Chapitre

VI

Coloration

Partie A. Définitions

On définit deux types de *coloration* : *coloration des sommets* et *coloration des arêtes*. La coloration des sommets (respectivement des arêtes) d'un *multigraphe* G correspond à l'affectation à chacun des sommets (respectivement des arêtes) de telle sorte que deux sommets (respectivement arêtes) adjacents ne soient pas porteurs de la même couleur.

Un graphe est dit *p-chromatique* si ses sommets admettent une coloration en p couleurs. On appellera *nombre chromatique* $\gamma(G)$ (respectivement *indice chromatique* $q(G)$) le nombre minimum de couleurs distinctes nécessaires pour effectuer une coloration des sommets (respectivement des arêtes) de G .

Partie B. Coloration des sommets

Un sous ensemble de sommets de X est un *ensemble stable* s'il ne comprend que des sommets non voisins deux à deux. On appelle *nombre de stabilité* $\alpha(G)$ le cardinal maximum d'un sous ensemble stable. Une coloration des sommets est donc une partition des sommets en sous ensembles stables.

Propriété :

$$\gamma(G) \geq \frac{|X|}{\alpha(G)}$$

Dans une coloration, chaque sous ensemble de sommets de même couleur a un cardinal inférieur ou égal à $\alpha(G)$ d'où : $\alpha(G)\,\gamma(G) \geq |X|$ et la formule annoncée.

Partie C. Coloration des arêtes

Soit un multigraphe G sans boucles. On appelle de G le plus petit entier q qui a la propriété suivante : il est possible avec q couleurs de colorier les arêtes de G de sorte que deux arêtes adjacentes ne soient pas de la même couleur. Une *coloration des arêtes* est une partition de l'ensemble des arêtes en classes qui sont des couplages.

Propriétés

$q(G) \geq \max\limits_{x \in X} (d_G(x))$

Partie D. Propositions

Propriété :

soit un multigraphe G *,* $\gamma(G) \leq \max\limits_{x \in X} (d_G(x)) + 1$

Cette propriété se montre par récurrence sur l'ordre du graphe G . Elle est vérifiée pour $|\mathrm{X}| = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour $|\mathrm{X}| < \mathrm{N}$. Soit un graphe $\mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{E})$ d'ordre N alors soit un x un sommet tel que $d_G(x) = \max\limits_{x \in X} (d_G(x))$. Soit G' le sous graphe engendré par $\mathrm{X} - \{\mathrm{x}\}$ alors le degré d'un sommet de G' est inférieur ou égal à $\max\limits_{x \in X} (d_G(x))$ donc d'après l'hypothèse de récurrence $\gamma(\mathrm{G'}) \leq \max\limits_{\mathrm{x} \in \mathrm{X}}(d_{\mathrm{G}}(\mathrm{x})) + 1$. Le sommet x à au plus $\max\limits_{x \in X} (d_G(x))$ voisins, on peut donc colorer x avec une couleur non utilisée pour ses voisins et conserver une coloration avec au plus $\max\limits_{\mathrm{x} \in \mathrm{X}}(d_{\mathrm{G}}(\mathrm{x})) + 1$ couleurs.

Théorème de Brooks (1941) :

si un multigraphe G *n'est pas un cycle impair et si* $G \neq K_N$

Théorème de Berge (1970) :

l'indice chromatique d'un multigraphe biparti $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{E})$ *de degré maximum* h *est* $q(G) = h$

Partie E. Le théorème des "4 couleurs"

Théorème :

tout graphe planaire est 4chromatique

Démonstration :

ce théorème ancien n'a été démontré qu'en 1976 par Appel et Haken ...

Application :
on peut colorier toute carte de géographie avec 4 couleurs, de sorte que deux régions ayant une frontière commune soient de couleurs différentes

Démonstration :
À toute carte de géographie, on peut associer un graphe ("dual") :

- on associe un sommet à chaque région de la carte,
- on crée une arête entre deux sommets du graphe si et seulement si les deux régions correspondantes ont une frontière commune.

Toute coloration des régions correspond donc à une coloration des sommets ...

Partie F. Graphe parfait

Soient un multigraphe $G(X, E)$ et $w(G)$ est le nombre maximum de sommets d'une clique, si $\forall\ A \subset X, \gamma(G(A,E)) = w(G(A,E))$ alors G est un *graphe parfait*.