

Niveau : 1^{ière} année Licence.

Spécialité : ST+ SM.

Matière : Mathématiques.

Année : 2020-2021, Semestre 1

Série d'exercices N 01 : Logique et méthodes de raisonnement

Exercice 1

Soient P et Q deux propositions. Donner les tables de vérités des propositions suivantes :

- $[\bar{P} \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow \bar{Q}$
- $[(P \vee Q) \wedge \bar{Q}] \Rightarrow Q$

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{Z}$, montrer la proposition suivante par deux méthodes :
si $9n + 5$ est paire, alors $3n + 2$ est impaire.

Exercice 3

Montrer que si $x, y \in \mathbb{Q}$ alors $x^2 + 4y \in \mathbb{Q}$.

Exercice 4

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, démontrer que si $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$.

Exercice 5

Soit $n > 0$, montrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 6

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
4. Montrer que : $1^2 - 2^2 + 3^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$.