Université Djilali Bounaâma de Khemis-Miliana

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Mathématiques et d'Informatique

L2 Informatique

Module: Théorie des graphes

Chargé de Cours

Dr KALI Abdesselam

Année universitaire

2020-2021

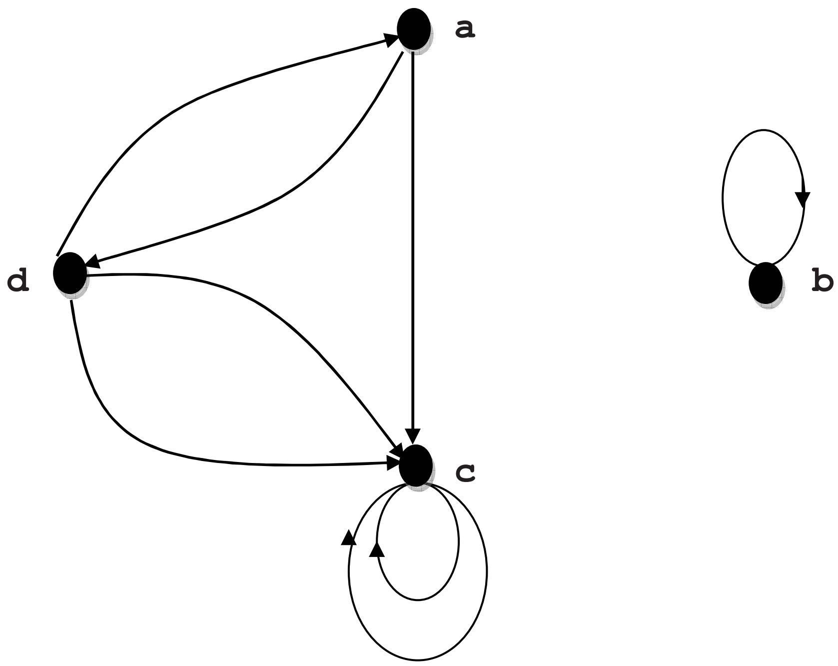
Chapitre 1

Graphes : Notions de base

- Un graphe **G** est la donnée d'un couple **(S,A)** où **S** est un ensemble fini non vide dit ensemble des sommets et **A** est l'ensemble des paires de sommets appelées arcs.

  Exemple: S={a ; b ; c ; d}

  A={(a,c);(a,d);(d,c);(d,a);(b,b);(c,c);(d,c);(c,c)}

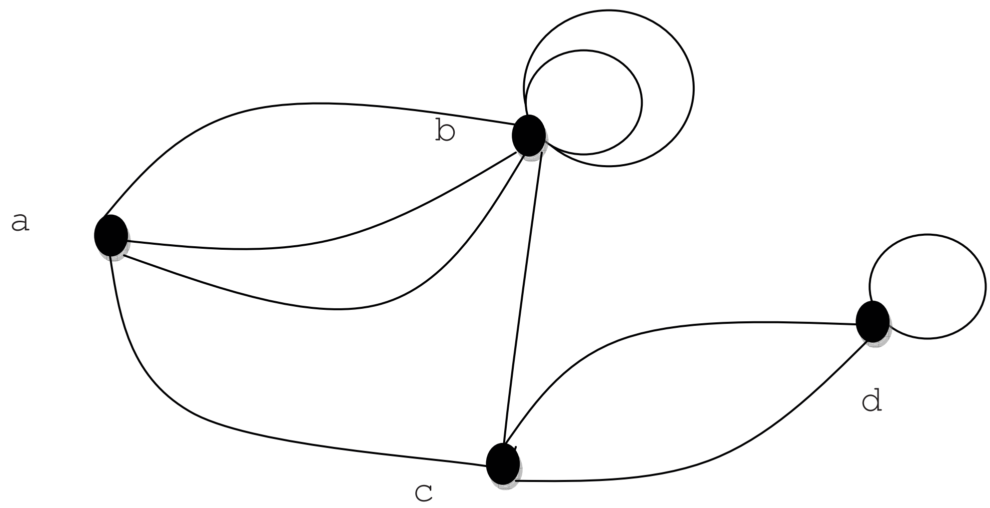


- Si le nombre d'arcs qui va d'un sommet **x** à un sommet **y** ne peut excéder **p**, on dit qu'on a un **p**-graphe ou que **p** est la multiplicité du graphe.

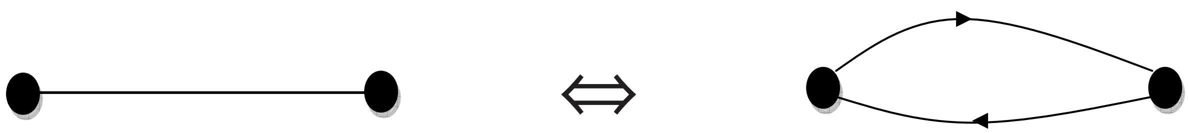
  Dans l'exemple précédent, on a un 2-graphe ou que 2 est la multiplicité du graphe.

- Le nombre de sommets du graphe **G** est appelé l'ordre de **G**. Dans l'exemple précédent, l'ordre du graphe est 4.
- Un arc de **G** de la forme **(x,x)** est appelé boucle.
  Pour un arc **(x,y)**, le point **x** est son extrémité initiale et le point **y** est son extrémité terminale. Dans l'exemple précédent, **(b,b),(c,c),(c,c)** sont des boucles. Pour l'arc **(a,d)**, **a** est l'extrémité initiale et **d** est l'extrémité terminale.
- On dit que **y** est un successeur de **x** ou que **x** est un prédécesseur de **y** s'il existe un arc de la forme **(x,y)**. L'ensemble des successeurs de **x** se note $\boldsymbol{\Gamma_G^+(x)}$ et l'ensemble des prédécesseurs de **y** se note $\boldsymbol{\Gamma_G^-(y)}$.
  Deux sommet **x** et **y** sont dits incidents ou voisins s'il existe une arête qui les relient. L'ensemble des voisins de **x** se note $\boldsymbol{\Gamma_G(x) = \Gamma_G^+(x) \cup \Gamma_G^-(y)}$.
  Si $\boldsymbol{\Gamma_G(x) = \emptyset}$, **x** est un sommet isolé.
  Si $\boldsymbol{E \subset S}$, on pose $\boldsymbol{\Gamma_G(E) = \bigcup_{x \in E} \Gamma_G(x)}$.
  Si $\boldsymbol{x \in \Gamma_G(E)}$ et $\boldsymbol{x \notin E}$, on dit que **x** est adjacent à l'ensemble **E**.
  Dans l'exemple précédent, **d** est un successeur de **a** et il est aussi un prédécesseur de **a**.
  $\boldsymbol{\Gamma_G^+(d) = \{a, c\}}$, $\boldsymbol{\Gamma_G^-(d) = \{a\}}$, $\boldsymbol{\Gamma_G(d) = \{a, c\}}$, $\boldsymbol{\Gamma_G(b) = \{b\}}$, **b** n'est pas un sommet isolé.
  $\boldsymbol{\Gamma_G(\{a, c\}) = \{a, d, c\}}$, $\boldsymbol{d \in \Gamma_G(\{a, c\})}$ et $\boldsymbol{d \notin \{a, c\}}$, **d** est adjacent à l'ensemble $\boldsymbol{\{a, c\}}$.

- Si on ne tient pas compte de l'orientation, on a un <u>multigraphe</u> **(S,A)** où **S** est l'<u>ensemble des sommets</u> et **A** est l'ensemble des <u>arêtes</u>.



- Un multigraphe est dit <u>simple,</u> s'il ne contient pas de boucles ni d'arêtes multiples.
- Il convient de préciser qu'il n'y a pas deux espèces de graphes : orientés et non orientés. Tout les graphes sont orientés, et une arête peut être transformée en deux arcs de sens différents.



- <u>Le degré extérieur</u> du sommet **x** noté $\mathbf{d_G^+(x)}$ est le nombre d'arcs ayant **x** comme extrémité initiale. <u>Le degré intérieur</u> du sommet **x** noté $\mathbf{d_G^-(x)}$ est le nombre d’arcs ayant **x** comme extrémité terminale.

$\mathbf{d_G^+(x) + d_G^-(x) = d_G(x)}$ est le degré de **x**.

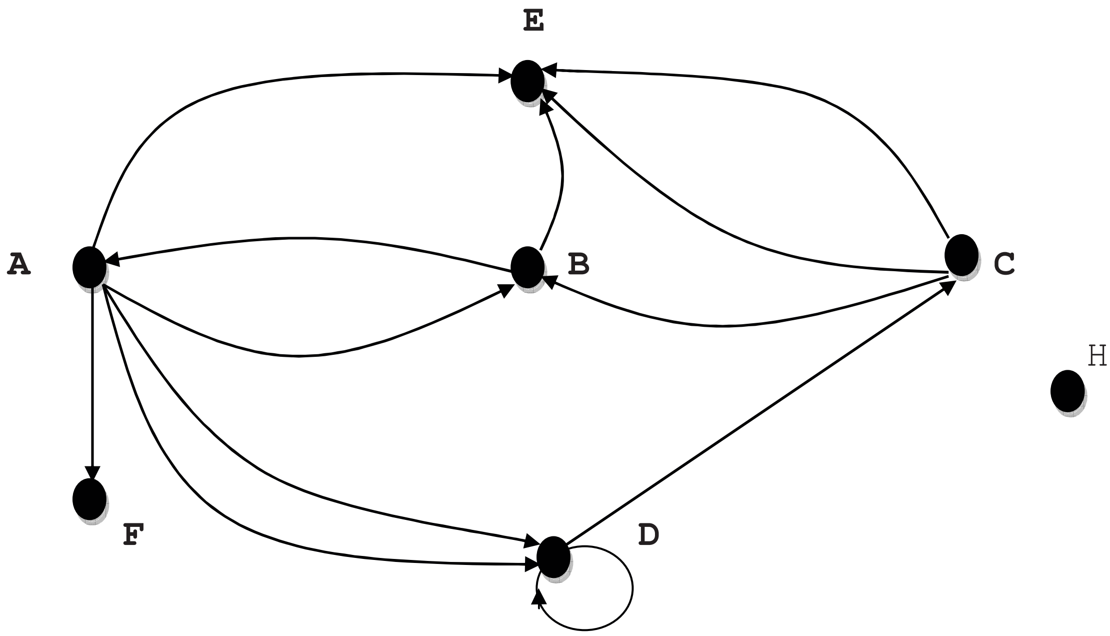
(chaque boucle étant comptée deux fois).

- Si $\mathbf{d_G(x) = 0}$, **x** est un sommet isolé.
- Si $\mathbf{d_G(x) = 1}$, **x** est dit sommet pendant.
- Si tous les sommets ont même degré, le graphe est dit régulier.
- On a la proposition suivante :

Proposition:

1. $\sum_{\mathbf{x \in S}} \mathbf{d_G^-(x)} = \sum_{\mathbf{x \in S}} \mathbf{d_G^+(x)}$.
2. $\sum_{\mathbf{x \in S}} \mathbf{d_G(x)} = \mathbf{2p}$, $p \in \mathbb{N}$.
3. $\sum_{x \in S} d_G(x) = 2|A|$.
4. Il ya un nombre pair de sommets qui sont de degré impair.

Exemple:



	A	B	C	D	E	F	H	Total
$\mathbf{d_G^+(x)}$	5	2	3	2	0	0	0	12
$\mathbf{d_G^-(x)}$	1	2	1	3	4	1	0	12
$\boldsymbol{d_G(x)}$	6	4	4	5	4	1	0	24

$$\sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \mathbf{d_G^-(x)} = \mathbf{12} = \sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \mathbf{d_G^+(x)}$$

$\sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \mathbf{d_G(x)} = \mathbf{2}4$ Un nombre pair.

$\sum_{\mathbf{x}\in\mathbf{S}} \mathbf{d_G(x)} = \mathbf{2} \times 12$, 12 est le nombre d'arcs du graphe.

Deux sommets D et F sont de degré impair.

Le graphe n'est pas régulier.

$d_G(F)=1$, F est un sommet pendant.

$d_G(H)=0$, F est un sommet isolé.

Exercices

Exercice 1: Soit **G = (S,A)** un graphe **r**-régulier. Montrer que: $|A| = \frac{r|S|}{2}$.

Exercice 2 : Peut-on construire un multi-graphe **G = (S,A)** simple ayant 4 sommets et 7 arêtes?

Exercice 3 : Est-il possible de tracer 5 segments sur une feuille de papier de manière à ce que chaque segment en coupe 3 autres?

Solution

Exercice 1:

On a $\sum_{x \in S} d_G(x) = 2|A|$.

On a **G** est **r**-régulier alors $\forall\, x \in S, d_G(x) = r$.

Donc $\sum_{x \in S} r = 2|A|$.

Ce qui donne $r|S| = 2|A|$.

D'où $|A| = \frac{r|S|}{2}$.

Exercice 2:

On a $\forall\, x \in S,\ d_G(x) \leq 3$ car G est simple.

On obtient $\sum_{x \in S} d_G(x) \leq 3 \times 4 = 12 = 2|A| = 2 \times 6$

Par conséquent $|A| \leq 6$.

Donc impossible de construire un multi-graphe **G = (S,A)** simple ayant 4 sommets et 7 arêtes.

Exercice 3:

Les sommets du graphe **G** représentent les segments.

Deux sommets de **G** sont adjacents si, et seulement si, les deux segments correspondants l'un coupe l'autre.

On a $\forall\, x \in S,\ d_G(x) = 3$ et $\sum_{x \in S} d_G(x) = 3 \times 5 = 15$ impair.

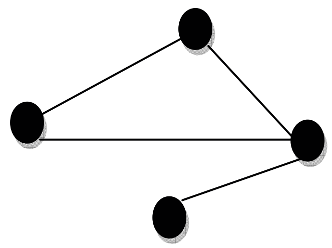
Donc impossible de tracer 5 segments sur une feuille de papier de manière à ce que chaque segment en coupe 3 autres, car la somme des degrés doit être un nombre pair.

Chapitre 2

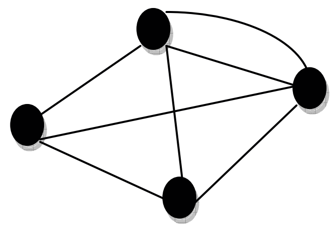
Les graphes particuliers

1. Graphe complet

Un graphe complet est un graphe dont tous les sommets sont adjacents.



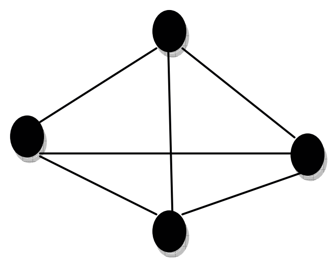
N'est pas complet



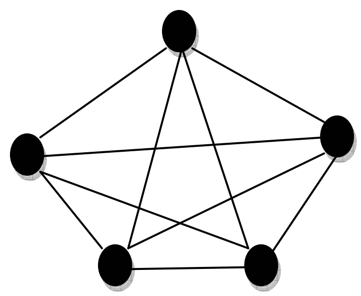
Complet

2. Clique

Une clique est un graphe simple et complet. Une clique de n sommets se note K_n.



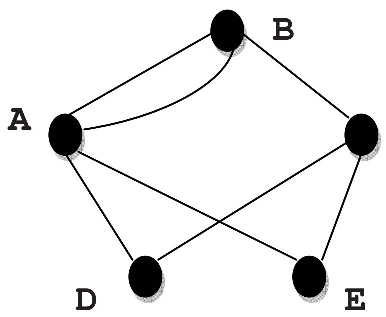
K_4

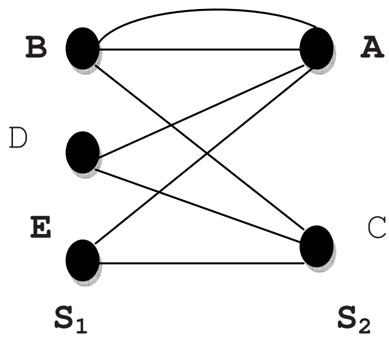


K_5

3. Biparti

Un graphe **G =(S,A)** est dit biparti si on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensemble (classes) S_1 et S_2 de telle sorte que deux sommets de même classe ne soient pas pas adjacents. On le note par **G =(S_1,S_2,A)**.

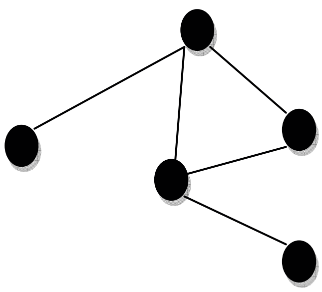




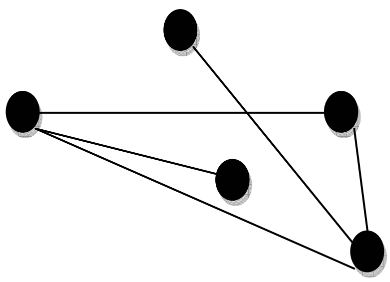
4. Graphe complémentaire

A un graphe simple **G =(S,A)**, on peut définir un graphe complémentaire $\overline{\mathbf{G}}$ **=(S,$\bar{A}$)** comme suit:

$$e \in A \Leftrightarrow e \notin \bar{A}$$



G

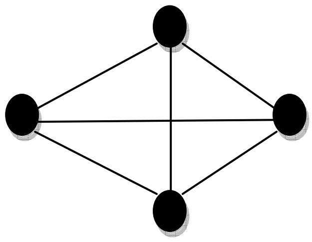


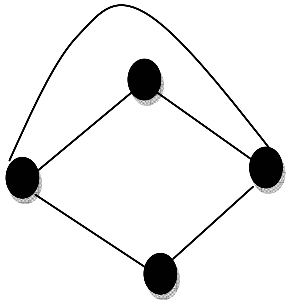
$\overline{\mathbf{G}}$

$$G \cup \overline{G} = K_5$$

5. Graphe planaire

Un graphe est dit planaire si on peut le dessiner sur un plan de telle façon que les arêtes ne se coupent pas en dehors de leurs extrémités.





Une face d'un graphe planaire est une région du plan limitée par les arêtes de telle sorte que deux points arbitraires dans cette région reliés par une arête ne rencontrent ni sommet ni arête.

La frontière d'une face est l'ensemble des arêtes qui l'entourent.

Une face infinie est une face illimitée, elle n'admet pas de contour et elle est unique. Les autres faces sont finies.

Deux faces sont dites adjacentes si leurs frontières ont une arête commune.

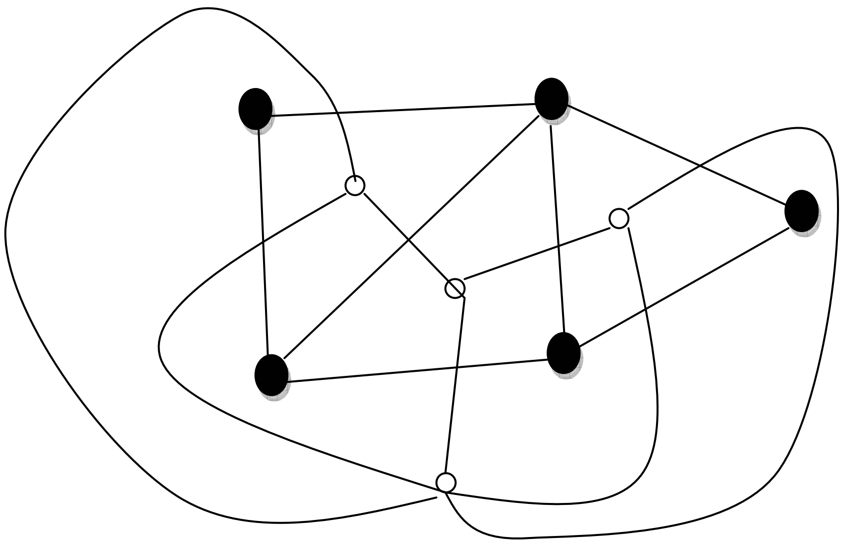
Les graphes planaires vérifient la formule dite d'Euler:

(nombre de sommets) + (nombre de faces)−(nombre d'arêtes)=2.

6. Graphe dual

Soit G un graphe planaire. Le dual de G, noté D, est défini comme suit:

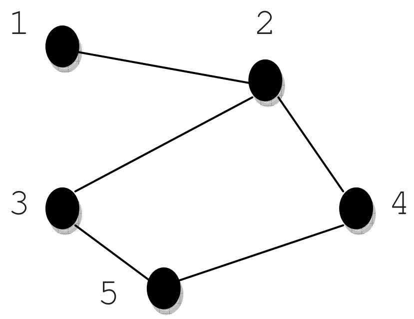
Chaque sommet de D représente une face de G. Une arête reliant deux sommets de D représente une arête commune des deux faces correspondantes dans G.



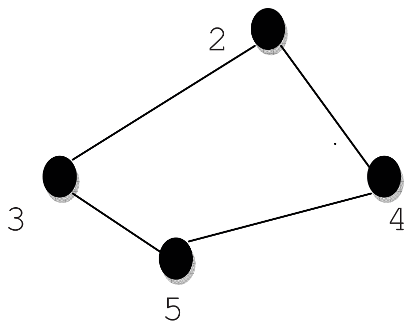
7. Sous-graphe et graphe partiel d'un graphe G =(S,A)

7.1. Sous graphe de G engendré par E ⊂ S

C'est le graphe $\mathbf{G_E}$ dont les sommets sont les points de E et dont les arêtes sont les arêtes de G ayant leurs extrémités dans E.



E={2,3,4,5}



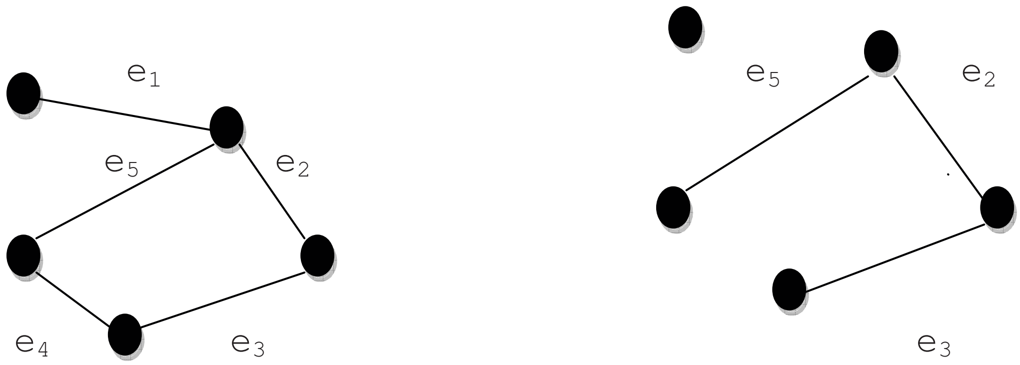
$\mathbf{G_E}$

7.2. Graphe partiel de G engendré par B ⊂A

C'est le graphe (S,A) dont les sommets sont les points de S et dont les arêtes sont ceux de U.

Autrement dit, en élimine de G les arêtes de A–B.

$B=\{e_2, e_3, e_5\}$

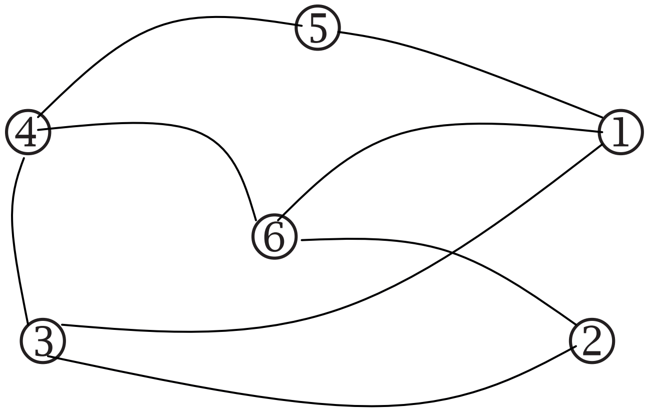


7.3. <u>Sous graphe partiel de G</u>

C'est un sous-graphe d'un graphe partiel de G.

<u>Exercice</u>

Soit ***G*** le graphe suivant :



Le graphe ***G*** est-il ?

a) Simple

b) Complet

c) Clique

d) Biparti

e) Biparti complet

f) Planaire

Solution:

a) ***G*** est Simple car ***G*** ne contient pas de boucles ni d'arêtes multiples.

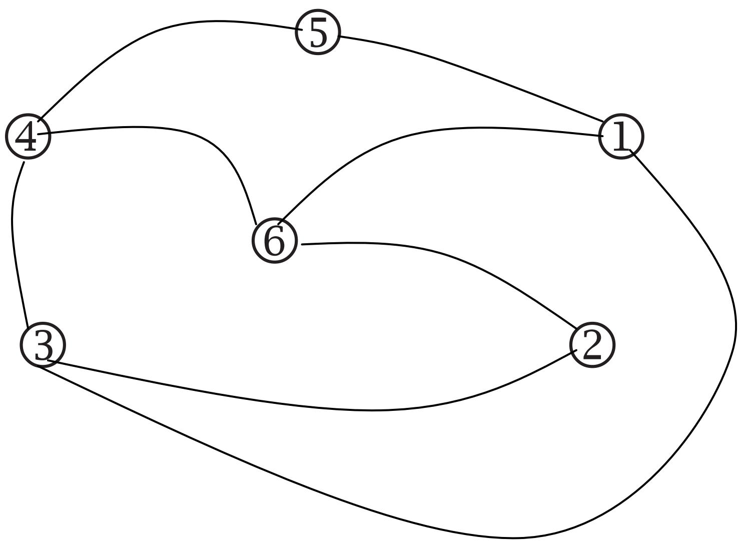
b) ***G*** n'est pas complet car sommets 1 et 2 ne sont pas adjacents.

c) ***G*** n'est pas une clique car ***G*** n'est pas complet.

d) ***G*** est biparti car on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux classe $S_1=\{1,2,4\}$, $S_2=\{3,5,6\}$ de telle sorte que deux sommets de même classe ne soient pas adjacents.

e)***G*** n'est pas biparti complet car 2 n'est pas adjacent avec 5.

f) **G** est planaire car il est possible de représenter **G** sur un plan de sorte que deux arêtes de **G** ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités.



Chapitre 3

Les différentes représentation d'un graphes

1. **Matrice associée**

   Si un graphe G admet n sommets x_1, x_2,…, x_n, posons a_{ij} le nombre d'arc de la forme (x_i,x_j), la matrice carrée (a_{ij}) est appelée matrice associée.

   Dans la matrice associée on a

   $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = d_G^+(x_i)$ et $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = d_G^-(x_j)$.

2. **Matrice d'adjacence**

   Si un graphe G admet n sommets x_1, x_2,…, x_n, posons a_{ij}=1 s'il existe un arc de la forme (x_i,x_j)et a_{ij}=0 sinon. La matrice carrée (a_{ij}) est appelée matrice d'adjacence.

3. **Matrice d'incidence sommets-arcs**

   Soit G un graphe de n sommets et m arêtes.

   La matrice d'incidence sommets-arcs de G est une matrice (a_{ij}) de dimension n×m définie par

   a_{ij}=1 si x_i est l'extrémité initiale de l'arc e_j

   a_{ij}=1 si x_i est l'extrémité terminale de l'arc e_j

   a_{ij}=0 dans les autres cas

   La matrice d'incidence ne convient pas pour les graphes avec boucle.

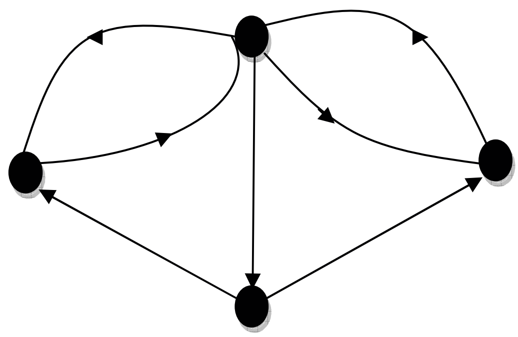
   Le nombre de valeurs égales à (+1) d'une ligne donne le degré extérieur $d_G^+(x)$ du sommet x correspondant.

Le nombre de valeurs égales à (-1) d'une ligne donne le degré intérieur $d_G^-(x)$ du sommet x correspondant.

4. **Le dictionnaire des successeurs et des prédécesseurs**

Il consiste à énumérer pour chaque sommet x du graphe G les ensembles $\mathbf{\Gamma_G^+(x)}$ et $\mathbf{\Gamma_G^-(x)}$.

Exemple:



La matrice associée

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice d'incidence

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 4

Les arbres

1. Définition:

Dans un multi-graphe, une chaîne de longueur q est une liste ordonnée de q sommets tel que chaque sommet de la liste soit adjacent au suivant. On la note par $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$.

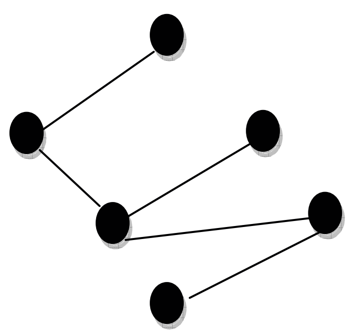
Une chaine $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ est une cycle si elle est simple et fermée. Simple si la même arête ne figure pas deux fois et fermée si les sommets aux extrémités de la chaîne se coïncident.

Un multi-graphe est dit connexe si pour toute paire de sommets distincts (x,y), il existe une chaîne reliant x à y.

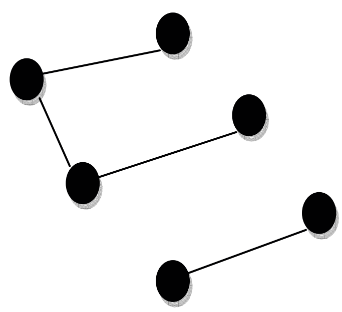
Un arbre est un multi-graphe connexe et sans cycle.

Un graphe sans cycle mais non connexe est appelé forêt.

Les sommets pendants d'un arbre ou d'une forêt sont appelés les feuilles.



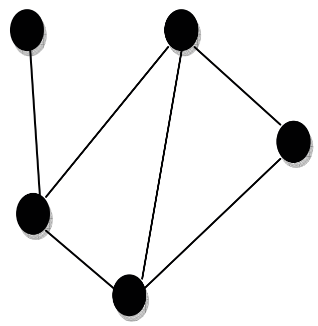
Arbre



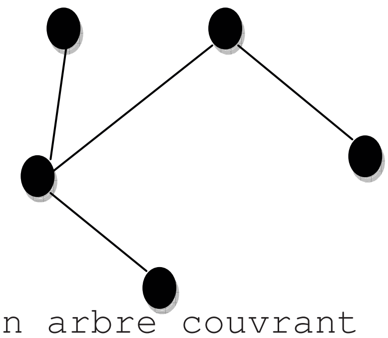
Forêt

2. Arbre couvrant de poids minimum

Soit G=(S,A) un multi-graphe. On appelle arbre couvrant de G un graphe partiel de G qui est aussi un arbre.



Graphe G



Un arbre couvrant

On associe à chaque arête de G un poids et on veut trouver dans G un arbre couvrant de poids total minimum.

Algorithme de Kruskal

Données: un multi-graphe pondéré G=(S,A,C)

Résultats: arbre ou forêt H=(V,W) couvrant de poids minimum.

2. Trier et numéroter les arêtes de G dans l'ordre croissant de leurs poids: $C(e_1) \leq C(e_2) \leq \ldots \leq C(e_m)$
3. Poser $W:=\varnothing$, $k:=0$
4. Tant que $k<m$ et $|W|<m-1$ faire

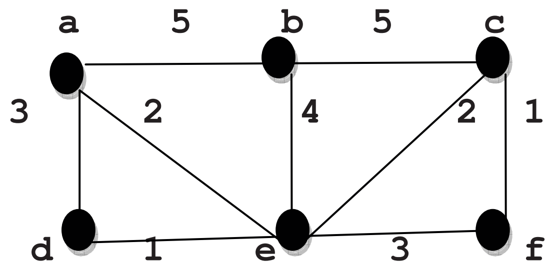
   Début

   Si e_{k+1} ne forme pas de cycle avec W alors

   $W:=W \cup \{e_{k+1}\}$, $k:=k+1$

   Fin

<u>Exemple</u>:



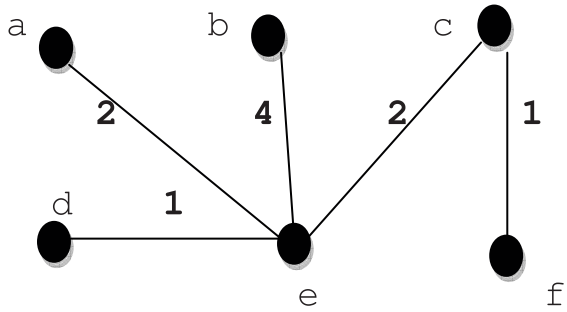
C(d,e)≤C(c,f)≤C(a,e)≤C(c,e)≤C(a,d)≤C(e,f)≤C(a,b)≤C(b,c)

W=∅, W={(d,e)},W={(d,e),(c,f)}, W={(d,e),(c,f),(a,e)},

W={(d,e),(c,f),(a,e),(c,e)},

W={(d,e),(c,f),(a,e),(c,e),(b,c)},

W={(d,e),(c,f),(a,e),(c,e),(b,c)}.



Arbre couvrant de poids minimum

Poids minimum = 10

Chapitre 5

Plus court chemin dans un grahe

Algorithme de Dijkstra

Données: un graphe pondéré G=(S,A,C) et un sommet s de S.

Résultats: Les plus courts chemins de s vers tous les autres sommets.

Etape 1: Poser $B=\emptyset$, $H=\{s\}$, $\pi(s)=0$, $\pi(x)=\infty$ $\forall x\in S-\{s\}$

α le dernier sommet introduit dans H.

Etape 2: Examiner tous les arcs e dont l'extrémité initial est égale à α et l'extrémité terminale y n'appartient pas à H.

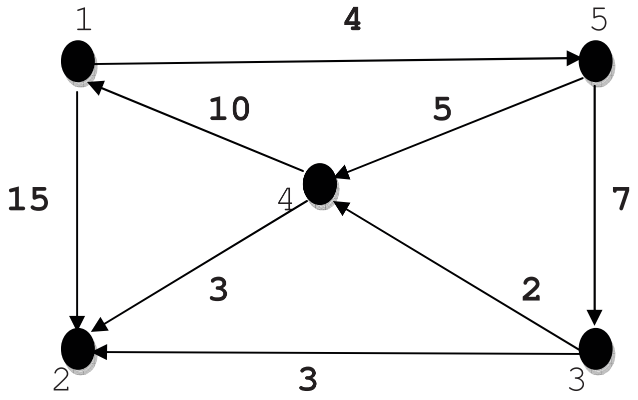
Si $\pi(\alpha)+C(e)<\pi(y)$ on pose $\pi(y)=\pi(\alpha)+C(e)$

Etape 3: Choisir un sommet $z\notin H$ tel que

$\pi(z)=$ Min $\{\pi(y), z\notin H\}$ et faire $H:=H\cup\{z\}$, $B:=B\cup\{(x,z)\}$, $x\in B$

Si H=S terminer. B définit l'arborescence des plus cours chemins issus de s. Sinon faire α=z et revenir à l'étape 2.

Exemple:



H={1}, B=∅, α = 1.

Sommet x	1	2	3	4	5
π(x)	0	∞	∞	∞	∞

On examine les deux arcs (1,2) et (1,5):

$\pi(1)+C(1,2)=15<\pi(2)=\infty \Rightarrow \pi(2)=15$

$\pi(1)+C(1,5)=4<\pi(5)=\infty \Rightarrow \pi(5)=4$

Sommet x	1	2	3	4	5
π(x)	0	15	∞	∞	4

$\pi(5)=\min\{\pi(2),\pi(3),\pi(4),\pi(5)\}$

α=5, H={1,5}, B={(1,5)}.

On examine les deux arcs (5,3) et (5,4):

$\pi(5)+C(5,3)=11<\pi(3)=\infty \Rightarrow \pi(3)=11$

$\pi(5)+C(5,4)=9<\pi(4)=\infty \Rightarrow \pi(4)=9$

Sommet x	1	2	3	4	5
$\pi(x)$	0	15	11	9	4

$\pi(4)=\min\{\pi(2),\pi(3),\pi(4)\}$

$\alpha=4$, $H=\{1,5,4\}$, $B=\{(1,5),(5,4)\}$.

On examine l'arc (4,2):

$\pi(4)+C(4,2)=12<\pi(2)= 15 \Rightarrow \pi(2)=12$

Sommet x	1	2	3	4	5
$\pi(x)$	0	12	11	9	4

$\pi(3)=\min\{\pi(2),\pi(3)\}$

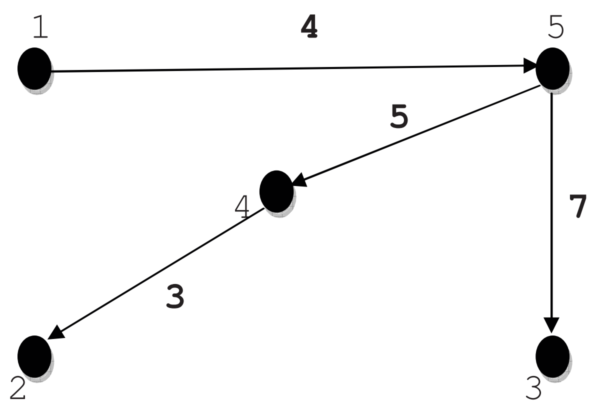
$\alpha=3$, $H=\{1,5,4,3\}$, $B=\{(1,5),(5,4),(5,3)\}$.

On examine l'arc (3,2):

$\pi(3)+C(3,2)=14>\pi(2)= 12$

$\alpha=2$, $H=\{1,5,4,3,2\}$, $B=\{(1,5),(5,4),(5,3),(4,2)\}$.

L'arborescence des plus courts chemin issus de 1 est



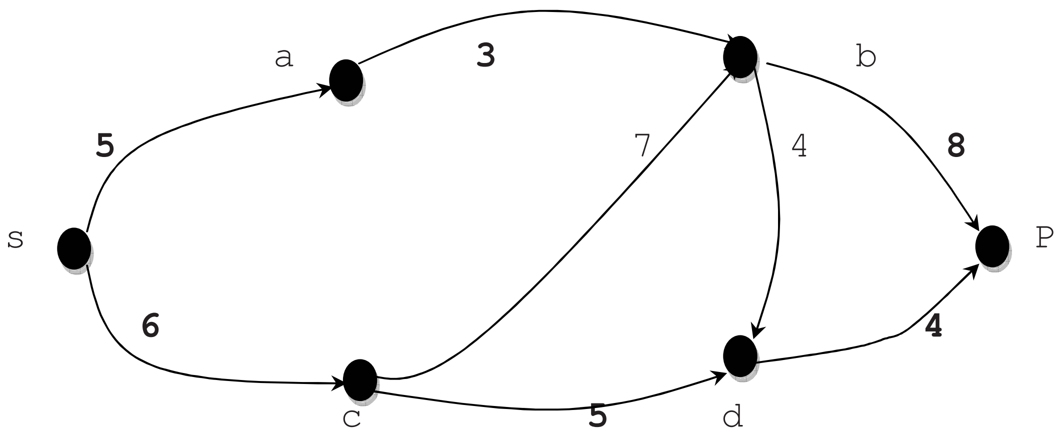
Chapitre 6

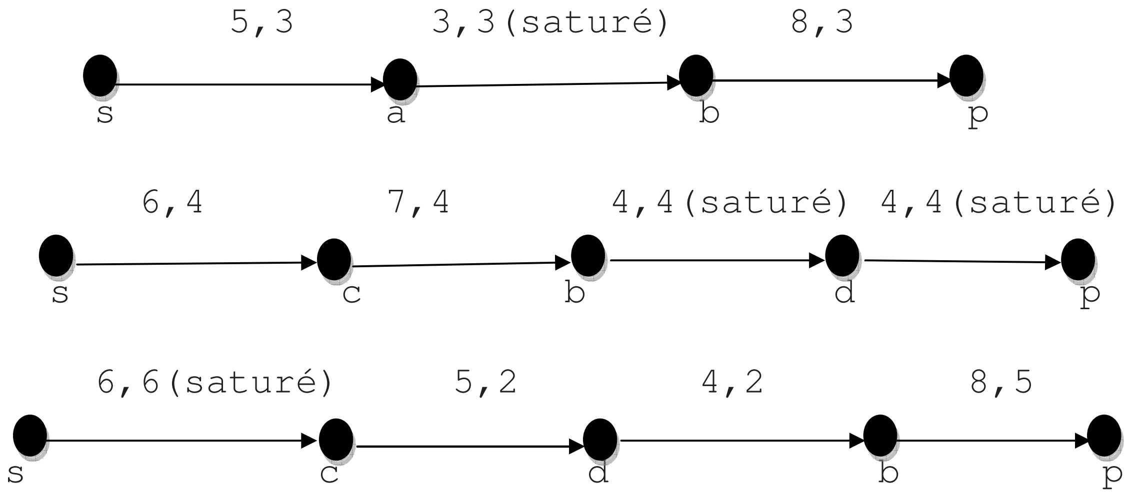
Problème du flot maximum

Le problème de flot maximum consiste à trouver la quantité maximum de flot à acheminer de la source s vers le puits p, en tenant compte des capacités de transport et de la quantité disponible en s.

Algorithme de Ford et Fulkerson

Augmenter à chaque étape la capacité d'un chemin de s vers p jusqu'à saturation





Le flot maximum = 5+4=9

Chapitre 7

Ordonnancement d'un projet

La méthode PERT

Exemple:

Un projet est composé de 6 tâches dont les durées de réalisation et les contraintes d'antériorité (de précédence) sont données dans le tableau suivant:

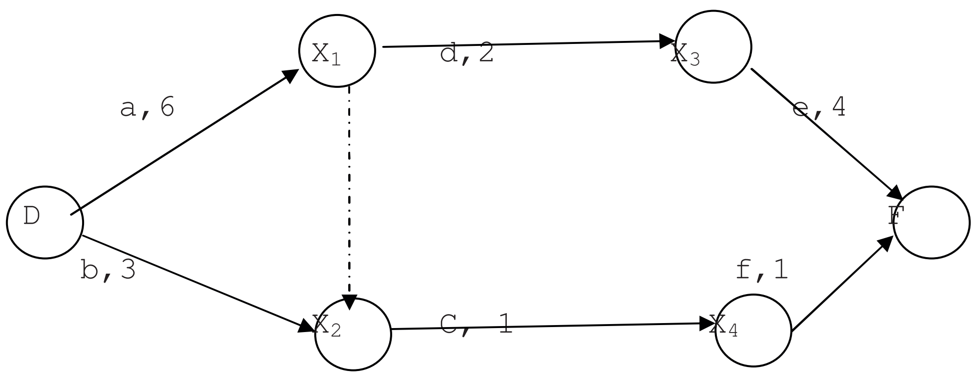
Tâche	Tâches précédentes	Durée de la tâche
a	--	6
b	--	3
c	b , a	1
d	a	2
e	d	4
f	c	1

Déterminer les dates de démarrage de chaque tâche qui minimisent le temps total de réalisation du projet.

1. **Réseau PERT associé**

   PERT (Program Evaluation and Review Technique)

   Soit R=(S,A,C) un graphe pondéré, Un arc correspond à une tâche, la valeur d'un arc représente la durée d'une tâche et un sommet est un événement signifiant le début ou la fin d'une ou plusieurs tâches.



2. Les dates:

2.1 Date au plut tôt d'une événement x:

$t_x=\max \{t_y+C(y,x) \mid y \in \boldsymbol{\Gamma_G^-(y)}\}$

événement	D	X_1	X_2	X_3	X_4	F
t	0	6	6	8	7	12

2.2. Date de début au plus tôt d'une tâche a: $T_a=t_x$

Tâche	a	B	C	d	e	f
T	0	0	6	6	8	7

2.3. Date au plut tard d'une événement x:

$t_F^*=t_F$ où F est l'événement finale

$\mathbf{t_x}^*=\{t_y^*-C(x,y) \mid y \in \boldsymbol{\Gamma_G^+(y)}\}$

événement	F	X_4	X_3	X_2	X_1	D
t*	12	11	8	10	6	0

2.4. Date de début au plut tard d'une tâche a:

$T_a^*=t_y^*-C(x,y)$

Tâche	f	E	D	c	b	a
T*	11	8	6	10	7	0

3. Tâche critique

Une tâche i est dite critique si $T_i^*-T_i=0$.

Tâche	**a**	B	C	**d**	**e**	f
T*-T	**0**	7	4	**0**	**0**	4

4. Ordonnancement du projet: