Chapitre

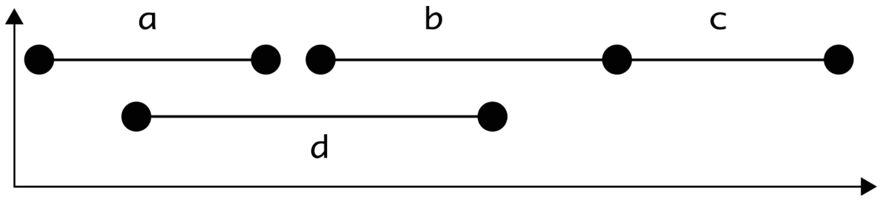
VII

Graphe d'intervalles et graphe triangulé

Partie A. Définitions

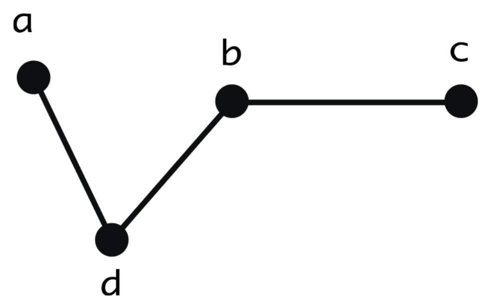
On appelle *longueur d'un cycle*, le nombre d'arcs composant le cycle. Un graphe est un *graphe triangulé* si tout cycle de longueur > 3 admet une *corde*, c'est à dire une arête reliant deux sommets non consécutifs.

Soit une famille de segments (d'intervalles) d'une même droite du plan euclidien.



▲ SCH. 23 : UN GRAPHE D'INTERVALLES

On peut former un graphe en associant un sommet à chaque segment (intervalle) et en reliant deux sommets par une arête si et seulement si les segments représentés se chevauchent. Un tel graphe est appelé un *graphe représentatif d'intervalles*.



▲ SCH. 24 : LE GRAPHE REPRÉSENTATIF D'INTERVALLES CORRESPONDANT AU GRAPHE DE LA FIGURE ANTÉRIEURE

Partie B. Propriétés

Propriété:
soit un graphe G riangulé alors chaque ensemble d'articulation minimal est une clique

Démonstration :
Il est évident qu'on assimile une clique, c'est à dire un graphe simple complet à l'ensemble de ses sommets tous reliés deux à deux par une unique arête.

Soit A un ensemble d'articulation minimal de G triangulé. Par définition, A est un ensemble (de cardinalité minimum) de sommets dont la suppression augmente le nombre de connexité du graphe G . La suppression des sommets de A dans G crée plusieurs composantes connexes. Chaque sommet de A est adjacent à chacune de ces composantes connexes sinon A ne serait pas de cardinalité minimale.

Soient deux sommets a et b de A . On détermine la plus courte chaîne $\mu\left[\mathbf{a, c_1, c_2, \cdots c_p, b}\right]$ $\mathbf{avec}\ \forall\ \mathbf{1 \leq i \leq p,\ c_i \in C}$ allant de a à b avec tous les autres sommets dans une même composante connexe C . On détermine de même une chaîne $\mu'\left[\mathbf{b, c'_1, c'_2, \cdots c'_k, a}\right]$ $\mathbf{avec}\ \forall\ \mathbf{1 \leq i \leq k,\ c'_k \in C'}$ allant de b à a avec une autre composante connexe $\mathbf{C}'$.

Le cycle $\mu + \mu'$ ne possède aucune des cordes suivantes :

- $\left[\mathbf{a, c_i}\right]$ $\mathbf{pour\ i \neq 1}$, $\left[\mathbf{c_i, c_j}\right]$ $\mathbf{pour\ i \neq j}$, $\left[\mathbf{c_i, b}\right]$ $\mathbf{pour\ i \neq p}$ sinon μ ne serait pas la plus courte chaîne ...
- $\left[\mathbf{b, c'_i}\right]$ $\mathbf{pour\ i \neq 2}$, $\left[\mathbf{c'_i, c'_j}\right]$ $\mathbf{pour\ i \neq j}$, $\left[\mathbf{c'_i, a}\right]$ $\mathbf{pour\ i \neq k}$ sinon μ' ne serait pas la plus courte chaîne ...
- $\left[\mathbf{c_i, c'_j}\right]$ $\forall\ \mathbf{1 \leq i \leq p},\ \forall\ \mathbf{1 \leq i \leq k}$ car $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ sont deux composantes connexes distinctes de $\mathbf{G_{X-A}}$

Cependant G est triangulé donc il existe une corde qui ne peut être que $\left[\mathbf{a, b}\right]$. Par conséquent, les sommets de A sont tous voisins deux à deux et A est une clique (engendre une clique).

Propriété :

un graphe représentatif d'intervalles est triangulé

Démonstration :

Soit un graphe G un graphe représentatif d'intervalles. Si le cycle $\mu\left[\mathbf{x_1, x_2, \cdots x_p, x_1}\right]$ n'admet pas de corde, alors les sommets de ce cycle représentent des intervalles $\mathbf{I_k}$ tels que $\mathbf{I_{k-2}}$ et $\mathbf{I_k}$ ne se chevauchent pas. Donc les extrémités sont strictement ordonnées mais alors l'intervalle $\mathbf{I_1}$ ne peut pas chevaucher l'intervalle $\mathbf{I_p}$ et il ne peut pas exister d'arête $\left[\mathbf{x_p, x_1}\right]$ pour fermer le cycle. Par conséquent, le graphe est triangulé.

Chapitre

VIII

Hypergraphe

Partie A. Définitions

Dans de nombreux problèmes, la notion de graphe est restrictive car limitée à des relations binaires sur les ensembles. La notion de graphe est alors généralisée à la notion d'hypergraphe.

Soit un ensemble fini $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. Un *hypergraphe* sur X est une famille $H = \{E_1, E_2, \cdots, E_m\}$ de parties de X avec :

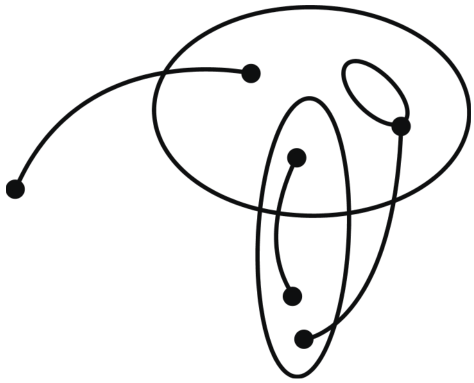
- $E_i \neq \emptyset \quad (1 \leq i \leq m)$
- $\bigcup_{1 \leq i \leq m} E_i = X$

Les éléments sont appelés les *sommets* et les ensembles E_i les *arêtes*.

Lien avec les graphes :
Un graphe simple est un hypergraphe simple dont toutes les arêtes sont de cardinalité 2. Un multigraphe (avec des arêtes répétées ou des boucles) est un hypergraphe dont les arêtes sont de cardinalité ≤ 2.
Néanmoins on ne considère pas ici comme "sommets" les points isolés du graphe.

Représentation :
Un hypergraphe H est représenté en dessinant sur le plan des points représentant les sommets. L'arête E_i sera représenté par un trait continu joignant ses deux éléments si $|E_i| = 2$; par une boucle si $|E_i| = 1$; ou par un trait plein entourant ses éléments si $|E_i| \geq 3$.

A l'instar des graphes, on peut définir une matrice d'incidence sommets arêtes, les colonnes représentant les arêtes et les lignes les sommets : un élément de la matrice est non nul si et seulement si le sommet "appartient" à l'arête.



▲ SCH. 25 : UN EXEMPLE D'HYPERGRAPHE

Partie B. Un exemple d'application : la méthode HBDS

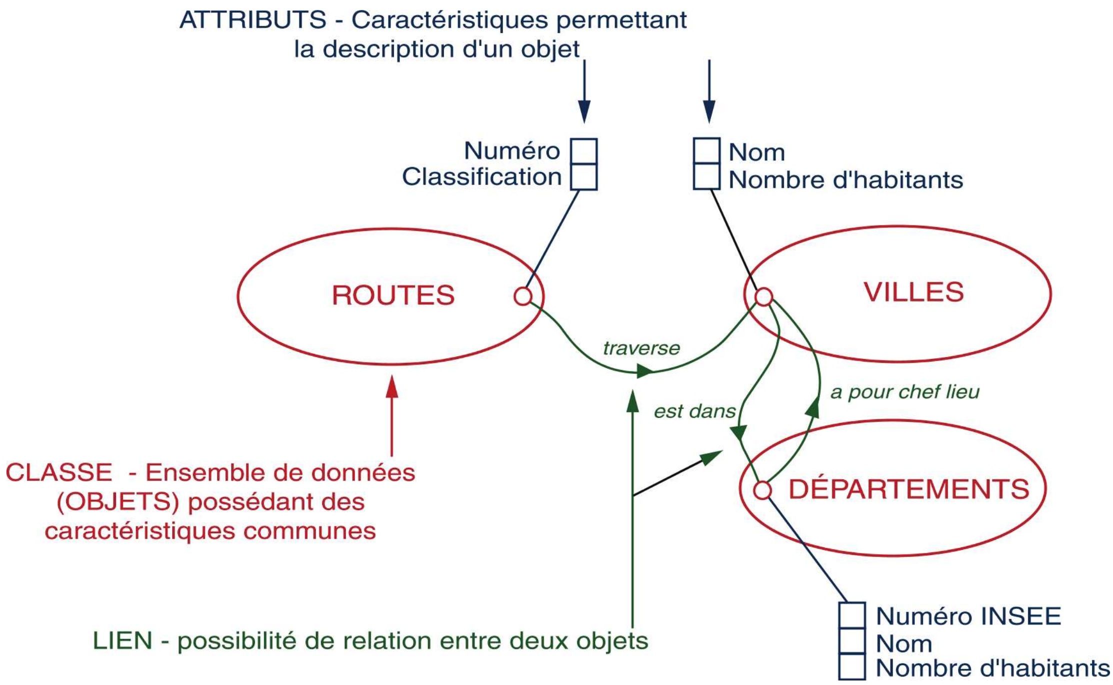
La méthode HBDS ["Hypergraph Based Data Structure"] *inventée par le Pr. François Bouillé dans sa thèse d'état en 1977 est (comme son nom l'indique) une méthode de modélisation des données s'appuyant sur la théorie des hypergraphes.*

Une *classe* est un ensemble d'éléments, appelés *objets*, qui ont des caractéristiques communes, appelées *attributs* de la classe. Les objets d'une classe peuvent également être en relation avec des objets de la même ou d'une autre classe grâce à la notion de *lien* entre classe.

Lien avec les hypergraphes :
Un lien est donc un arc et une classe est une arête de cardinalité supérieure ou égale à 3.

Représentation :
Une classe est représentée par une ellipse. Un des foyers de l'ellipse représente un objet quelconque pour attacher les attributs et les liens de la classe. Les attributs de la classe sont représentés par des étiquettes.

Les liens entre classes sont représentés par des flèches évidées.



▲ SCH. 26 : UN EXEMPLE DE MODÈLE HBDS