Chapitre

V

Problèmes Hamiltonien et Eulérien

Partie A. Problème Hamiltonien

1. Définitions

Soit $G(X,U)$ un graphe connexe d'ordre $N=|X|$. On appelle *chemin hamiltonien (chaîne hamiltonienne)*, un chemin (une chaîne) passant une fois et une seule par chacun des sommets de G. Un chemin hamiltonien (une chaîne hamiltonienne) est donc élémentaire et de longueur $N-1$.

Un *circuit hamiltonien* (un *cycle hamiltonien*) est un circuit (un cycle) qui passe une fois et une seule par chacun des sommets de G. Un cycle hamiltonien est donc élémentaire de longueur N.

Un graphe non orienté est un *graphe hamiltonien (non orienté)* s'il contient un cycle hamiltonien. Un graphe (orienté) est un *graphe hamiltonien (orienté)*s'il contient un circuit hamiltonien.

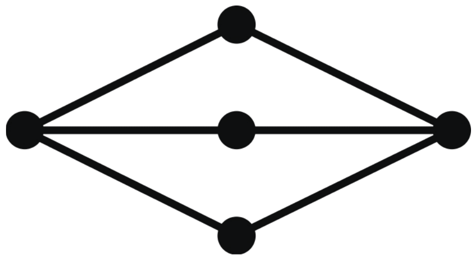
Problème :
On ne connaît pas de solution polynomiale pour la recherche d'un cycle hamiltonien : cette recherche est donc très difficile. De plus, il n'existe pas de condition à la fois nécessaire et suffisante pour l'existence d'un cycle hamiltonien. En outre, s'il existe de nombreux théorèmes concernant l'existence d'un cycle hamiltonien dans un graphe simple, peu de théorèmes existent pour l'existence d'un circuit hamiltonien dans un graphe orienté.

2. Condition nécessaire d'existence d'un cycle hamiltonien

Conseil

une condition nécessaire évidente pour qu'un graphe non orienté soit hamiltonien est qu'il soit 2 connexe

Cette proposition n'est malheureusement pas suffisante car le graphe de la figure 20 est le graphe 2 connexe non hamiltonien ayant le plus petit nombre de sommets.

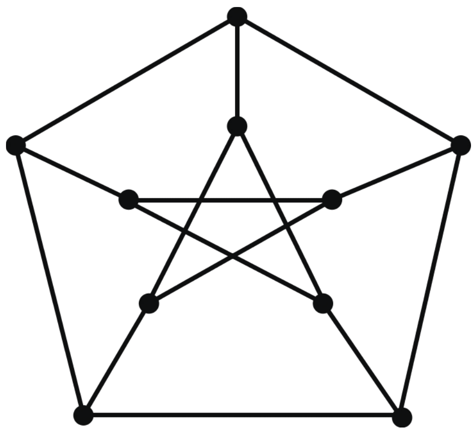


▲ SCH. 21 : LE PLUS PETIT GRAPHE 2 CONNEXE NON HAMILTONIEN

Conseil

tout graphe hamiltonien possède un 2 facteur (un arbre couvrant de degré 2)

Cette proposition n'est pas suffisante non plus car le graphe de la figure 21 appelé "*graphe de Petersen*" n'est pas hamiltonien.



▲ SCH. 22 : LE GRAPHE DE PETERSEN

3. Condition suffisante d'existence d'un circuit hamiltonien

Lemme :

soit $\mu = [\mathbf{x_1, x_2, \cdots, x_k}]$ *un chemin d'un graphe* G *et soit* $\mathrm{x} \notin \mu$ *un sommet de* G *tel que* $\mu = [\mathbf{x_1, x_2, \cdots, x_i,\ x\ , x_{i+1}, \cdots, x_k}]$ *ne soit pas un chemin pour aucun indice* i *. Alors le nombre d'arcs* $m(x, S)$ *, reliant* x *et* $\mathbf{S} = \{\mathbf{x_1, x_2, \cdots, x_k}\}$ *vérifie :* $m(x, S) \leq |S| + 1$

Démonstration :
Soient $A=\{ x_i/x_i \in S,\ i \neq k,\ (x_i\ ,\ x) \in U \}$ et $B=\{ x_i/x_i \in S,\ i \neq k,\ (x\ ,\ x_{i+1}) \in U \}$. Selon l'hypothèse du lemme, on a $A \bigcap B = \emptyset$, $A \bigcup B \subset S - \{x_k\}$ d'où $|A \bigcup B| \leq |S| - 1$.
Donc $m(x, S) \leq |A| + |B| + 2 \leq |A \bigcup B| + 2 \leq |S| + 1$.

Un graphe est *fortement connexe* si pour toute paire de sommets x , y de X , il existe un chemin de $\mu[\ x\ ,\ y\ ]$ de x à y et un chemin $\mu[\ y\ ,\ x\ ]$ de y à x .

Théorème de Meyniel 1973 :
soit G un 1 graphe d'ordre n , sans boucles et fortement connexe. Si pour toute paire x , y de sommet non voisins (non adjacents), on a $d_G(x) + d_G(y) \geq 2n - 1$ alors G contient un circuit hamiltonien.

Démonstration :
Supposons que la condition soit vérifiée mais qu'il n'y ait pas de cycle hamiltonien. Soient $\mu = [x_1, x_2, \cdots, x_k]$ le plus long circuit et $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$.

On suppose qu'il n'existe pas de chemin dont les extrémités sont deux points distincts de S et les autres sommets forment un ensemble non vide de $X - S$.

La forte connexité de G implique qu'il existe un circuit $[\ s_o, a_1, a_2, \cdots, a_p, s_o]$ avec $s_o \in S$ et $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_p\} \subset X - S$ .Par hypothèse, aucun point de A ne peut être adjacent à un point de $S - \{\ s_o\ \}$, donc pour $a \in A,\ \ s \in S - \{\ s_o\ \}$, on a :
$m(a,A) \leq 2\ |A| - 2$; $m(s,A) = 0$; $m(a,S) \leq 2$; $m(s,S) \leq 2\ |S| - 2$.

En outre, il ne peut pas y avoir de chemin de longueur 2 entre a et s avec un sommet intermédiaire dans $X - (A \bigcup S)$ car ce chemin formerait un chemin interdit de S à S (avec une partie de μ) par conséquent : $m\big(a, X - (A \bigcup S)\big) + m\big(s, X - (A \bigcup S)\big) \leq 2\ \big|X - (A \bigcup S)\big|$. Donc a et s ne sont pas voisins mais $d_G(a) + d_G(s) \leq 2\big(|A| + |S| + \big|X - (A \bigcup S)\big|\big) - 2 \leq 2n - 2$ ce qui est contradictoire et on a nécessairement un chemin dont les extrémités sont deux points distincts de S et les autres sommets forment un ensemble non vide de $X - S$.

Soit $v=[\ s_1, a_1, a_2, \cdots, a_p, s_2]$ avec $s_1 \in S,\ s_2 \in S,\ s_1 \neq s_2$, un chemin dont les extrémités sont deux points distincts de S avec $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_p\} \subset X - S,\ A \neq \emptyset$ choisi de sorte que la portion $\mu[\ s_1, s_2]$ soit la plus courte possible. Par construction, aucun sommet de A ne peut être adjacent à $\mu[\ s_1, s_2] - \{\ s_1, s_2\} = S_1$ donc $a \in A \Rightarrow m(a, S_1) = 0$. Comme μ est le plus long circuit, le lemme indique que le sommet a vérifie $m(a, S - S_1) \leq |S - S_1| + 1$ et $m(a,A) \leq 2\ |A| - 2$. Soit $\bar{\mu}[\ s_2, s_1]$ le plus long chemin de S_2 a S_1 dont l'ensemble des sommets $\bar{S}$ vérifie $S - S_1 \subset \bar{S} \subset S$, il existe un sommet $s \in S - \bar{S} \subset S_1$ et le lemme indique que $m\big(s, S - \bar{S}\big) \leq 2\ |S - \bar{S}| - 2$. Or un point de S_1

$m\left(a, \mathrm{X}-\left(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{S}\right)\right)+m\left(s, \mathrm{X}-\left(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{S}\right)\right) \leq 2\left|\mathrm{X}-\left(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{S}\right)\right|$. En ajoutant les inégalités trouvées, on aboutit à :

$d_{\mathrm{G}}(\mathrm{a})+d_{\mathrm{G}}(\mathrm{s}) \leq\left|\mathrm{S}-\mathrm{S}_1\right|+1+2|\mathrm{A}|-2+|\overline{\mathrm{S}}|+1+2|\mathrm{S}-\overline{\mathrm{S}}|-2+2\left|\mathrm{X}-\left(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{S}\right)\right|$
et $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{a})+d_{\mathrm{G}}(\mathrm{s}) \leq 2|\overline{\mathrm{S}}|+2|\mathrm{S}-\overline{\mathrm{S}}|+2|\mathrm{A}|+2\left|\mathrm{X}-\left(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{S}\right)\right|-2 \leq 2\mathrm{n}-2$
ce qui est (à nouveau) contradictoire car a et s ne sont pas voisins.

Les deux paragraphes précédents montrent l'existence d'un circuit hamiltonien.

Corollaire :
(Théorème de Ghouila Houiri 1960) si dans un 1 graphe G *d'ordre* n *fortement connexe sans boucles, on a* $\forall x \in X,\ d_G(x) \geq n$ *alors il existe un circuit hamiltonien.*

4. Condition suffisante d'existence d'un cycle hamiltonien

Théorème de Dirac (1952) :
un graphe simple $G(X, E)$ *d'ordre* n *qui vérifie* $\forall x \in X,\ d_G(x) \geq \frac{n}{2}$ *admet un cycle hamiltonien*

Ce théorème est une restriction du théorème d'Ore (1961).

Théorème d'Ore (1961) :
un graphe simple $G(X, E)$ *d'ordre* n *tel que toute paire* x *,* y *de sommets non adjacents vérifie* $d_G(x)+d_G(y) \geq n$ *admet un cycle hamiltonien*

Démonstration
Soit $G*$ le graphe symétrique obtenu en remplaçant chaque arête de G par deux arcs de sens opposés, la condition d'Ore sur G devient $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{x})+d_{\mathrm{G}}(\mathrm{y}) \geq 2\,\mathrm{n}$ pour $\mathrm{G}*$. Donc d'après le théorème de Meyniel, $G*$ admet un circuit hamiltonien.

Théorème de Tutte (1956) :
si un graphe planaire G *est 4 connexe alors il admet un cycle hamiltonien.*

Démonstration
Cf. Ore 1968

Partie B. Problème Eulérien

Le problème eulérien est un des plus vieux problèmes combinatoires comme le prouve la résolution par Euler du problème des sept ponts de Königsberg (devenue Kaliningrad).

1. Définitions

Soit $G(X, U)$ un multigraphe connexe d'ordre $N=|X|$. On appelle *chaîne eulérienne (cycle eulérien)*, une chaîne (un cycle) utilisant une fois et une seule chacune des arêtes de G. Une chaîne eulérienne est donc simple. Un multigraphe est un *graphe eulérien* s'il contient un cycle eulérien.

2. Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une chaîne eulérienne

Théorème d'Euler (1766) :
un multigraphe G admet une chaîne eulérienne si et seulement si il est connexe (à des points isolés près) et si le nombre des sommets de degré impair est 0 ou 2.

Démonstration :
S'il existe une chaîne eulérienne μ le graphe est connexe. De plus, si les deux sommets terminaux de μ, s'ils sont distincts, sont les seuls à avoir un degré impair : il y a donc 0 ou 2 sommets de degré impair.

On suppose que la condition d'Euler est vérifiée pour tout graphe de moins de m arêtes. Soit G un graphe de m arêtes et qu'il admet deux sommets de degré impair a et b. On va définir une chaîne μ en partant de a dans une direction quelconque sans parcourir deux fois la même arête. Si on arrive en un sommet $x \neq b$, on aura utilisé un nombre impair d'arêtes incidentes à x, donc on pourra repartir par une arête inutilisée. Quand on ne pourra plus repartir, on sera nécessairement en b. S'il existe des arêtes non utilisées, elles permettent de définir un graphe partiel G' dont tous les sommets sont de degré pair.

Soient $C_1, C_2, \cdots, C_k$ les composantes connexes de G' admettant au moins une arête ; par hypothèse, elles admettent des cycles eulériens $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$; comme G est connexe, la chaîne μ rencontre successivement toutes les C_i en des sommets $x_i \in C_i$. Alors la chaîne $\mu[a, x_1] + \mu_1 + \mu[x_2, x_1] + \mu_2 + \cdots + \mu[x_k, b]$ est une chaîne eulérienne.

Corollaire :
un multigraphe G admet un cycle eulérien si et seulement si il est connexe (à des points isolés près) et s'il n'a pas de sommet de degré impair.

3. Algorithme local pour tracer un cycle eulérien

Principe de l'algorithme :
Cet algorithme a pour objectif de *parcourir "d'un seul trait de plume" toutes les arêtes d'un multigraphe G connexe dont tous les sommets sont de degré pair.*

3 règles de parcours

- on part d'un sommet a quelconque, et l'on suit une chaîne sans jamais utiliser deux fois la même arête.
- arrivé en un sommet $x \neq a$ à la kétape, on prendra jamais une arête qui, au moment considéré, est un isthme pour le graphe G_k engendré par les arêtes non encore utilisées (excepté si x est un sommet pendant de G_k).
- si on arrive au sommet a , on repart par une arête quelconque nouvelle si elle existe ; sans cela on s'arrête.

Le parcours obtenu est bien un cycle eulérien

On peut toujours respecter les règles énoncées précédemment. Car si l'on arrive au sommet $x \neq a$, il reste toujours dans G_k une arête incidente à x : $d_G(x)$ est pair donc $d_{G_k}(x)$ est impair. Si cette arête est unique, c'est une arête pendante de G_k , et on peut l'utiliser. Dans le cas contraire, il y a au moins une arête qui n'est pas un isthme : sinon il y a deux isthmes dans G_k reliant deux composantes connexes C et D distinctes. Dans C , il y a au moins un sommet de degré impair sinon $1 + 2\, m_{G_k}(C, C) = \sum\limits_{x \in C} d_{G_k}(x) \equiv 0 \pmod 2$ ce qui est absurde. De même dans D , il y a au moins un sommet de degré impair. Or dans G_k , il n'y a, à part x , qu'un seul sommet de degré impair (le sommet a) d'où la contradiction et l'existence d'une arête qui n'est pas un isthme.

Si l'on respecte ces règles, le parcours effectué jusqu'à l'étape k est le début d'un cycle eulérien. En effet, le graphe G_k est connexe (à des points isolés près). Si l'on arrive en $x \neq a$, il y a dans G_k seulement deux sommets de degré impair, x et a , et d'après le théorème 1, les arêtes de G_k peuvent former une chaîne eulérienne allant de x à a .

4. Lien entre problème eulérien et hamiltonien

Conseil

un graphe eulérien sans subdivision est hamiltonien mais la réciproque est évidemment fausse.