Chapitre

III

Flots

Partie A. Définitions

Soit un graphe $G(X, U)$ dont les arcs sont numérotés de 1 à m. Un *flot* dans G est un vecteur à m composantes réelles : $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T$ Soit la matrice A la transposée de A est notée AT (idem pour les vecteurs).[][]tel qu'en tout sommet $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T$ du graphe la loi de Kirchhoff soit vérifiée :

$$\sum_{u \in \omega^+(s)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^-(s)} \varphi_u$$

La composante φ_u est appelée la *quantité de flux* (ou le *flux* du vecteur u et peut-être assimilée par exemple à la quantité d'électricité (ou de "véhicules") parcourant l'arc u (dans le sens de l'arc si $\varphi_u > 0$, dans le sens contraire si $\varphi_u < 0$). La *capacité* de l'arc u ($c_u \geq 0$) est la borne supérieure du *flux admissible* sur l'arc u . Si on munit chaque arc d'un intervalle $[b_u, c_u]$, un flot $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T$ tel que $\forall$ u $\in$ U, $b_u \leq \varphi_u \leq c_u$ est un *flot compatible.*

On appelle *réseau de transport* un graphe $G(X, U)$ dont les arcs sont numérotés de 1 à m et où chaque arc u est muni d'un intervalle $[b_u, c_u]$ tel que :

- $b_u = 0$
- $c_u > 0$ pour $u \in U$ avec $c_1 = +\infty$
- l'arc $1 = (b, a)$ (avec $b \neq a$) est appelé arc de retour entre la *sortie* b et l'*entrée* a telles que : $\overrightarrow{\omega^-}(a) = (1, 0, \dots, 0)$ et $\overrightarrow{\omega^+}(b) = (1, 0, \dots, 0)$ [L'arc 1 est le seul arc incident à a vers l'intérieur et le seul arc incident à b vers l'extérieur.].

φ_1 est appelée la *valeur du flot* (dans le réseau de transport).

En règle générale, un réseau de transport est un graphe antisymétrique.

On appelle *coupe* séparant deux sommets a et b de X, un ensemble d'arcs de la forme : $\omega^+(A)$ avec $A \subset X$, $a \in A$ et $b \notin A$. La capacité de la coupe est :

$$C(A) = \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u$$

Notations :
Par la suite, on oubliera la notation vectorielle d'un flot $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T$ et on écrira simplement $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$.

Si M est la matrice d'incidence sommets arcs du graphe G (sans boucles) alors un flot $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ dans G est tel que : $M.(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)^T = 0$ du fait de la conservation aux nœuds.

Si G est un réseau de transport alors on le note parfois $R(X, U, (c_u)_{u \in U})$

Partie B. Recherche d'un flot maximum dans un réseau de transport

1. Définition

Flot maximum
Un *flot maximum* (dans un réseau de transport [1]) est un flot compatible de valeur maximale.
[1 En rajoutant si besoin un arc et en les renumérotant, on arrive toujours à définir un réseau de transport à partir d'un sous graphe partiel.]

2. Théorème de Ford-Fulkerson

Lemme
soient $\mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ *muni des intervalles* $[\mathbf{b_u}, \mathbf{c_u}]$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ **et** $\mathbf{b} \notin \mathbf{A}$. *Pour tout flot compatible, on a* $\varphi_1 \leq \sum_{u \in w^+(A)} c_u - \sum_{u \in w^-(A) - \{1\}} b_u$

Démonstration
Soient $G(X, U)$, l'arc $1 = (b, a)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$, avec $A \subset X$, $a \in A$ et $b \notin A$. La loi de conservation du flux impose :

$$\sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^-(A)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^-(A) - \{1\}} \varphi_u + \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_1 = \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u - \sum_{u \in \omega^-(A) - \{1\}} \varphi_u$$

d'où $\varphi_1 \leq \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u - \sum_{u \in \omega^-(A)-\{1\}} b_u$ et dans un réseau de transport $\varphi_1 \leq \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u = C(A)$
car $\forall\ u \in U,\ 0 = b_u \leq \phi_u \leq c_u$.

Corollaire
si un flot et une coupe sont tels que la valeur du flot est égale à la capacité de la coupe, alors le flot est un flot maximum et la coupe est de capacité minimale.

Évident car $\max(\varphi_1) \leq \min_{A \text{ coupe de } G} (C(A))$

Corollaire
une condition nécessaire et suffisante pour que le problème du flot maximum de a à b ait une solution de valeur finie est qu'il n'existe pas de chemin de capacité infinie entre a et b

La condition est évidemment nécessaire ; elle est suffisante car s'il n'existe pas de chemin de capacité infinie entre a et b , le graphe partiel engendré par les arcs de capacité infinie ne peut pas être connexe et seuls les arcs de la coupe séparant a et b , contenant l'ensemble des sommets reliés à a par un chemin, sont de capacité finie.

Théorème :
dans un réseau de transport, la valeur maximale d'un flot compatible de l'entrée a à la sortie b de X est égale à la capacité d'une coupe de capacité minimale séparant a et b .

Démonstration :
Soient $R(X, U, (c_u)_{u \in U})$ l'arc $1 = (b, a)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ compatible maximum, avec $A \subset X$, $a \in A$ et $b \notin A$. On colorie l'arc 1 en noir et les autres arcs comme suit :

- $u \in U$ est coloré en noir si $\varphi_u = 0$;
- $u \in U$ est coloré en rouge si $0 < \varphi_u < c_u$;
- $u \in U$ est coloré en vert si $\varphi_u = c_u$.

Supposons que l'on soit dans le premier cas du "Lemme des arcs colorés de Minty", il existe alors un cycle noir et rouge passant par 1 avec tous les arcs noirs dans le même sens. Soit $\vec{\mu}$ le vecteur associé au cycle passant par 1 dans le sens de 1 alors le cycle de vecteur associé $\vec{\mu}' = \vec{\mu} + \varepsilon . \vec{\mu}$ (avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit) serait compatible et de valeur supérieure ce qui est impossible car le flot est maximum.

On est donc dans le deuxième cas du "Lemme des arcs colorés de Minty" : il existe un cocycle $\omega(A)$ noir et vert avec $a \in A$ et $b \notin A$ tel que tous les arcs de $\omega^+(A)$ soient verts et tous les arcs de $\omega^-(A)$ soient noirs $\left(\text{en particulier } 1 \in \omega^-(A)\right)$. On a alors :

$$\varphi_1 = \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u - \sum_{u \in \omega^-(A) - \{1\}} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u$$

Ce qui prouve que la valeur du flot φ est égale à la capacité de la coupe $\omega^+(A)$. D'après le premier corollaire du lemme précédent, le flot est maximum et la coupe est minimale.

3. Algorithme de Ford-Fulkerson

Principe de l'algorithme :
On part d'un flot compatible (dans un graphe G a capacités entières) [1]. On augmente de proche en proche la valeur de φ_1 du flot à maximiser par plusieurs appels à une procédure de marquage analogue à celle de la démonstration précédente.
[1 Dans un réseau de transport, il y a toujours un flot compatible : le flot nul.]

Initialisation du marquage :
On marque le sommet a avec l'indice +1.

Itérations du marquage :
Si x est marqué et y n'est pas marqué alors :

- on marque y si $(\varphi_k = \varphi(k=(x,y)) < c_k)$;
- on marque y si $(b_k < \varphi_k = \varphi(k=(y,x)))$

Arrêt du marquage :
Si on a marqué b alors on détermine un flot compatible $\varphi_1^+ > \varphi_1$. Soit un chaîne allant de a à b de la forme $\mu[a, \cdots, a_i, a_{i+1}, \cdots, b]$. On définit le flot φ^+ par :

- $\varphi_1^+ = \varphi^+(1=(b,a)) = \varphi(1=(b,a)) + 1 = \varphi_1 + 1$
- si $\varphi_i = \varphi(i=(a_i, a_{i+1})) < c_i$ alors $\varphi_i^+ = \varphi^+(i=(a_i, a_{i+1})) = \varphi_i + 1$;
- si $\varphi_i = \varphi(i=(a_{i+1}, a_i)) > b_i$ alors $\varphi_i^+ = \varphi^+(i=(a_{i+1}, a_i)) = \varphi_i - 1$;
- dans les autres cas, on pose $\varphi^+((x,y)) = \varphi((x,y))$.

φ' est compatible car on n'a modifié le flot que sur un cycle passant par l'arc 1 (dans le sens de l'arc 1) et la loi de Kirchhoff est toujours vérifiée. *On peut recommencer la phase de détermination d'un flot $\varphi_1^+ > \varphi_1$ en prenant φ^+ au lieu de φ.*

Si on n'a pas marqué b alors le flot φ^+ est maximum en vertu des résultats précédents.

Partie C. Recherche d'un flot compatible

Si le graphe G n'est pas un réseau de transport, l'existence d'un flot compatible n'est pas assurée.

Lemme :
une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un flot compatible est que l'on ait pour tout cocycle $\omega(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ *:*

$$\sum_{\mathbf{u} \in \omega^{+}(\mathbf{A})} \mathbf{c_u} - \sum_{\mathbf{u} \in \omega^{-}(\mathbf{A})} \mathbf{b_u} \geq \mathbf{0}$$

Cette condition est nécessaire car si un flot compatible existe alors $0 = \sum_{u \in \omega^{+}(A)} \varphi_u - \sum_{u \in \omega^{-}(A)} \varphi_u \leq \sum_{u \in \omega^{+}(A)} c_u - \sum_{u \in \omega^{-}(A)} b_u$.

Montrons qu'elle est suffisante grâce à l'algorithme de JC.Herz 1967 :

Principe de l'algorithme :
Comme pour l'algorithme de Ford Fulkerson, on va construire un flot à partir d'un autre flot. On part d'un flot quelconque (peut-être non compatible). On appelle *distance du flux* φ_u à l'intervalle $[b_u, c_u]$ la valeur :

$$\bar{d}_u(\varphi_u) = \begin{cases} 0 & \text{si } b_u \leq \varphi_u \leq c_u \\ b_u - \varphi_u & \text{si } \varphi_u < b_u \\ \varphi_u - c_u & \text{si } \varphi_u > c_u \end{cases}$$

et on va essayer de diminuer de proche en proche le nombre $\bar{d}(\varphi) = \sum_{u \in U} \bar{d}_u(\varphi_u)$ (appelé *distance du flot aux intervalles*)

Initialisation du marquage :
Si $\bar{d}(\varphi) = 0$, le flot est compatible donc c'est fini. Si $\bar{d}(\varphi) > 0$, on numérote les arcs de manière à avoir $\bar{d}_1(\varphi_1) > 0$ et $\varphi_1 < b_1$. On marque le sommet a extrémité finale de l'arc $1 = (b, a)$.

Itérations du marquage : (analogue à celle utilisée précédemment)
Si x est marqué et y n'est pas marqué alors :

- on marque y si $(\varphi_k = \varphi(k = (x, y)) < c_k)$;
- on marque y si $(b_k < \varphi_k = \varphi(k = (y, x)))$

Arrêt du marquage :
Si on a marqué b alors on détermine un flot compatible qui vérifie $\bar{d}(\varphi^{+}) < \bar{d}(\varphi)$ comme pour l'algorithme de Ford Fulkerson.

Sinon la condition nécessaire précédente nous indique qu'il n'existe pas de flot compatible car l'ensemble $A \subset X$ des sommets marqués vérifie $a \in A$ et $b \notin A$ et par construction :

$$0 = \sum_{u \in \omega^{+}(A)} \varphi_u - \sum_{u \in \omega^{-}(A)} \varphi_u > \sum_{u \in \omega^{+}(A)} c_u - \sum_{u \in \omega^{-}(A)} b_u$$

Partie D. Application à la h-connexité

Théorème de Menger Dirac :
une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe G soit h connexe est que l'on puisse relier deux sommet a et b par h chemins intérieurement disjoints.

La condition est évidemment suffisante.

Cette condition est nécessaire car si a et b sont deux sommets non adjacents, on peut construire un réseau de transport ayant pour entrée a et sortie b pour lequel un flot de valeur maximum φ_1 détermine φ_1 chemins disjoints de G entre a et b. On symétrise G puis on dédouble chaque sommet $x \neq a$ et $x \neq b$ en $x \rightarrow x'$ et x'' relies par un arc (x', x'') de capacite 1. Tout arc incident à x vers l'intérieur est remplacé par un arc "entrant" de x' avec une capacité $+\infty$, de même tout arc incident à x vers l'extérieur est remplacé par un arc "sortant" de x'' avec une capacité $+\infty$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Ford Fulkerson.

Partie E. Application aux couplages

Étant donné un graphe simple, on appelle *couplage* un ensemble de E d'arêtes tel que deux arêtes quelconques sont non adjacentes. On dit qu'un sommet est *saturé* par un couplage E si un arc de E est incident au sommet. Un *couplage parfait* est un couplage qui sature tous les sommets du graphe.

Dans un réseau de transport biparti $R(X, Y, U)$, on appelle *demande en y* la valeur :

$$d(y) = \begin{cases} c(y, b) \text{ si } y \in Y \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

, *demande de l'ensemble* $B \subset Y$,

$$d(B) = \sum_{\forall y \in Y} d(y)$$

et on note $F(B)$ la quantité maximum de flot que l'on peut faire entrer dans B, c'est-à-dire la valeur maximum du flot pour un réseau de transport R' obtenu à partir de R en modifiant les capacités comme suit :

$$\begin{cases} c'(y,b) = +\infty & \text{si} \quad y \in B \\ c'(y,b) = 0 & \text{si} \quad y \in Y - B \\ c'(x,y) = c(x,y) & \text{pour tout autre arc } (x,y) \end{cases}$$

Théorème :
dans un réseau de transport biparti $\mathbf{R}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y},\ \mathbf{U})$ *, la valeur maximum dans l'arc 1 d'un flot compatible est :* $\varphi_1 = d(\mathbf{Y}) + \min\limits_{\mathbf{B}\subset\mathbf{Y}}(F(\mathbf{B}) - d(\mathbf{B}))$

Démonstration :
On considère un ensemble $B \subset Y$ et on construit un réseau R' comme indiqué ci dessus. Le théorème de Ford Fulkerson conduit à $F(B) = \min\limits_{S \subset X,\, b\in S, a\notin S} (c'(\omega^{-}(S)))$.
On peut se restreindre aux ensembles S qui contiennent B , car sinon on aurait $c'(\omega^{-}(S)) = +\infty$; en outre, on peut remplacer dans cette relation S par $S-\{b\}$ sans rien changer au second membre. Enfin, on peut se restreindre aux ensembles de la forme $S = A \bigcup B$ avec $A \subset X$, si l'on s'intéresse seulement au minimum. On a donc $F(B) = \min\limits_{A \subset X}\left(c'\left(\omega^{-}\left(A \bigcup B\right)\right)\right) = \min\limits_{A\subset X}\left(c\left(\omega^{-}\left(A\bigcup B\right)\right)\right)$.

Si P et Q sont deux ensembles disjoints de sommets, on posera pour simplifier : $c(P,Q) = \sum\limits_{p\in P,\ q\in Q} c(p,q)$.

Considérons un ensemble S qui contient la sortie b et non l'entrée a .
On pose : $S \bigcap X = A$ et $S \bigcap Y = b$
On a alors
$c'(\omega^{-}(S)) = c(a, A) + c(X\text{-}A, B) + c(Y\text{-}B, b) = c\left(\omega^{-}\left(A\bigcup B\right)\right) + d(Y\text{-}B)$
et $c'(\omega^{-}(S)) = c\left(\omega^{-}\left(A\bigcup B\right)\right) + d(Y) - d(B)$
Donc d'après le théorème de Ford Fulkerson :
$\varphi_1 = \min\limits_{b\in S,\ a\notin S}(c'(\omega^{-}(S))) = \min\limits_{B\subset Y}\left(\min\limits_{A\subset X}\left(c\left(\omega^{-}\left(A\bigcup B\right)\right) + d(Y) - d(B)\right)\right) = d(Y) + \min\limits_{B\subset Y}(F(B) - d(B))$

Théorème de König (1931) :
pour un multi graphe biparti $G(X, Y, U)$ *, le nombre maximum d'arêtes d'un couplage est égal à* $\min\limits_{A\subset X}(|X - A| + |\Gamma_G(A)|)$

Démonstration :
On construit le réseau de transport défini par les points de X , ceux de Y , une entrée a et une sortie b ; on joint a à tout $y_j \in Y$ par un arc de capacité $c(a, y_j) = 1$ et tout $x_i \in X$ $a\ b$ par un arc de capacité $c(x_i, b) = 1$. On joint également y_j a x_i par un arc de capacite $c(y_j, x_i) = 1$ si $y_j \in \Gamma_G(x_i)$.

Si $A \subset X$, la demande totale de l'ensemble A est $d(A) = |A|$; la quantité maximum de flot qu'on peut faire entrer dans A est $F(A) = |\Gamma_G(A)|$. Tout flot du réseau définit un couplage du graphe, les points x_i et y_j se correspondant lorsqu'une unité de flot passe dans l'arc (y_j, x_i) ; inversement tout couplage définit un flot.

La cardinalité maximum d'un couplage E est donc égale à la valeur maximum du flot entre a et b , c'est-à-dire, d'après le théorème précédent :
$$\max_E(|E|) = d(X) + \min_{A\subset X}(F(A) - d(A)) = |X| + \min_{A\subset X}(|\Gamma_G(A)| - |A|) = \min_{A\subset X}(|X - A| + |\Gamma_G(A)|)$$

Théorème de König Hall (1934) :
pour un multi graphe biparti $G(X, Y, U)$, on peut coupler X et Y si et seulement si on a $|\Gamma_G(A)| \geq |\mathbf{A}|(A\subset X)$.

Démonstration :
On peut coupler X dans Y si et seulement si on a $|X| = \max_E(|E|) = \min_{A\subset X}(|X - A| + |\Gamma_G(A)|)$ d'après le théorème de König cela équivaut à $\min_{A\subset X}(|X - A| + |\Gamma_G(A)|) = 0$ d'où $|\Gamma_G(A)| \geq |A|$ $(A\subset X)$.