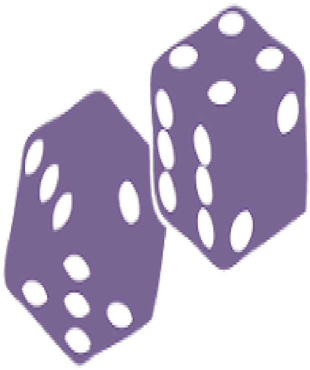
الاحصاء الرياضي

الفصل الثاني: نظرية الإحتمالات

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

السنة الأولى جذع مشترك



الأستاذة غيدة فوزية

30/03/2019

قائمة المحتويات

وحدة

في نهاية هذا الفصل يكون الطالب قادر على:
* ضرب أمثلة عن تجربة عشوائية من خلال وصفها.
*التمييز بين أنواع الحوادث.
*تطبيق قوانين الإحتمال لحساب الاحتمالات باستعمال العلاقات على الحوادث

I نظرية الاحتمالات

آ. الحادث و أنواعه

1. تعريف الحادث:

هو الاهتمام بنتيجة ما محددة من النتائج الممكنة للتجربة العشوائية E أو عدة نتائج محددة.

2. أنواع الحوادث:

1) الحادث البسيط (الابتدائي):

نقول عن الحادث A أنه بسيط إذا كان غير قابل للتجزئة أي هو بمثابة مجموعة جزئية من فراغ إمكانات التجربة ذات إمكانية وحيدة.

مثال

ظهور العدد 3 على وجه قطعة نرد هو بمثابة حادث بسيط من المجموعة الأساسية S إذ أنه غير قابل للتجزئة. مع $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

2) الحادث المركب:

هو الحادث الذي يتكون من الحوادث البسيطة.

مثال

إذا تحصلنا على عدد فردي عند رمي حجر نرد "الحادث A" حيث $A=\{1,3,5\}$. فالحادث A هو حادث مركب الذي يتكون من الحوادث البسيطة.

3) الحادث المستحيل:

نقول عن الحادث انه مستحيل إذا كان غير قابل للتحقق أبدا نتيجة التجربة E. فمجموعة عناصر الحادث المستحيل هي مجموعة خالية (ø).

مثالـ

في تجربة إلقاء حجر نرد، إن حادث ظهور أحد أرقام الستة لهذا الحجر هو حادث أكيد، في حين الحصول على رقم 8 هو حادث مستحيل.

4) الحادث المتمم (المعاكس):

نقول أنه لكل حادث A مرتبط بالتجربة E متمم حيث أنه يتكون من مجموعة الإمكانات غير محقق لــ A و المرتبطة بــ E، و نرمز له بالرمز$\bar{A}$ =CA

مثالـ

عند إلقاء حجر النرد، فحصول على الحادث A و المتمثل في "الأعداد الزوجية" فالحادث المعاكس أو المتمم هو الحصول على الحادث $\bar{A}$ و المتمثل في "الأعداد الفردية" ,

5) الحوادث المتنافية و غير متنافية:

الحوادث المتنافية هي تلك الحوادث التي لا يمكن وقوعها في أن واحد حيث وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر، حيث: $A \cap B = \emptyset$.

أما الحوادث غير متنافية هي تلك الحوادث التي يمكن وقوعهما معا في أن واحد حيث وقوع أحدهما لا يمنع وقوع الآخر أي يوجد عناصر مشتركة بين حادثين غير متنافيين.

ب. عمليات و علاقات على الحوادث

1. علاقة الاحتواء:

نقول أن الحادث A محتواه في الحادث B أي (A c B)، إذا كان كل عنصر من المجموعة ينتمي إلى A حتما ينتمي إلى B. و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$AcB \Rightarrow \forall\ w1 \in A \Rightarrow w1 \in B$$

فرنسية

2. علاقة التساوي:

نقول أن A و B حادثين متساويين (A=B) إذا كان كل حادث أولي ينتمي إلى A و ينتمي إلى B أي (AcB) و كل حادث أولي ينتمي إلى B و ينتمي إلى A أي (BcA)

3. علاقة الفرق:

نسمي فرق الحادثين A و B الحادث الذي يرمز له بــــ (A-B) و الذي يحتوي على الحوادث الأولية التي تنتمي إلى الحادث A و لا تنتمي إلى الحادث B. و هذا ما يعبر عنه بالكتابة التالية:

$$A - B = wi \in S\, , wi \in Aet\ wi \notin B$$

فرنسية

وقوع الحادث A-B يعني وقوع الحادث A و عدم وقوع الحادث B.

4. علاقة التقاطع:

نعرف تقاطع الحادثين A و B هو الحادث الذي يرمز له بـــ A∩B و الذي يتضمن الحوادث الأولية التي تنتمي إلى A و B حيث تحقق A و تحقق B.

5. علاقة الاتحاد:

نعرف اتحاد الحادثين A و B الحادث الذي يرمز له بـــ AUB و الذي يتضمن الحوادث الأولية التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B.

ب. الاحتمال و قوانينه

1. تعريف الاحتمال:

الاحتمال هو تعبير كمي لحظ أو إمكانية ظهور نتيجة معينة.

مثال

التجربة E متمثلة في رمي حجر نرد، فعند ظهور نتيجة معينة فيكون التعبير عنها عن طريق القياس، فهو الاحتمال.

2. حساب الاحتمال:

لدينا تجربة عشوائية E مجموعتها الأساسية (فراغ الحوادث الأولية) هي S مع $S=\{w_1, w_2,...w_m\}$ و نفرض أن جميع الحوادث الأولية لها نفس إمكانية الظهور معناه لدينا نفس الاحتمال و الذي يساوي حيث n عدد عناصر المجموعة الأساسية S أي أن: $P_{(w1)}=P_{(w2)}=........=P_{(wm)}$

إذا كان الحادث A الذي عناصره تنتمي إلى المجموعة الأساسية S حيث: $A =\{w1, w2,...wk\}$

فاحتمال الحادث A الذي يرمز له بالرمز(P(A يحسب كما يلي:

$$P(A)=\frac{|A|}{|S|}$$

فرنسية

و التي تقرأ الاحتمال يساوي كغدينال لـــــ(cardinal de A) A على كغدينال لــــ(B(cardinal de B.

3. القوانين الأساسية في نظرية الاحتمال:

1) قانون جمع الاحتمالات:

عند دراسة جمع الاحتمالات يتطلب أن نعرف نوعية الحوادث هل هي متنافية أو غير متنافية.

1الحوادث المتنافية:

إذا كان A و B حادثين متنافيين، فان تحقق اجتماعهما يساوي مجموع احتمالاتهما أي أن:

$P(A \cup B)= P(A)+ P(B)$

2الحوادث غير المتنافية:

إذا كان لدينا A و B حادثان غير متنافيان، فان احتمال وقوع احدهما هو عبارة عن حاصل جمع احتمال وقوع كل منهما مع إبعاد احتمال وقوعهما معا بآن واحد أي أن:

$$p(A\cup B)=p(B)+P(A)+P(A\cap B)$$

فرنسية

تعرف هذه الصيغة باسم قانون العام للجمع.

أساسي

بصفة عامة : يمكن تعميم صيغة الجمع في حالة الحوادث غير المتنافية (قانون العام للجمع) على اكثر من حادثين. فلو أخذنا 3 حوادث Aو Bو C و اتبعنا الأسلوب نفسه سنحصل على الصيغة التالية:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+p(C)-p(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+p(A\cap B\cap C)$$

فرنسية

2) قانون فرق الحادثين:

يمكن تعبير عن فرق الحادثين A و B بالعلاقة التالية:

$$p(A-B)=p(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$$

فرنسية

مثال

عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة، إن احتمال الحصول على رقم فردي هو P(A)=3/6 و احتمال الحصول على الرقم الفردي و يقبل القسمة على 3 هو :

$$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

فرنسية

والمطلوب هو إيجاد احتمال الحصول على الرقم الفردي فقط..

يمكن أن نعبر عن السؤال بالطريقة التالية: إيجاد احتمال الحصول على الرقم الفردي ماعدا العناصر المشتركة مع الحادث المتمثل في الحصول على الرقم يقبل القسمة على 3. نستعمل في هذه الحالة قانون فرق الحادثين

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=3/6-1/6=1/3$$

فرنسية

3) الاحتمال الشرطي:

تستخدم نظرية الاحتمال الشرطي رمز(P(A/B و الذي يقرأ : احتمال تحقق الحادث A شرط تحقق الحادث B أو علما بتحقق الحادث B.

نجد انفسنا أمام حالتين: هل يوجد ارتباط أو لا يوجد بين الحادثين Aو B.

- إذا كان Aو B حادثين مستقلين عن بعضهما فانه يكون لدينا:

P(A/B) =P(A)

و

P(A/B) =P(A)

- إذا كان Aو B حادثين غير مستقلين عن بعضهما فانه يكون لدينا:

P(A/B) ≠P(A)

و

P(B/A)≠P(B)

1الحوادث غير مستقلة:

إذا كان لدينا حادثين Aو B و كان وقوع الحادث B مشروط بوقوع الحادث A، فان احتمال وقوعهما معا يساوي جداء وقوع الأول بالاحتمال وقوع الثاني بعد وقوع الأول. و يمكن تعبير عن ذاك كما يلي:

$$P(A\cap B)=P(A)*P(B/A)OU\ P(A\cap B)=P(B)*P(A/B)$$

فرنسية

- إذا كان P(B)≠0، فان الاحتمال الشرطي لوقوع الحادث A بعد معرفة وقوع الحادث B يعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A/B)$$

فرنسية

و تسمى هذه العلاقة بقاعدة الضرب بحيث:

$$P(A)*P(B/A)=P(B)*P(A/B)$$

فرنسية

- إذا كان P(A)≠0، فان الاحتمال الشرطي لوقوع الحادث A بعد معرفة وقوع الحادث B يعطى بالعلاقة التالية:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B/A)$$

فرنسية

- إذا كان لدينا Aو B حادثين متنافيين و حادث C غير مستقل عن Aو B، فان:

$$P[(AUB)/C]=P(A/C)+P(B/C)$$

فرنسية

2الحوادث المستقلة:

إن احتمال وقوع حادثين مستقلين أو أكثر معا في آن واحد يساوي إلى حاصل ضرب وقوع كل منهما، حيث نعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

فرنسية

و هي علاقة مستخلصة مباشرة من قاعدة ضرب الاحتمالات.

مثال

صندوق يحتوي على 10 مصابيح كهربائية منها 7 صالحة للإضاءة و 3 غير صالحة للإضاءة، قام أحد ألأشخاص بسحب مصباحين بطريقة عشوائية من الصندوق مع إرجاع المصباح الأول إلى الصندوق. و المطلوب هو إيجاد ما يلي:

1- احتمال كونهما صالحين للإضاءة.

2- احتمال كونهما غير صالحين للإضاءة

3- كون الأول صالح للإضاءة و الثاني غير صالح للإضاءة

الحل:بما أن لدينا سحب بإرجاع فإننا في حالة الحوادث المستقلة.

1- احتمال كون مصباحين صالحين للإضاءة، أي الأول صالح للإضاءة (الحادث A1) و الثاني صالح للإضاءة (الحادث A2):

$$P(A1 \cap A2) = P(A1) * P(A2) = \frac{\frac{7}{10} * 7}{10} = \frac{49}{100} = 0{,}49$$

فرنسية

2-احتمال كون مصباحين غير صالحين للإضاءة، أي الأول غير صالح للإضاءة (الحادث B1) و الثاني غير صالح للإضاءة (الحادث B2):

$$P(B1 \cap B2) = P(B1) * P(B2) = \frac{\frac{3}{10} * 3}{10} = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

فرنسية

3-احتمال كون مصباح الأول صالح للإضاءة (الحادث A1) و الثاني غير صالح للإضاءة (الحادث B2):

$$P(A1 \cap B2) = P(A1) * P(B2) = \frac{\frac{7}{10} * 3}{10} = \frac{21}{100} = 0{,}21$$

فرنسية

4) الاحتمال الكلي:

في حالات كثيرة قد يكون وقوع حادث ما مثلا الحادث A مرتبط بتجربة E، لا يتحقق إلا بتحقق أحد الحوادث المتنافية $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots, B_n$ و التي تشكل تجزئة للمجموعة الكلية S.

ونقول أن الحوادث : $B_1,B_2,B_3, ...,B_n$ إنها تشكل تجزئة للمجموعة الكلية S إذا تحققت الشروط التالية:

$$\forall\ i : 0 \leq P(Bi) \leq 1$$

فرنسية

$$i \neq j : (Bi \cap Bj) = \varnothing$$

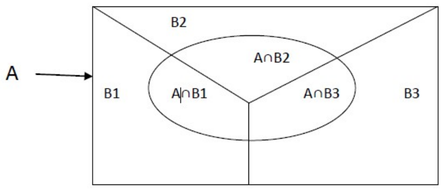
فرنسية

هذه الحوادث متنافية مثنى مثنى.

$$\coprod_{i=1}^{n} Bi = S \Rightarrow B1 \cup B2 \cup .... \cup Bn = S$$

فرنسية

و لنفرض أنه لدينا 3 حوادث متنافية B1,B2,B3، حيث تشكل المجموعة الكلية S و كان الحادث A لا يتحقق إلا بتحقق أحد الحوادث الجزئية الثلاثة كما هو موضح في الشكل التالي:



فرنسية

من الشكل نجد:

$$A = (A \cap B1) \cup (A \cap B2) \cup (A \cap B3)$$

فرنسية

نلاحظ أن الحوادث (A∩Bi) أحداث متنافية مثنى مثنى حيث ($i=1 \rightarrow 3$)و حسب خاصية جمع

الاحتمالات نجد أن:

$$P(A)=P(A\cap B1)+P(A\cap B2)+P(A\cap B3)$$

فرنسية

و باستخدام قاعدة ضرب الاحتمالات على P(A∩Bi) نحصل على :

$$P(A)=P(B1).P(A/B1)+P(B2).P(A/B2)+P(B3).P(A/B3)$$

فرنسية

والتي يكتب في الشكل العام كالتالي:

$$\sum_{i=1}^{3} p(Bi).P(\frac{A}{Bi})=p(A)$$

فرنسية

و تدعى هذه العلاقة بالاحتمال الكلي.

5) دستور بايــــــــــــــــــــــز:

تعتمد هذه النظرية على مختلف القوانين السابقة، و هي تعالج كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية التي تشكل مجموعة كلية و مرافقة لحادث A.

لنفرض أنه لدينا مجموعة الحوادث المتنافية $B_1,B_2,B_3, ...,B_n$ و التي تشكل تجزئة للمجموعة الكلية S و A حادثا ما يمكن أن يتحقق فقط بتحقق أحد الحوادث: $B_1,B_2,B_3, ...,B_n$ و نريد حساب الاحتمالات الشرطية التالية: P(Bi/A)

- لدينا حسب قانون احتمال تقاطع الحوادث غير مستقلة:

$$P(A\cap Bi)=P(A).P(Bi/A)=P(Bi).P(A/Bi)\Rightarrow P(A).P(Bi/A)=P(Bi).P(A/Bi)$$

فرنسية

و لنقسم طرفي المعادلة على P(A) علما أن P(A)>0 فنجد :

$$P(Bi/A)=\frac{P(Bi).P(\frac{A}{Bi})}{P(A)}$$

فرنسية

و بما أن الحوادث $A,B_1,B_2,B_3, ...,B_n$ تحقق شروط الاحتمال الكلي، و عليه :

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} p(Bi).P(\frac{A}{Bi})$$

فرنسية

بالتعويض نجد:

$$P\left(\frac{Bi}{A}\right)=\frac{P(Bi).P\left(\frac{A}{Bi}\right)}{\sum_{i=1}^{n} p(Bi).P\left(\frac{A}{Bi}\right)}$$

فرنسية

تدعى هذه العلاقة بدستور بايـــــــــــــــــــز

II نشاط التعلم

آ. تمرين

سـؤال

[19 ص 1 حل رقم]

مجموعة تتكون من 6 طالبات و 10 طلبة، تم اختيار بطريقة عشوائية لجنة ثلاثية من هذه المجموعة.

لمطلوب إيجاد احتمالات التالية:

- اختيار 3 طلبة.
- اختيار طالبين بالضبط.
- اختيار طالب واحد على الأقل.
- اختيار طالبتين بالضبط.

حل التمارين

> 1 (ص 17)

نستعمل التوفيقات لإيجاد مختلف الاحتمالات التالية لأننا في حالة ترتيب غير مهم.
الحالات الممكنة لاختيار 3 أشخاص من بين 16 شخص:

$$C_{16}^{3}=16!/(3!(16-3)!)=560$$

فرنسية

1- احتمال اختيار 3 طلبة: الحادث A

$$P(A)=(C_{10}^{3})/560=120/560=0,21$$

فرنسية

2- احتمال اختيار طالبين بالضبط الحادث B

$$P(B)=(C_{10}^{2}*C_{6}^{1})/560=270/560=0,48$$

فرنسية

3- احتمال اختيار طالب واحد على الاقل.الحادث C

$$P(C)=(C_{10}^{1}*C_{6}^{2}+C_{10}^{2}*C_{6}^{1}+C_{10}^{3}*C_{6}^{0})/560=540/560=0,96$$

فرنسية

4- احتمال اختيار طالبتين بالضبط الحادث D

$$P(C)=(\llbracket C_{6}^{2}*C\rrbracket_{10}^{1})/560=150/560=0,27$$

فرنسية