

Cycles

Partie A. Nombres cyclomatique et cocyclomatique

1. Décomposition des cycles et des cocycles en sommes élémentaires



Conseil

"Tout cycle est une somme de cycles élémentaires sans arcs communs"

Démonstration

Il suffit de parcourir le cycle et de définir un cycle élémentaire chaque fois qu'un même sommet est rencontré.



Conseil

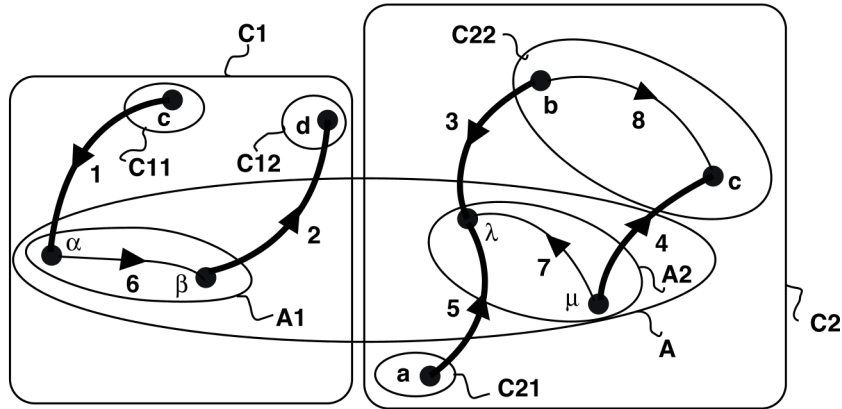
"Tout cocycle est une somme de cocycles élémentaires sans arcs communs"

Démonstration

Soit un cocycle ω , alors $\exists A \subset X$ tel que $\omega = \omega(A)$ et $A \neq \emptyset$. Soient A_1, A_2, \dots, A_k les composantes connexes du sous graphe engendré par A , alors $\omega(A) = \sum_{1 \leq i \leq k} \omega(A_i)$ et

les $\omega(A_i)$ sont deux à deux disjoints.

Soit C_i la composante connexe de G contenant A_i . Soient C_1, C_2, \dots, C_j les composantes connexes du sous graphe engendré par $C_i - A_i$. On a alors $\omega(A_i) = \sum_{1 \leq q \leq j} (-\omega(C_{iq}))$ avec $-\omega(C_{iq})$ cocycle élémentaire car ensemble des arcs reliant deux sous graphes connexes : C_{iq} et $A_i \cup C_{i1} \cup \dots \cup C_{iq-1} \cup C_{iq+1} \cup \dots \cup C_{ij}$; en outre les $-\omega(C_{iq})$ pour $1 \leq q \leq j$ sont disjoints.



$\omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ est un cocycle avec $a = \{ \alpha, \beta, \lambda, \mu \}$

Le sous-graphe engendré par A possède deux composantes connexes A1 et A2 (respectivement incluses dans C1 et C2, les deux composantes connexes du graphe).

Le sous-graphe engendré par C1-A1 a deux composantes connexes C11 et C12.

Le sous-graphe engendré par C2-A2 a deux composantes connexes C21 et C22.

On obtient pour les vecteurs associés aux cocycles :

$$\omega(A) = \omega(A1) + \omega(A2) = -\omega(c11) - \omega(c12) - \omega(c21) - \omega(c22)$$

▲ SCH. 14 : ILLUSTRATION DE LA DÉCOMPOSITION EN COCYCLES ÉLÉMENTAIRES

2. Lemme des arcs colorés (Minty 1960)

Lemme

"Soit un graphe dont les arcs sont numérotés de 1 à m et sont colorés soit en rouge, soit en vert, soit en noir. L'arc 1 est supposé être coloré en noir. Alors une (et une seule) des propositions suivantes est vérifiée :

1. il passe par l'arc 1 un cycle élémentaire uniquement rouge et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens ;
2. il passe par l'arc 1 un cocycle élémentaire uniquement vert et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens."

Démonstration:

On pose $1 = (b, a)$ et on marque les sommets itérativement de proche en proche. On marque d'abord le sommet a . Itérativement, si x est un sommet marqué alors on marque y (non marqué) dans un des deux cas suivants :

- ♦ il existe un arc noir de la forme (x, y)
- ♦ il existe un arc rouge de la forme (x, y) ou (y, x) .

On arrête lorsqu'aucun des sommets non marqués ne peut être marqué.

On se trouve alors face à deux cas possibles:

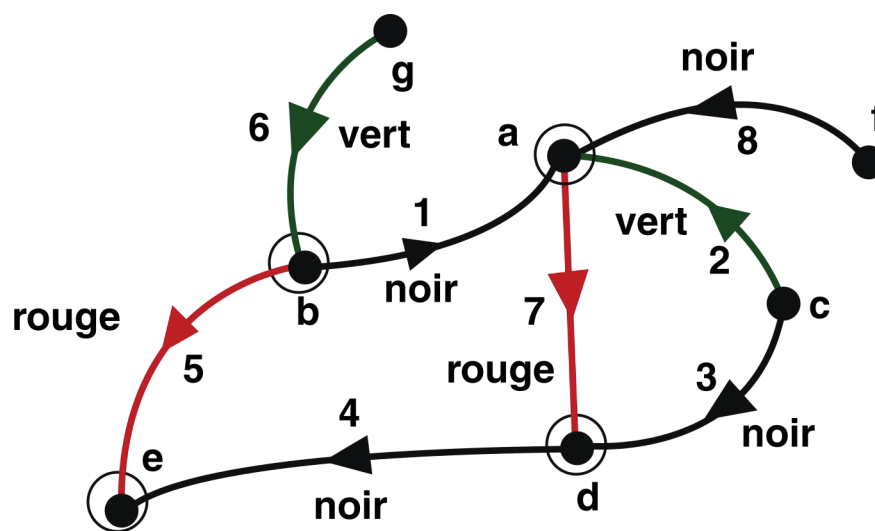
- ♦ si on a marqué le sommet b , alors les sommets utilisés de proche en proche pour marquer b constituent un cycle (forcément) élémentaire rouge et noir avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens (de parcours). Il ne peut pas exister un cocycle noir et vert, contenant l'arc 1, avec tous les arcs noirs

orientés dans le même sens [1]. Le cycle parcouru est la somme de cycles élémentaires disjoints dont l'un d'eux contient l'arc 1.

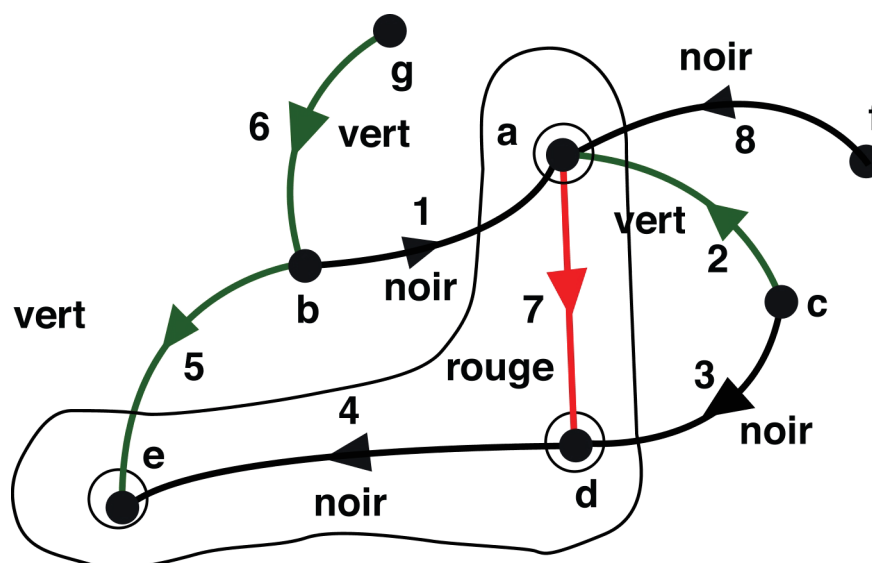
[1 Si l'arc 1 est incident à un ensemble A alors il existe forcément soit un arc noir incident A dans l'autre sens soit un arc rouge incident à A]

- ◆ si on n'a pas marqué le sommet b , alors les sommets utilisés de proche en proche pour marquer b constituent un ensemble A , tel que le cocycle $\omega(A)$ ne contienne que des arcs noirs orientés vers [2.] A et des arcs verts. Il ne peut pas exister un cycle noir et rouge, contenant l'arc 1, avec tous les arcs noirs orientés dans le même sens. Le cocycle ainsi défini est la somme de cocycles élémentaires disjoints dont l'un d'eux contient l'arc 1.

[2 "Orientés vers A " est une équivalent à "incident à A vers l'intérieur"]



▲ SCH. 15 : EXEMPLE DE CYCLE NOIR ET ROUGE AVEC TOUTS LES ARCS NOIRS ORIENTÉS DANS LE MEME SENS



▲ SCH. 16 : EXEMPLE DE COCYCLE NOIR ET VERT AVEC TOUTS LES ARCS NOIRS ORIENTÉS DANS LE MEME SENS

Corollaire :

tout arc appartient à un circuit élémentaire ou à un cocircuit élémentaire (ou exclusif)

Il suffit de ne s'intéresser qu'aux arcs noirs pour s'en persuader.

3. Base de cycles et base de cocycles

Définitions :

Les cycles $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ sont des *cycles indépendants* si une combinaison linéaire des vecteurs associés ne peut être nulle que si chaque coefficient est nul. Une *base fondamentale de cycles* est un ensemble de cycles indépendants tel que tout cycle puisse s'écrire comme une combinaison linéaire. Le *nombre cyclomatique* du graphe est égale à la dimension de la base de cycles.

De même, les cocycles $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_j$ sont des *cocycles indépendants* si une combinaison linéaire des vecteurs associés ne peut être nulle que si chaque coefficient est nul. Une *base fondamentale de cocycles* est un ensemble de cocycles indépendants tel que tout autre cocycle puisse s'écrire comme une combinaison linéaire. Le *nombre cocyclomatique* du graphe est égale à la dimension de la base de cocycles.

Notations :

Le nombre cyclomatique d'un graphe G est noté : $\nu(G)$ et le nombre cocyclomatique est noté : $\lambda(G)$

Théorème :

"Soit G un graphe avec n sommet, m arcs et p composantes connexes, alors $\nu(G) = m - n + p$ et $\lambda(G) = n - p$ "

Démonstration :

Soit une C_i composante connexe du graphe. Soit a_1 un sommet quelconque du graphe, on pose $A_1 = \{a_1\}$. Soit $[a_1, a_2]$ une arête d'un cocycle élémentaire contenu dans $\omega(A_1)$, on pose $A_2 = A_1 \cup \{a_2\}$. On peut définir itérativement $|C_i| - 1$ cocycles élémentaires indépendants car chacun contient un arc non contenu dans le précédent. On obtient donc $n - p = \sum_{1 \leq i \leq p} (|C_i| - 1)$ cocycles élémentaires pour le graphe.

On pose $\nu(G_i) = m_i - n + p_i$, où (G_i) est une suite de graphes partiels de G tel que G_0 soit le graphe partiel de G engendré en ne gardant aucun arc et G_i soit obtenu en rajoutant à G_{i-1} un arc i de G . On a donc :

- ◆ $\nu(G_0) = m_0 - n + p_0 = 0 - n + n = 0$ car G_0 n'a que des point isolés donc autant de composantes connexes ;
- ◆ si l'arc i ne ferme pas un nouveau cycle alors $\nu(G_i) = \nu(G_{i-1})$ car dans ce cas $m_i = m_{i-1} + 1$ et $p_i = p_{i-1} - 1$ (il y a "un sommet isolé de moins") sinon $\nu(G_i) = \nu(G_{i-1}) + 1$ car $m_i = m_{i-1} + 1$ mais le nombre de sommets isolés est inchangé donc $p_i = p_{i-1}$.

Finalement, on a ainsi défini $m - n + p$ cycles dans G . Ces cycles sont indépendants (par construction) car contenant chacun un arc non contenu dans les autres.

Si on considère dans R^m , l'espace M engendré par les cycles et l'espace Ω des cocycles, alors M et Ω sont orthogonaux car le produit scalaire d'un cycle μ et d'un cocycle ω est nul car :

$$\langle \mu, \omega \rangle = \sum_{1 \leq i \leq p} \mu_i \omega_i = \left\langle \mu, \sum_{a \in A} \omega(a) \right\rangle = \sum_{a \in A} \langle \mu, \omega(a) \rangle = \sum_{a \in A} 0 = 0 \quad (\text{d'après le corollaire}).$$

Par conséquent, $\dim M + \dim \Omega \leq m$ or on a vu que $\dim M \geq m - n + p$ et que $\dim \Omega \geq n - p$ donc $\nu(G) = \dim M = m - n + p$ et $\lambda(G) = \dim \Omega = n - p$

Partie B. Planarité

1. Graphe Planaire



Un graphe G est *planaire* s'il est possible de le représenter sur un plan de sorte que les sommets soient des points distincts et les arcs [1] des courbes simples ne se rencontrant pas en dehors de leurs extrémités.

[1 On appliquera évidemment ces exigences aux arêtes si le graphe n'est pas orienté]

Un *graphe planaire topologique* est une représentation d'un graphe planaire G sur un plan, conformément aux exigences précédentes.

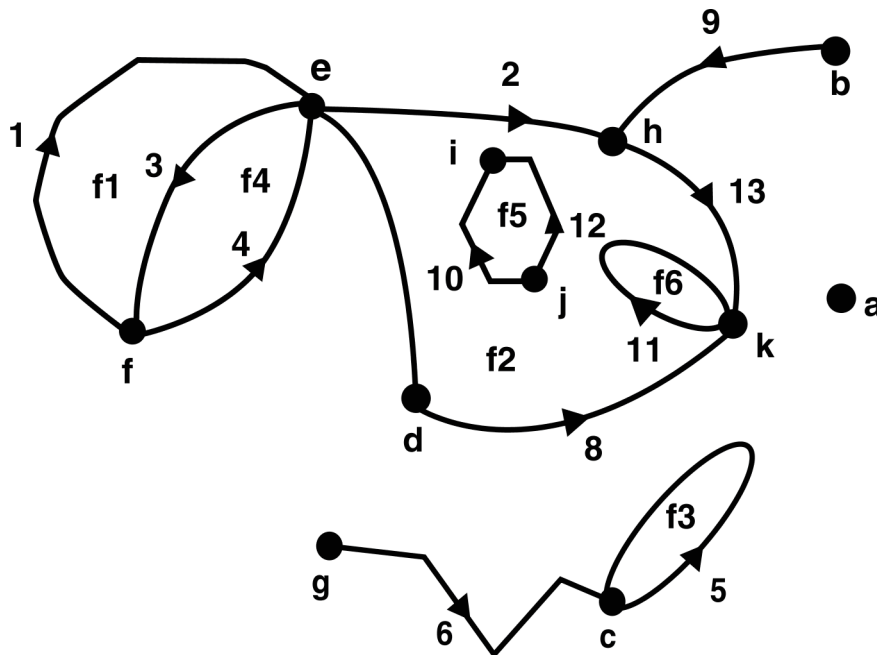
Dans un graphe planaire topologique, une *face* est par définition une partie du plan limitée par des arcs de sorte que deux points de la face puissent toujours être reliés par un trait continu ne rencontrant ni sommet ni arc. Deux faces sont *adjacentes* si elles ont un arc en commun. Deux faces sont *opposées* si elles ont un sommet commun sans être adjacentes.

L'ensemble des arcs qui *touchent* une face s'appelle la *frontière* de la face. Dans un graphe planaire topologique, la frontière d'une face est constituée par les arcs d'un ou plusieurs cycles élémentaires disjoints (au sens des arêtes), des arcs pendants ou des isthmes reliant deux cycles disjoints. On appelle *contour* d'une face, celui de ces cycles élémentaires [2] qui contient à son intérieur tous les autres arcs de la frontière. On notera qu'il y a toujours *une* face illimitée appelée *face infinie* ou *face externe* et qui n'admet donc pas de contour. *Les autres faces sont finies et admettent toutes un contour.*

[2 Cette définition du contour, comme étant un cycle élémentaire, impose de considérer les cycles élémentaires comme disjoints au sens des arcs uniquement et une éventuelle boucle comme étant à l'intérieur du contour (Cf. figure 16).]

Convention :

On appelle encore G le graphe planaire topologique issu d'un graphe planaire et on omettra l'adjectif "topologique".



**La face f2 a pour frontière { 2, 7, 8, 10, 11, 12, 13 }
et pour contour (2, 13, 8, 7)**

▲ SCH. 17 : UN EXEMPLE DE GRAPHE PLANAIRE (TOPOLOGIQUE)

2. Formule d'Euler

Théorème :

dans un graphe planaire topologique G , les contours des différentes faces finies constituent une base fondamentale de cycles indépendants

Démonstration :

La démonstration se fait par récurrence sur le nombre de faces (Berge, 1983)

Formule d'Euler :

si, dans un graphe planaire topologique connexe, il y a n sommets, m arêtes et f faces, alors : $n - m + f = 2$

Démonstration :

Cette formule se démontre aisément par récurrence sur le nombre de faces.

En outre, le nombre de faces finies est égal au nombre cyclomatique $\nu(G)$ d'où $f = \nu(G) + 1 = (m - n + 1) + 1 = m - n + 2$. L'utilisation du théorème précédent et du nombre cyclomatique permet de déduire une formule valable pour les graphes planaires non connexes.

Corollaire :

dans un graphe planaire simple G , il existe un sommet de degré $d_G(x) \leq 5$

G étant un graphe simple, toute face est entourée par au moins 3 arêtes distinctes. On peut considérer séparément chaque composante connexe pour pouvoir appliquer la formule d'Euler et étudier le nombre d'arcs dans le graphe biparti d'incidence faces arêtes $FA(F, A, V_{FA})$ formé par un ensemble A de points représentant les faces, par un ensemble B de points représentant les arêtes et des arcs allant de A à B tels que $u = (x, y) \in V_{FA}$

si l'arête représentée par y est dans la frontière de la face représentée par x

[On dit que la face a est "incidente" à l'arête b]

Soient V_{FA} le nombre d'arcs dans ce graphe biparti, m le nombre d'arêtes, n le nombre de sommets et le nombre de faces dans la composante connexe de G , on a alors :

- ◆ $|V_{FA}| \leq 2m$ car chaque arête de G touche au plus deux faces de G ;
- ◆ $|V_{FA}| \geq 3f$ car une face de G est entourée par au moins 3 arêtes distinctes.

$$\text{d'où } f \leq \frac{2m}{3}$$

Si tout sommet est l'extrémité d'au moins 6 arêtes, on obtient de la même façon mais en considérant le graphe biparti d'incidence sommets arêtes $SA(S, A, V_{SA})$:

- ◆ $|V_{SA}| = 2m$ car chaque arête de G a deux extrémités distinctes (G est simple) ;
- ◆ $|V_{SA}| \geq 6n$ car, par hypothèse, tout sommet est l'extrémité d'au moins 6 arêtes.

$$\text{d'où } n \leq \frac{2m}{6}$$

Alors la formule d'Euler conduit à : $2 = n - m + f \leq \frac{2m}{6} - m + \frac{2m}{3} = 0$, ce qui est absurde. Donc, il existe forcément un sommet de degré $d_G(x) \leq 5$.

3. Théorème de Kuratowski (1930)



Une subdivision d'un graphe est un graphe obtenu en ajoutant des sommets sur les arcs (ou les arêtes).

Théorème :

un multigraphe G est planaire si et seulement s'il ne contient aucune subdivision du graphe complet à 5 sommets K_5 , et du graphe biparti complet $K_{3,3}$

Démonstration :

La démonstration de la contra posée se fait par récurrence sur le cardinal minimum des ensembles d'articulation ((Sache, 1974) ou (Milledrogues & al., 1994)).

Propriété :

les multigraphes complets $K_{3,3}$ et K_5 ne sont pas planaires.

Démonstration :

Supposons que le multigraphe $K_{3,3}$ des (3 maisons et des 3 usines) est planaire. Alors la formule d'Euler doit être vérifiée donc : $f = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5$. Chacune des faces a au moins 4 arêtes à son contour car dans le cas contraire deux sommets du même ensemble seraient reliés. Le nombre d'arcs dans le graphe biparti d'incidence faces arêtes conduit donc à : $18 = 2 m \geq 4 f = 20$. L'absurdité de ce résultat prouve que $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Supposons que le multigraphe complet à 5 sommets K_5 est planaire. Alors la formule d'Euler doit être vérifiée donc : $f = 2 - n + m = 2 - 5 + 10 = 7$. Chacune des faces a au moins 3 arêtes à son contour. Le nombre d'arcs dans le graphe biparti d'incidence faces arêtes conduit donc à : $20 = 2 m \geq 3 f = 21$. L'absurdité de ce résultat prouve que K_5 n'est pas planaire.

4. Graphe Dual



Soit un graphe *planaire* G , *connexe et sans sommet isolé* ; on lui fait correspondre un graphe planaire G^* de la façon suivante :

- ◆ à l'intérieur de chaque face f de G , on place un sommet s^* de G^* ;
- ◆ à tout arc a de G , on fait correspondre un arc a^* de G^* qui relie les sommets x^* et y^* de G^* correspondant aux faces de part et d'autre de l'arc a (x^* correspond à la face à gauche de l'arc et y^* à la face à droite de l'arc en suivant son orientation).

Le graphe obtenu s'appelle le *graphe dual* de G . Ce graphe est *planaire, connexe et sans sommet isolé*.

Le graphe dual de G^* est $G : (G^*)^* = G$ (si G n'est pas orienté).

A toute boucle de G correspond un arc pendant de G^* et réciproquement.

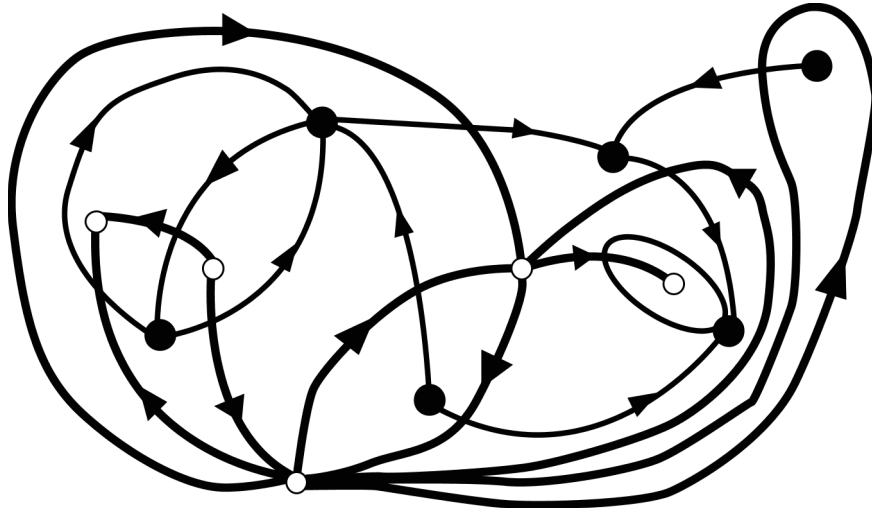
S'il existe une paire de sommets x et y de G tels que $x \neq y$ et $m_G^+(x, y) + m_G^-(x, y) \geq 2$ alors G^* admet un sommet de degré 2.

Théorème

à tout cycle élémentaire de G correspond un cocycle élémentaire de G^ , et vice versa ; à tout circuit élémentaire de G correspond un cocircuit élémentaire de G^* , et vice versa.*

Démonstration :

(Berge, 1983)



▲ SCH. 18 : UN EXEMPLE DE GRAPHES DUAUX

Partie C. Arbre, forêt et arborescence

1. Définitions

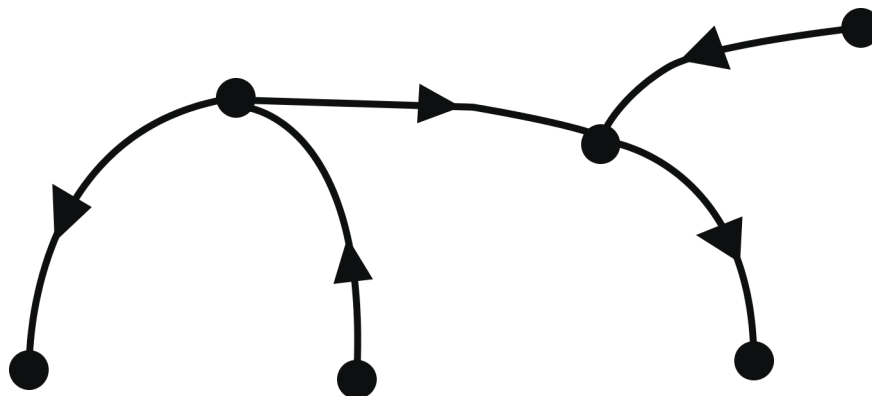


Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Un arbre est donc nécessairement un 1-graphe. Une *forêt* est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.

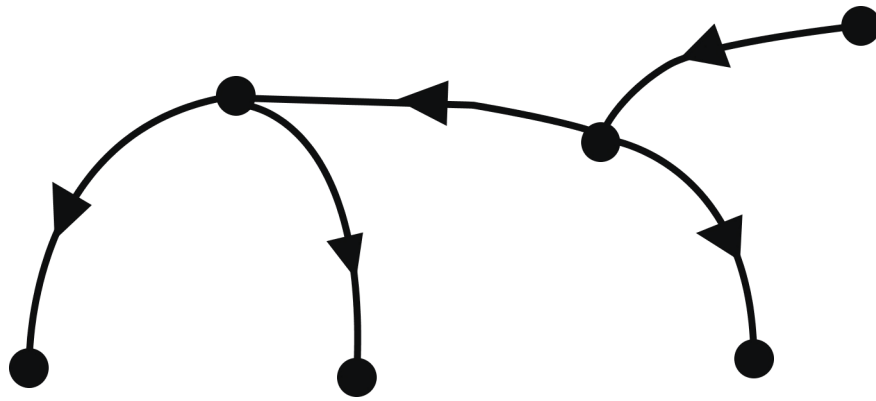
Dans un graphe, le sommet x est une *racine* si pour tout autre sommet y , il existe un chemin $\mu(x, y)$. Une *arborescence* est un arbre muni d'une racine.

Notation

Un arbre est souvent noté $H(X, U)$ en hommage à Hamilton.



▲ SCH. 19 : UN EXEMPLE D'ARBRE



▲ SCH. 20 : UN EXEMPLE D'ARBORESCENCE

Théorème :

Soit $H(X, U)$ un graphe d'ordre $|X| = n \geq 2$; les six propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre :

1. H est connexe et sans cycle ;
2. H est sans cycle et admet $n - 1$ arcs ;
3. H est connexe et admet $n - 1$ arcs ;
4. H est sans cycle et en ajoutant un arc, on crée un cycle (et un seul) ;
5. H est connexe, et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe ;
6. Tout couple de sommets est reliés par une chaîne et une seule.

Démonstration :

(1) \Rightarrow (2) : si p est le nombre de composantes connexes, n le nombre de sommets et m le nombre d'arcs alors $p = 1$ et $\nu(H) = m - n + p = 0$ donc $m = n - p = n - 1$.

(2) \Rightarrow (3) : $\nu(H) = 0$ et $m = n - 1 \Rightarrow p = \nu(H) - n + 1 = 1$ donc H est connexe.

(3) \Rightarrow (4) : $p = 1$ et $m = n - 1 \Rightarrow \nu(H) = m - n + p = 0$ et en ajoutant un arc $\nu(H) = 1$

(4) \Rightarrow (5) : si H n'est pas connexe, on prend x et y non connectés, alors l'ajout de l'arc (x, y) ne suffit pas pour créer un cycle donc H est connexe, $p = 1, \nu(H) = 0$ et $m = n - 1$. En supprimant un arc, on obtient un graphe H' tel que $m' = n' - 2$ et $\nu(H') = 0 \Rightarrow p' = \nu(H') - m' + n' = 2$ et H' n'est plus connexe.

(5) \Rightarrow (6) : H est connexe donc pour toute paire de sommets x et y , il existe une chaîne $\mu[x, y]$ et une seule car dans le cas contraire la suppression d'un arc ne suffirait pas pour déconnecter le graphe.

(6) \Rightarrow (1) : il existe une chaîne entre tout couple de sommets donc H est connexe et il

n'y a pas de cycle sinon on pourrait créer deux chaînes.

2. Propriétés

Théorème :

un arbre d'ordre $n \geq 2$ admet au moins deux sommets pendants

Démonstration :

Si un arbre H n'admet pas de sommet pendant ou bien admet un seul sommet pendant, alors on parcourt le graphe H en s'astreignant à ne jamais utiliser deux fois le même arc et en partant, soit d'un sommet quelconque, s'il n'y a pas de sommet pendant, soit du sommet (seul) sommet pendant s'il n'y en a qu'un.

La chaîne ainsi créée est infinie car l'absence de sommet pendant permet toujours de trouver un nouvel arc pour repartir du sommet courant. Ceci est bien sûr absurde car H est fini (d'ordre n) et sans cycle.

Théorème :

un graphe G admet un arbre comme graphe partiel si et seulement si G est connexe.

Démonstration :

Si G n'est pas connexe, il n'a pas de graphe partiel connexe. Si G est connexe, on cherche un arc dont la suppression ne rompt pas la connexité :

- ◆ si on n'a pas trouvé d'arc à supprimer alors G est un arbre d'après la propriété 5 du paragraphe Définition ;
- ◆ si on a trouvé un tel arc, on le supprime et on recommence. Lorsqu'on ne pourra plus supprimer d'arc sans rompre la connexité, on aura défini un arbre comme graphe partiel d'après la propriété 5 du paragraphe Définition.

3. Arbre maximal (ou couvrant)



Soit $G(X, U)$, $H(X, T)$ est un *arbre maximal* ou *arbre couvrant* de G si H est à la fois arbre et un graphe partiel de G .

Condition d'existence et construction :

Le deuxième théorème du paragraphe Propriétés donne la condition d'existence d'un arbre maximal et sa démonstration présente un "algorithme" de construction.

Corollaire :

si G est connexe alors il existe deux sommets x et y de X tels que $G - \{x, y\}$ soit connexe