الإحصاء الرياضي

الفصل الأول: التحليل التوافقي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم

السنة الأولى جذع مشترك

التحليل التوافقي

الأستاذة: غيدة فوزية

30/3/2019

قائمة المحتويات

وحدة

في نهاية الفصل يكون الطالب قادر على:

التعرف على طرق التحليل التوافقي (التبديلات-الترتيبات-التوفيقات).

التمييز بين طرق التحليل التوافقي وذلك في حالتين بالتكرار وبدون تكرار .

توظيف طرق التحليل التوافقي في حل مشكل ما.

مقدمة

يهتم التحليل التوافقي بإعطاء عدد الطرق الممكنة للمجموعات ضمن شروط معينة من خلال بعض القواعد الرياضية التي تسهل هذا التكوين من جهة و يمكننا من دراسة المجموعات المنتهية من خلال تبسيط العد بها و استنباط طرق اكثر فعالية لحساب عدد الحالات الممكنة و عدد الحالات المواتية (الملائمة) المرتبطة بذلك الحادث، و بالتالي يصبح حساب الاحتمال من أهم التطبيقات العملية في التحليل التوافقي، و من بين هذه الطرق: التبديلات، الترتيبات و التوفيقات.

و لكن قبل هذا لا بد الإشارة إلى نقطة أساسية تشكل المرتكز الحقيقي للتحليل التوافقي و هو المبدأ الأساسي في العد.

I التحليل التوافقي

آ. المبدأ الأساسي في العد

1. قاعدة الضرب:

هي القاعدة الأساسية في التحليل التوافقي. مضمونها ما يلي:
إذا كانت لدينا تجربة أولى تحدث أو تنجز بـ n طريقة و كانت تجربة ثانية تختلف عن الأولى و تحدث بـ m طريقة فان العملية الأولى و الثانية تتم بــــ $n*m$

مثال

لنفرض أننا نود تصنيف مجتمع ما وفق الجنس (ذكر M و انثى F) و الحالة العائلية (متزوج M، اعزب C، مطلق D، أرمل V)، فعدد الحالات المختلفة و فق الصفتين (الجنس و الحالة العائلية) هي: 8 حالات و ذلك بالاستعمال قاعدة الضرب مباشرة كما يلي:

- اختيار حسب الجنس يوجد حالتين أي $n_1= 2$
- اختيار حسب الحالة العائلية يوجد 4 حالات أي $n_2= 8$

و منه عدد الحالات المختلفة هي :

$n_1*n_2 = 2*4= 8$

أساسي : حالة عامة

إذا كان لدينا التجارب التالية: $E1,E_2,E_3,......,E_k$ تنجز بــــ $n_1,n_2,n_3....,n_k$ طريقة على التوالي فان K تجربة تحدث مع بعض بــــ $n_1*n_2*n_3*....*n_k$ طريقة.

2. قاعدة الجمع:

مضمون هذه القاعدة هو ما يلي: إذا كانت لدينا تجربة أولى تحدث بــــ n طريقة و تجربة ثانية تحدث بــــ m طريقة فان عدد الطرق التي تتم بها التجربة الأولى أو الثانية هي : $n+m$.

مثال

نفرض انه لدينا مجموعة من الطلبة عددها 3 (A, B, C) و مجموعة من الطالبات عددها 2 (E, F)، فاختيار طالب يكون ب 3 طرق(A أو B أو C) و اختيار طالبة يكون ب طريقتين (Eأو F). فبكم طريقة يمكن للعملية 1 أو العملية 2 أن تتم؟

بهذه الحالة نستعمل قاعدة الجمع لإيجاد عدد الطرق المختلقة كما يلي:
$n_1+n_2 = 3+2= 5$

ب. طرق التحليل التوافقي

1. التبديلات :

تبديلات تدرس في حالتين هما:

1) تبديلات بدون تكرار:

هي مجموعة من العناصر المختلفة لمجموعة E . حيث أن$E=\{A,B,C\}$و قد نهتم بعدد الطرق التي يمكن أن ترتب بها عناصر هذه المجموعة ، و بغرض الوصول إلى ذلك يوجد عدة طرق :

طريقة

الطريقة الأولى : مفادها ترتيب الحروف الثلاثة بطرق مختلفة أي بتغيير كل مرة موضع الحرف و بدون تكراره لأننا في حالة تبديلة بدون تكرار. و بالتالي الطرق المختلفة هي:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

و منه عدد الطرق التي يمكن أن ترتب بها 3 عناصر المجموعة هو 6 طرق مختلفة.

طريقة

الطريقة الثانية: كل متبادلة من التبديلات الست تتكون من ثلاث عناصر. كل تبديلة تشغل ثلاث أمكنة كما يلي:

ع1	ع2	ع3
3	2	1

جدول1 →

و لتشكيل أي متبادلة علينا أن نقوم بملء المكان الأول باختيار العنصر الأول، بملء المكان الثاني باختيار العنصر الثاني و بملء المكان الثالث باختيار العنصر الثالث (من اليسار إلى اليمين)

تشكيل أي متبادلة هو تحقق ثلاث عمليات مع بعض و في آن واحد حيث:

- العملية الأولى (ع1): تتم بثلاث طرق
- العملية الثانية (ع2): تتم بطريقتين
- العملية الثالثة (ع3): تتم بطريقة واحدة.

إذا العمليات الثلاث تتم مع بعض $1*2*3=6=3!$، و بذلك نخلص إلى القاعدة الرياضية التي تسمح بإيجاد عدد الطرق التي يمكن أن ترتب بها عناصر مجموعة ما.

طريقة

الطريقة الثالثة: عندما يكون عدد عناصر المجموعة كبير، ففي هذه الحالة يتعذر علينا ذكر جميع الترتيبات الممكنة كما في الطريقة السابقة ثم عدها. فالعلاقة الرياضية التالية تساعدنا على ذلك و هي كما يلي:

$$n!=n*(n-1)*(n-2)*.......*(n-k+1)$$

فرنسية

أساسي : بصفة عامة

عدد الطرق التي يمكن أن يرتب n عنصر من مجموعة E هو n ! و الذي يرمز له: $P_{(n)}$ حيث:

$$P(n)=n!=n(n-1)(n-2).......(n-k+1)$$

فرنسية

تنبيه : حالة خاصة في التباديل الدائرية

إذا كنا بصدد ترتيب عناصر المجموعة ما بوضعية دائرية، فإن عدد الطرق المختلفة و القابلة لذلك هو:

$$P(n')=(n-1)!$$

فرنسية

و هذه التباديل هي خاصة تسمى بالتباديل الدائرية ل n عنصر.

إضافة : صيغة ستيرلنج لـــ $n!$

عندما تكون n كبيرة فان حساب قيمة n مباشرة يكون غير عملي، ففي مثل هذه الحالة يمكن الاستفادة بصيغة ستيرلينج التقريبية و تكتب على الشكل التالي:

$$n!=(n/e)^n\sqrt{2\pi n}$$

فرنسية

مع: e=2,71828

2) تبديلات مع تكرار:

يطلب في بعض الأحيان معرفة عدد التبديلات لمجموعة من العناصر يكون بعضها متماثلا (متكررا) مثل : أسماء البلدان، أسماء الأشخاص ....أو تكرار الأعداد. فالإيجاد عدد التبديلات يلخص باستعمال العلاقة الرياضية التالية:

$$P(\dot{n})=\frac{n!}{r!}$$

فرنسية

حيث: n : عدد عناصر المجموعة

r : عدد عناصر المجموعة المتشابهة

مثال

لدينا مجموعة E حيث E={A,A,B,A}

نلاحظ أن المجوعة E ليست عناصرها مختلفة و إنما هي متشابهة أي هناك عنصر يتكرر أكثر من مرة.
المطلوب: ماهو عدد المتبادلات يمكن تشكيلها من المجموعة E.

لدينا عدد عناصر المجموعة هو 4 أي (n=4) و عدد العناصر المتشابهة هو 3 أي (r=3)، و منه لإيجاد عدد التبديلات ممكن تشكيلها في هذه الحالة نستعمل العلاقة الرياضية التالية:

$$P(\dot{n})=\frac{n!}{r!}=\frac{4!}{3!}=\frac{4*3*2*1}{3*2*1}=4$$

فرنسية

و منه عدد التبديلات هو 4

أساسي : بصفة عامة

إذا كانت لدينا مجموعة تتكون من n عنصر و تحتوي على r_1 عنصر متشابه , r_2 عنصر متشابه ....و r_n عنصر متشابه، فان عدد التبديلات يساوي في هذه الحالة :

$$P(\dot{n})=\frac{n!}{r1!*r2!*\ldots.*rk!}$$

فرنسية

مثال

كم كلمة يمكن تشكيلها من كلمة statistiques .

لدينا 12 حرف في الكلمة أي n=12 متكون من:

- الحرف s يتكرر 3 مرات أي $r_1=3$
- الحرف t يتكرر 3 مرات أي $r_2=3$
- الحرف i يتكرر مرتين أي $r_3=2$
- الحرف a يتكرر مرة أي $r_4=1$
- الحرف u يتكرر مرة أي $r_5=1$
- الحرف e يتكرر مرة أي $r_6=1$
- الحرف q يتكرر مرة أي $r_7=1$

باستعمال القانون التالي في حالة تبديلات بتكرار:

$$P(12)=\frac{n!}{r1!*r2!*r3!*r4!*r5!*r6!*r7!}=\frac{12!}{3!*3!*2!*1!*1!*1!*1!}=6652800$$

فرنسية

أي يمكن تشكيل 6652800 كلمة

2. الترتيبات:

في بعض الأحيان قد نهتم بعدد الطرق التي يمكن أن نختار بها مجموعة جزئية من العناصر انطلاقا من مجموعة كلية. هنا نميز بين حالتين بتكرار و بدون تكرار:

1) الترتيبات بدون تكرار:

في هذه الحالة يمكن إيجاد عدد الطرق المختلفة (بدون تكرار العنصر) التي يمكن أن نختار بها مجموعة جزئية (r) من العناصر انطلاقا من مجموعة كلية (n) مع (r<n) تتم باستعمال القانون التالي:

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

فرنسية

ملاحظة

في الترتيبات بدون تكرار:

- تكرار غير مسموح.
- الترتيب مهم.

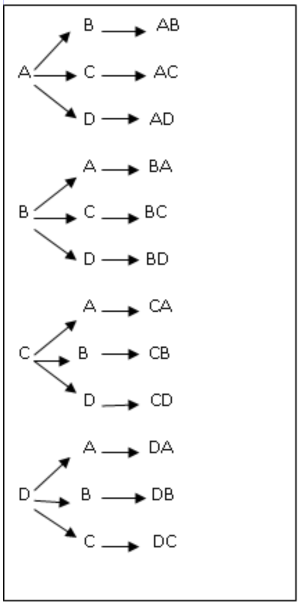
مثال

لدينا مجموعة E تتكون من 4 عناصر هي A,B,C,D و نريد إيجاد عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن نختار بها عنصرين من المجموعة E. ففي هذه الحالة نستعمل قانون ترتيبات بدون تكرار كما يلي:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4*3*2*1}{2*1} = 12$$

فرنسية

أي يوجد 12 طريقة مختلفة في اختيار عنصرين من مجموعة E. ونجد هذه الحالات بواسطة الشجرة التالية:



فرنسية

2) ترتيبات مع تكرار:

ترتيبات مع تكرار هو سحب أكثر من مرة (r مرة) من عناصر المجموعة الكلية (n). و هنا نجد حالتين:

- عندما تصبح المجموعة الجزئية (r) عند السحب عدة مرات العناصر تساوي المجموعة الكلية (n) أي (يتم سحب كل العناصر)، ففي هذه الحالة ترتيبة بتكرار تصبح تبديلة.
- إذا كانت المجموعة الجزئية (r) أصغر من المجموعة الكلية (n) و مع تواجد التكرار، ففي هذه الحالة نحن في حالة قائمة حيث :

$$AR_n^r = n^r$$

فرنسية

مثال

لدينا مجموعة E تتكون من 6 عناصر هي E,F,A,B,C,D نقوم بسحب ثلاث مرات عنصرين مع الإرجاع.

المطلوب: إيجاد عدد الطرق التي يمكن أن نختار بها عنصرين من المجموعة E.

نستعمل في هذه الحالة ترتيبة بتكرار، و بأن n=r=6 فتصبح هذه الترتيبة تبديلة، و عليه عدد الطرق الممكنة

P(6)= 6!= 6*5*4*3*2*1=720

3. التوفيقات:

إذا كان ترتيب العناصر داخل المجموعة الجزئية المسحوبة من المجموعة الكلية E غير مهم في عملية الاختيار هذه الطريقة تسمى بالتوفيقات. حيث يوجد في التوفيقات حالتين كذلك بتكرار و بدون تكرار.

1) توفيقات بدون تكرار:

إن عدد التوفيقات لـــ r عنصر دون إعادة من n عنصر مختلفا ممثل بالقانون التالي:

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

فرنسية

مثال

مجموعة تتكون من 6 طالبات و 10 طلبة. تم اختيار بطريقة عشوائية لجنة ثلاثية من هذه المجموعة. ما هو عدد حالات اختيار طالبين.

الحل: بما أن الاختيار يتم بدون ترتيب، فسنطبق توفيقات في عملية اختيار طالبين من بين 10طلبة كما يلي:

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10*9*8!}{2!*8!} = \frac{90}{2} = 45$$

فرنسية

2) توفيقات بتكرار:

إن عدد التوفيقات لـــ r عنصر مع إمكانية تكرار العنصر من n عنصر ممثل بالقانون التالي:

$$C_m^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-r)!}$$

فرنسية

مثال

لدينا كيس به 10 كريات، نقوم بسحب كرتين مع الإرجاع. المطلوب: إيجاد عدد الطرق التي يمكن أن نسحب بها كرتين من الكيس.

الحل: سنقوم بسحب كرتين من بين 10 كرات مع الإرجاع نستعمل في هذه الحالة توفيقات بإرجاع كما يلي:

$$C_{11}^2 = C_{10+2-1}^2 = \frac{(10+2-1)!}{2!(10-2)!} = \frac{11!}{2!8!} = \frac{11*10*9*8!}{2!*8!} = 495$$

فرنسية

للمزيد من المعلومات حول التوفيقات شاهد الفيديو التالي:

الاحتمالات -التوفيقـــات - بجيـــوجبـــرا ._2.MP4

فرنسية

4. ملخص الدرس خاص بالتحليل التوافقي

يوجد ثلاث طرق في التحليل التوافقي :

	بدون تكرار	
التبديلات	و الذي يرمز له ب . $n!$ هو E عنصر مختلف من مجموعة n هي عدد الطرق التي يمكن أن ترتب بها: $n(n-1)(n-2)\ldots.1= n!\ P(n) =$ حالة خاصة: التبديلات الدائرية: $(n-1)!\ P(n') =$ في التبديلات: تكرار غير مسموح ترتيب مهم	عدد الطرق التي يمكن أن ترتـ
الترتيبات	.n من المجموعة الكلية r هنا نهتم بترتيب عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن نختار بها المجموعة الجزئية ذلك حسب القانون التالي: $A_n^r = n! / (n-r)!$ في الترتيبات: تكرار غير مسموح ترتيب مهم	الجزئيـة = مجموعة الكلية. التكرار، فنحن في حالة **قائمة** $AR_n^r = n^r$ تكرار مسموح - ترتيب مهم -
التوفيقات	نهتم بعدد الطرق المختلفة -و بدون أخذ بعين الاعتبار الترتيب- التي يمكن أن نختار بها المجموعة الجزئ: $C_n^r = n! / r!\ (n-r)!$ في التوفيقات: تكرار غير مسموح - ترتيب غير مهم -	لجزئية من المجموعة الكلية. في ه الحالة نستعمل القانون التالي $C^r{}_{(n+r-1)} = (\text{r}$ تكرار مسموح - ترتيب غير مهم -

فرنسية

II نشاط التعلم

آ. تمرين

سؤال 1

[19 ص 1 حل رقم]

كم طريقة يمكن لـ 5 إخوة أن يجلسوا حول طاولة مستديرة لتناول وجبة الفطور؟

سؤال 2

[19 ص 2 حل رقم]

كم كلمة يمكن تشكيلها من كلمة :recherche

حل التمارين

> 1 (ص 17)

بما أن وضعية الكراسي تأخذ الشكل الدائري تماشيا مع هندسة الطاولة، فان هذا يعني أنه يمكن للأخ الأول أن يجلس في أي مكان حول الطاولة (كثابت) و يمكن للإخوة الأربعة الآخرين أن يرتبوا انفسهم حول طاولة و ذلك باستعمال قانون التبادل الدائري كما يلي:

$P(n)=P5=(5-1)!=4!=24$

أي 24 طريقة

> 2 (ص 17)

نحن في حالة تبديلات بتكرار:

كلمة recherche تتكون من 9 أحرف مع تكرار الحروف حيث:

الحرف"r" يتكرر مرتين أي $r_1=2$

الحرف "c" يتكرر مرتين أي $r_2=2$

الحرف"h" يتكرر مرتين أي $r_3=2$

الحرف" e" يتكرر ثلاث مرات أي 3 $r_4=$

$Pn=P9=n!/(r1!*r2!*r3!*r4!)=9!/(2!*2!*2!*3!)=7560$ mots

تنبيه ـ توجيه:

في حالة عدم تمكن الطالب من حل التمرين عليه بمراجعة الدرس وإعادة تطبيق الأمثلة.