العزم المركزي من الدرجة الثانية و الرابعة.

Pi (xi − E(	Pi (xi − E(	xi − E(x)	Pi xi	Pi	xi
0,768	0,392	-1,4	0,2	0,2	1
0,0128	0,080	-0,4	1	0,5	2
1,229	0,768	1,6	1,2	0,3	4
M_4= 2,00	M_2= 1,240		2,4	1	∑

فرنسية

ملاحظة: نلاحظ أن العزم المركزي من الدرجة الثانية هو عبارة عن تباين

ج. مقاييس الشكل

توجد أعداد لا نهائية من التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية و التمثيل لها يعطينا أشكالا مختلفة من المنحنيات منها المتناظر و منها الملتوي ... و لهذا سندرس مقاييس الشكل التي تضم مقاييس الالتواء (عدم التناظر) و مقاييس التفرطح (التطاول).

1. مقاييس الالتواء (عدم التناظر)

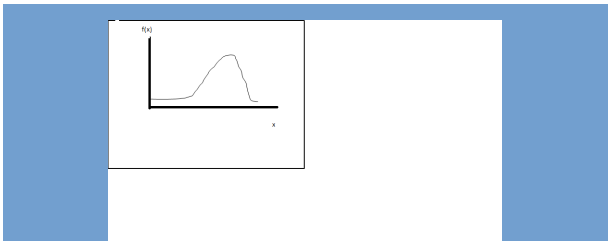
يقصد بالالتواء بُعد المنحنى المقابل للتوزيع الاحتمالي عن التماثل و هو اما يكون التواء موجب (التواء على اليمين) أو يكون التواء سالب (التواء على اليسار). بالإضافة الى امكانية معرفة نوع الالتواء المنحنى، يمكن معرفة كذلك درجة التوائه (بسيط أو حاد) من شكل المنحنى نفسه إلا ان هذا لا يعطينا قياسا رقميا دقيقا للالتواء و لذلك فمن المهم الوصول الى بعض المقاييس التي يمكن استخدامها.

1) معامل الالتواء

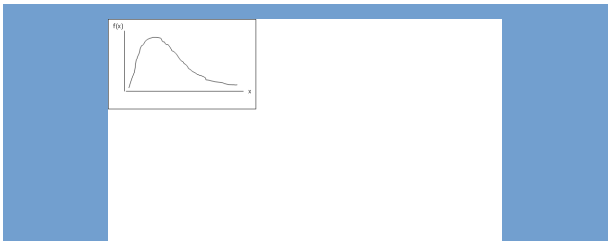
لمقياس مقدار الالتواء نستخدم ما يسمى معامل الالتواء و الذي يعرف بالعلاقة التالية:

$$L = M_3 / \delta x = E(x - E(X))^3 / \delta x$$

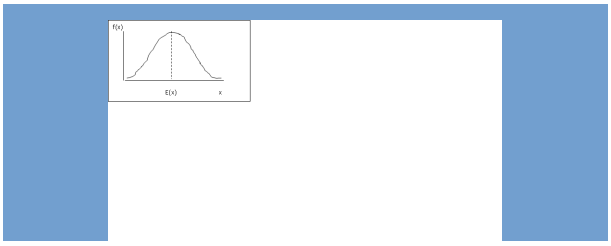
فرنسية



- اذا كان المعامل ث سالب (L<0) فان منحنى التوزيع الاحتمالي يكون ملتويا نحو اليسار



- اذا كان المعامل L موجب (L>0) فان منحنى التوزيع الاحتمالي يكون ملتويا نحو اليمين.



- اذا كان المعامل (L=0) فان منحنى التوزيع الاحتمالي يكون متماثلا و متناظرا بالنسبة التوقع الرياضي.

2) درجة الالتواء

اذا أخذنا الفرق بين التوقع الرياضي و المنوال و نسبناه الى الانحراف المعياري، حصلنا على مقياس يدل على درجة التواء منحنى التوزيع الاحتمالي. و يرمز له بالرمز D حيث :

$$D=(E(X)-Mo)/\delta x$$

فرنسية

مثال:

باستعمال قانون التوزيع الاحتمالي التالي لحساب معامل الالتواء و درجة الالتواء و ماذا تستنتج؟

i (xi − E(x)	i (xi − E(x)	xi − E(x)	Pi xi	Pi	xi
-0,5488	0,392	-1,4	0,2	0,2	1
-0,032	0,080	-0,4	1	0,5	2
1,2288	0,768	1,6	1,2	0,3	4
M3=0,648	M_2= 1,240		2,4	1	∑

فرنسية

- معامل الالتواء:

$$L = M_3/\delta x = E(x - E(X))^3/\delta x = 0,648/\sqrt{1,240} = 0,58$$

فرنسية

نلاحظ بان هذا التوزيع ملتوي نحو اليمين لان L>0

- درجة الالتواء:

$$D = (E(X) - Mo)/\delta x = (2,4 - 2)/\sqrt{1,240} = 0,35$$

فرنسية

نلاحظ من النتيجة بأن درجة الالتواء ضعيفة .

2. مقاييس التطاول

يوجد بعض المنحنيات متشابهة في الشكل (شكل الالتواء) و لكن تختلف في القمة. فأحدهما يكون أكثر تذبذبا (تفرطحا) من بعض الاشكال الاخرى، و لذلك نقوم بقياس هذا النوع من المقياس الذي يدعى بمعامل التطاول.

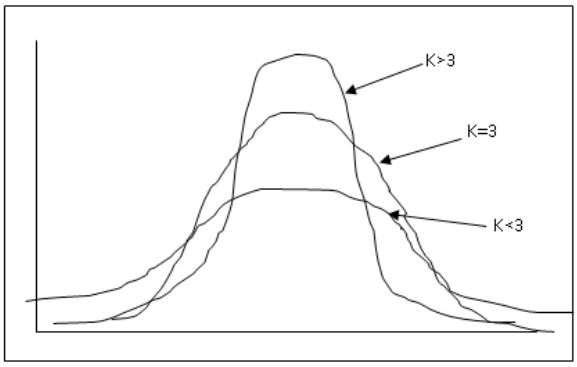
1) معامل التطاول

لقياس مدى تطاول المنحنى نستخدم معامل التطاول و الذي يعرف بالعلاقة التالية:

$$K = M_4/\delta x^4 = E(x - E(X))^4/\delta x^4$$

فرنسية

- اذا كان المعامل K>3، فان ذلك يدل على أن التوزيع الاحتمالي متطاولا بالنسبة للتوزيع الطبيعي.
- اذا كان المعامل K <3، فان ذلك يدل على ان التوزيع الاحتمالي مفرطحا بالنسبة للتوزيع الطبيعي.
- اذا كان المعامل K =3، فان ذلك يدل على ان التوزيع الاحتمالي معتدل (طبيعي).



فرنسية

ملاحظة

K>3، المنحنى له أقل انحراف معياري بين المنحنيات الاخرى. و يرجع ذلك لتمركز معظم التكرارات قرب التوقع الرياضي، لذلك تضيق القاعدة و يصبح مذبذب القمة.

K <3، المنحنى له اكبر انحراف المعياري بين المنحنيات الاخرى (تشتت كبير) و لذلك نجده مفرطحا و قاعدته متسعة نتيجة قلة التكرارات قرب المركز و زيادة تشتت القيم حول المتوسط الحسابي.

مثال

باستعمال قانون التوزيع الاحتمالي التالي لحساب معامل التطاول و ماذا تلاحظ؟

$i\ (xi - E(x)$	$i\ (xi - E(x)$	$xi - E(x)$	$Pi\ xi$	Pi	xi
0,768	0,392	-1,4	0,2	0,2	1
0,0128	0,080	-0,4	1	0,5	2
1,229	0,768	1,6	1,2	0,3	4
M_4= 2,009	M_2= 1,240		2,4	1	$\sum$

فرنسية

- معامل التطاول:

$$K = M_4 / \delta x^4 = E(x - E(X))^4 / \delta x^4 = 2{,}0098 / (\sqrt{1{,}240})^2 = 1{,}31$$

فرنسية

نلاحظ بان k<3 هذا يدل على أن هذا التوزيع مفرطح مقارنة بالتوزيع المعتدل

II نشاط التعلم

تمرين 25

آ. تمرين

سـؤال

[25 ص 1 حل رقم]

ليكن X متغير عشوائي مستمر دالته معرفة كما يلي:

$$f(x) = a\,x^2 \; si \; 0 \leq X \leq 1$$

فرنسية

المطلوب:
1-حدد ثابت a بحيث يكون(f(x تابع كثافة.
2-أحسب P(X<1/2)
3-أحسب توقع الرياضي و التباين.

حل التمارين

> 1 (ص 23)

1- لكي يكون(f(x تابع كثافة يجب :

$$\int_0^1 f(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_0^1 a\,x^2\,dx=1 \Rightarrow a\left[x/3^3\right]_0^1=1 \Rightarrow a=3$$

فرنسية

حساب P(X<0,5)

$$P(X<0{,}5)=\int_0^{0,5} 3x^2\,dx=3\left[x^3/3\right]_0^{0,5}=1/8$$

فرنسية

3- حساب(V(x), E(x

$$E(x)=\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\int_0^1 x\,3x^2\,dx=3\int_0^1 x^3\,dx=3\left[x^4/4\right]_0^1=3/4$$

فرنسية

$$V(x)=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx-E(x)^2=\int_0^1 x^2\,3x^2\,dx-E(x)^2=3\int_0^1 x^4\,dx-E(x)^2=3\left[x/5^5\right]_0^1-(3/4)^2=3/5-0{,}5625=0{,}0375$$

فرنسية