Chapitre 1

Définitions de base

1.1 Définition "intuitive" d'un graphe

Un graphe est un tracé sur le papier des points représentant des nombres, des localités, des opérations, des molécules chimiques, etc., et des lignes continues reliant certaines paires de ces points et symbolisant une relation, une route, une préférence, etc. Ces points sont appelés *sommets* et ces lignes sont appelés *arcs* ou *arêtes* suivant qu'elles sont orientées ou non.

1.2 Définition mathématique d'un graphe

Un graphe G (*non orienté*) est la donnée d'un couple (S, A) où $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ est un ensemble fini et non vide de points appelés *sommets* et $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ est l'ensemble des paires non ordonnés $\{s_j, s_k\}$ de sommets de S appelées *arêtes*.
Etant donnée une arête a_i associée à $\{s_j, s_k\}$, on dit que les sommets s_j et s_k sont les extrémités de l'arête a_i, et s_j et s_k sont dits *adjacents*. Les deux extrémités peuvent être distinctes ou confondues.
Lorsque $s_j = s_k$, on dit que a_i est une *boucle*.
Un sommet est dit *isolé* s'il n'est pas une extrémité d'aucune arête du graphe.
Deux arêtes sont dites *parallèles* lorsqu'elles ont mêmes extrémités.
Un graphe est dit *simple* s'il ne contient pas de boucles ni arêtes parallèles.

1.3 Ordre, orientation et multiplicité

1.3.1 Ordre et taille d'un graphe

Une première manière d'évaluer la complication d'un graphe est de compter le nombre de ses sommets et le nombre de ses arêtes.
Le nombre n de sommets d'un graphe G est appelé *l'ordre* de G, on le note par $|G|$, et le nombre m de ses arêtes s'appelle *la taille* de G, on le note par $||G||$.
Exemple 1 : Considérons le graphe G défini par :
$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ et $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ tel qu'aux arêtes a, b, c, d, e, f, g, h soient respectivement associés $\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}, \{s_2, s_3\}, \{s_1, s_3\}, \{s_1, s_1\}, \{s_1, s_1\}, \{s_4, s_4\}$. Une représentation possible de ce graphe est :

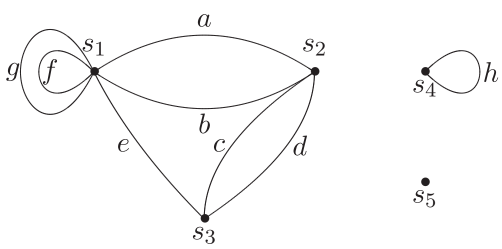

Figure 1.1: Un graphe non orienté

Le sommet s_5 est un *point isolé*, les arêtes f, g, h sont des boucles, a et b sont des arêtes ayant mêmes extrémités, $\{s_1, s_2\}$ est une arête *multiple*, les sommets s_1 et s_2 sont adjacents, ainsi que s_1 et s_3, puisqu'ils sont reliés par une arête, le graphe n'est pas simple puisqu'il a des boucles et des arêtes parallèles, $|G| = 5$ et $||G|| = 8$.

Remarque : Notons que la position des sommets sur un plan et la forme des arêtes n'importe pas, seul importe de savoir comment les sommets sont reliés. Il faut bien remarquer qu'il y a plusieurs représentation possibles d'un graphe sur une feuille pour un même graphe, et que deux arêtes peuvent se croiser. Le dessin doit donc être clair.

Exemple 2 : Pour les représentations ci-après, il est facile de voir que G_1 et G_2 représentent le même graphe. Par contre G_3 et G_4 sont des graphes d'ordre 6 différents. En effet, dans G_4, chaque sommet est djacent à 3 autres sommets, mais dans G_3 il y a 2 sommets qui sont adjacents seulement à 2 autres sommets.

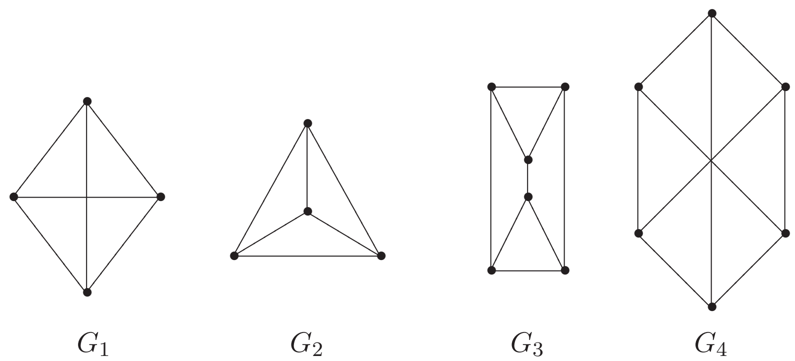

Figure 1.2: Quelques exemples de graphes

1.3.2 Graphe orienté

Il existe de nombreux domaines où les graphes sont orientés. Par exemple : plan des rues d'une ville avec les sens interdits, circuit électrique en courant continu où il faut orienter les arêtes pour décider du signe de l'intensité, graphe d'ordonnancement où les arêtes relient une tâche à une autre

qui doit la suivre, etc.
Une arête orientée (appelée aussi un *arc*), quand elle a un sens qui va de l'une des ses extrémités, appelée *extrémité initiale* à l'autre, appelée *extrémité terminale* .
Un graphe *orienté* G est la donnée d'un couple (S, A) où $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ est un ensemble fini et non vide de points (ou sommets), et $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ est un ensemble de couples ordonnés (s_j, s_k) de sommets de S (ou arcs).
Remarque : Il convient de préciser qu'il n'y a pas deux espèces de graphes : orientés et non orientés. Tout les graphes sont orientés, et une arête peut être transformée en deux arcs de sens différents. De ce fait, toutes les notions que nous pouvons définier pour un graphe non orienté ont un équivalent pour un graphe orienté.

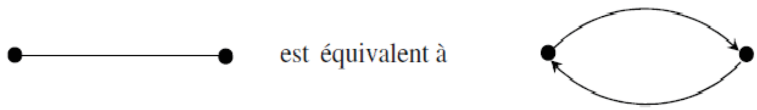

Figure 1.3: Une arête, deux arcs

Exemple 3 : Considérons le graphe orienté G défini par :
$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ et $A = \{a, b, c, d, e\}$, tel qu'aux arcs a, b, c, d, e soient respectivement associés $(s_1, s_1), (s_2, s_1), (s_1, s_3), (s_3, s_1), (s_3, s_1)$. Une représentation possible de ce graphe est :

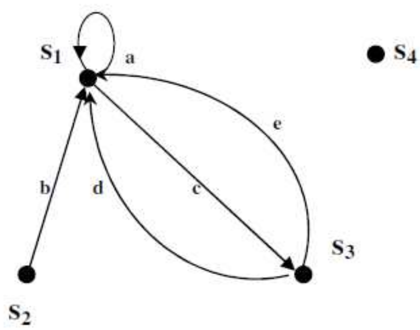

Figure 1.4: Un graphe orienté

Comme pour les graphes non orientés: l'arc a est une *boucle*. Pour l'arc b, le sommet s_2 est son *extrémité initiale* et le sommet s_1 est son *extrémité terminale*. Les sommets s_1 et s_2 sont *adjacents* puisqu'ils sont reliés par un arc. Le sommet s_4 est un *point isolé*. d et e sont des arcs *parallèles* puisqu'ils ont la même extrémité initiale s_3 et la mêmes extrémité terminale s_1, (s_2, s_3) est donc un arc *multiple*. Le graphe n'est pas simple puisqu'il a une boucle et des arcs parallèles, $|G| = 4$ et $||G|| = 5$.

1.3.3 Multiplicité d'une paire de sommets

La multiplicité d'une paire de sommets (s_j, s_k), noteé $m_G^+(s_j, s_k)$, est le nombre d'arcs du graphe G ayant s_j comme extrémité initiale et s_k comme extrémité terminale.
On pose $m_G^-(s_k, s_j) = m_G^+(s_j, s_k)$ et $m_G(s_j, s_k) = m_G^+(s_j, s_k) + m_G^-(s_k, s_j)$.
Si $s_j \neq s_k$, alors $m_G(s_j, s_k)$ est le nombre d'arcs ayant une extrémité en s_j et une en s_k.
Si $s_j = s_k$, alors $m_G(s_j, s_k)$ vaut deux fois le nombre de boucles en s_j.

1.3.4 Le p-graphe

Si dans un graphe G le nombre d'arcs qui va d'un sommet s_j à un sommet s_k ne peut excéder un nombre p, on dit qu'on a un *p-graphe* ou que p est la *multiplicité* du graphe.
Dans l'exemple 3, G est un 2-graphe ou que 2 est la multiplicité de G.

1.4 Relations entre les éléments d'un graphe

1.4.1 Relations entre sommets

Pour un arc quelconque (s_j, s_k), s_j est *l'extrémité initiale* et s_k est *l'extrémité terminale*. On dit aussi que s_j est un *prédécesseur* de s_k ou que s_k est un *successeur* de s_j. L'ensemble des prédécesseurs de s_k se note $\Gamma_G^-(s_k)$ et l'ensemble des successeurs de s_j se note $\Gamma_G^+(s_j)$.
Deux sommets s_j et s_k sont dits *adjacents* ou *voisins* s'ils sont reliés entre eux par au moins un arc.
L'ensemble des voisins d'un sommet s_j se note par $\Gamma_G(s_j)$, il est donné par $\Gamma_G(s_j) = \Gamma_G^+(s_j) \cup \Gamma_G^-(s_j)$.
Si $\Gamma_G(s_j) = \emptyset$, on dit que s_j est un sommet *isolé*.
Dans l'exemple 3, s_3 est à la fois un successeur et un prédécesseur de s_1. $\Gamma_G^+(s_1) = \{s_1, s_3\}$ et $\Gamma_G^-(s_1) = \{s_1, s_2, s_3\}$, donc $\Gamma_G(s_1) = \{s_1, s_2, s_3\}$. On a $\Gamma_G(s_4) = \emptyset$, s_4 est un sommet isolé.

1.4.2 Sommet adjacent à un ensemble de sommets

Si $E \subset S$, on pose $\Gamma_G(E) = \bigcup_{s \in E} \Gamma_G(s)$.
Si $s \in \Gamma_G(E)$ et $s \notin E$, on dit que s est un sommet *adjacent* à l'ensemble E.
Dans l'exemple 2, on a $\Gamma_G(\{s_2, s_3\}) = \{s_1\}$, $s_1 \in \Gamma_G(\{s_2, s_3\})$ et $s_1 \notin \{s_2, s_3\}$, donc s_1 est adjacent à l'ensemble $\{s_2, s_3\}$.

1.4.3 Le degré d'un sommet

Le *degré extérieur* d'un sommet s, noté $d_G^+(s)$, est le nombre d'arcs ayant s comme extrémité initiale.
On peut remarquer que $d_G^+(s_i) = \sum_{j=1}^n m_G^+(s_i, s_j)$
Le *degré intérieur* d'un sommet s, noté $d_G^-(s)$, est le nombre d'arcs ayant s comme extrémité terminale. On peut remarquer que $d_G^-(s_i) = \sum_{j=1}^n m_G^-(s_i, s_j)$
$d_G^+(s) + d_G^-(s) = d_G(s)$ est le *degré* de s dans lequel chaque boucle étant comptée deux fois.
Un sommet est *pair* (respectivement *impair*) si son degré est un nombre pair (respectivement impair).
Si $d_G(s) = 0$, s est un sommet *isolé*.
Si $d_G(s) = 1$, s est dit sommet *pendant*.
Si tous les sommets ont même degré, le graphe est dit *régulier*.
Lorsque G est un graphe simple, le degré d'un sommet s est égal au nombre de sommets adjacents à s.

Le degré minimum d'un graphe G est $\delta(G) = min\{d_G(s), s \in S\}$.
Le degré maximum de G est $\Delta(G) = max\{d_G(s), s \in S\}$.
Le degré moyen de G est défini par le nombre :

$$d(G) = \frac{1}{|S|}\sum_{s \in S} d_G(s)$$

On prouve facilement le théorème suivant :

Théorème 1 *Dans un graphe orienté $G = (S, A)$, les quatre propriétés suivantes sont toujours vérifiées:*

1. $\sum_{s\in S} d_G^-(s) = \sum_{s\in S} d_G^+(s)$.
2. $\sum_{s\in S} d_G(s) = 2||G||$.
3. $\sum_{s\in S} d_G(s) = 2p$, $p \in \mathbb{N}$.
4. *Il ya un nombre pair de sommets qui sont de degré impair.*

Démonstration :

1. Chaque arc du graphe donne une fois le degré intérieur et une fois le degré extérieur. D'où $\sum_{s\in S} d_G^-(s) = \sum_{s\in S} d_G^+(s)$.
2. Lorsque on additionne les degrés des sommets, un arc est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité. D'où $\sum_{s\in S} d_G(s) = 2||G||$.
3. Se déduit de (2) immédiatement.
4. On a
$$\sum_{s\in S} d_G(s) = \sum_{s\in S \ et \ d_G(s) \ mod \ 2=0} d_G(s) + \sum_{s\in S \ et \ d_G(s) \ mod \ 2=1} d_G(s).$$
Comme la première somme est paire, il faut que la seconde le soit. Comme chaque terme de la seconde somme est impaire, il faut que cette somme contienne un nombre pair de termes.

■

Exemple 4 : Considérons le graphe $G = (S, A)$ suivant:

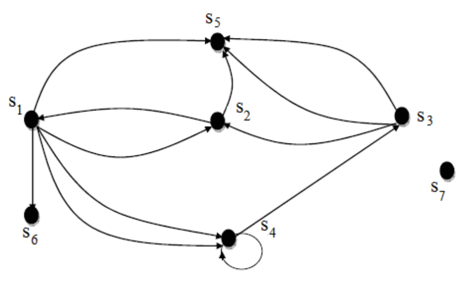

Figure 1.5: Un graphe orienté

Les différents degrés des sommets du graphe sont données dans le tableau suivant:

Sommet x	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	*Total*
$d_G^+(x)$	5	2	3	2	0	0	0	12
$d_G^-(x)$	1	2	1	3	4	1	0	12
$d_G(x)$	6	4	4	5	4	1	0	24

On peut vérifier que :

- $\sum_{x \in S} d_G^+(x) = 12 = \sum_{x \in S} d_G^+(x)$.
- $\sum_{x \in S} d_G(x) = 24$, un nombre pair.
- $\sum_{x \in S} d_G(x) = 2 \times 12$, 12 est la taille de G.
- Deux sommets s_4 et s_6 sont de degré impair.
- Le graphe n'est pas régulier, les sommets n'ont pas tous le même degré.
- $d_G(s_6) = 1$, s_6 est un sommet pendant.
- $d_G(s_7) = 0$, s_7 est un sommet isolé.
- Le graphe n'est pas simple car $d_G(s_1)$ est différent au nombre de sommets adjacents à s_1.
- $\delta(G) = 0$ et $\Delta(G) = 6$.

1.4.4 Relations entre arcs et sommets

Arc incident à un sommet

- Un arc (arête) est *incident* à un sommet si ce sommet est une extrémité de cet arc (arête).
- Un arc (arête) est dit *pendant* s'il est incident à un sommet pendant.
- Soit $a = (x, y)$ un arc. a est dit incident au sommet x *vers l'extérieur* et incident au sommet y *vers l'intérieur.*

Dans la figure 1.5 de l'exemple 4, l'arc (s_1, s_5) est incident au sommet s_1 vers l'extérieur et incident au sommet s_5 vers l'intérieur. L'arc (s_1, s_6) est un arc pendant puisque s_6 est un sommet pendant.

Arc incident à un ensemble de sommets

Soit $E \subset S$.

- Si l'extrémité initiale d'un arc a appartient à E mais pas son extrémité finale, on dit que a est un arc *incident à l'ensemble E vers l'extrieur.*
- Par contre, si l'extrémité finale d'un arc a appartient à E mais pas son extrémité initiale, on dit que a est un arc *incident à l'ensemble E vers l'intérieur.*

- Si a est incident à l'ensemble E vers l'extérieur alors on note $a \in \omega_G^+(E)$.
- Si a est incident à l'ensemble E vers l'intérieur alors on note $a \in \omega_G^-(E)$.
- L'ensemble des arcs incidents à l'ensemble E est noté $\omega_G(E) = \omega_G^+(E) \cup \omega_G^-(E)$.

Dans la figure 1.5 de l'exemple 4,
si $E = \{s_3, s_5\}$, l'arc (s_1, s_5) est incident à l'ensemble E vers l'intérieur, et l'arc (s_3, s_2) est incident à l'ensemble E vers l'extrieur.
$\omega_G^+(E) = \{(s_1, s_5), (s_2, s_5)\}$ est l'ensemble des arcs incidents à E vers l'intérieur.
$\omega_G^-(E) = \{(s_3, s_2)\}$ est l'ensemble des arcs incidents à E vers l'extrieur.
$\omega_G(E) = \{(s_1, s_5), (s_2, s_5), (s_3, s_2)\}$ est l'ensemble des arcs incidents à E.

1.4.5 Arcs adjacents

Deux arcs (arêtes) sont dits *adjacents* s'ils ont une extrémité commune.
Dans la figure 1.5 de l'exemple 4, les deux arcs (s_1, s_5) et (s_2, s_5) sont adjacents puisque le sommet s_5 est une extrémité commune.

1.4.6 Qualificatifs des graphes

Sous graphe engendré, graphe partiel engendré et sous-graphe partiel

Soit un graphe quelconque $G = (S, A)$.

- Soit $E \subset S$, *le sous graphe engendré par* E est le graphe noté G_E dont les sommets sont les éléments de E et dont les arcs (arêtes) sont les éléments de A ayant leurs extrémités dans E.
- Soit $U \subset A$, le *graphe partiel engendré par* U est le graphe (S, U) ayant le même ensemble de sommets que G, et dont les arcs (arêtes) sont les éléments de U on élimine de G les arcs de $A - U$.
- Un *sous-graphe partiel* de G est un sous-graphe d'un graphe partiel de G ou un graphe partiel d'un sous-graphe de G.

  Exemple 5 : Pour le graphe G si après :

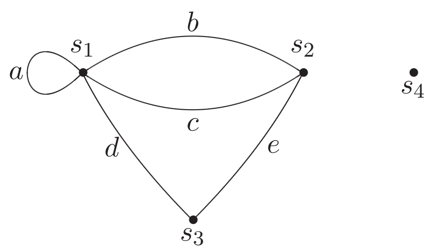

Figure 1.6: Un exemple d'un graphe

le graphe suivant :

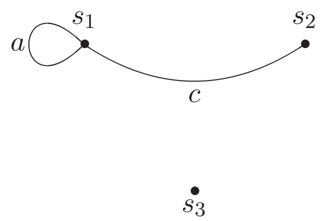

Figure 1.7: Sous graphe engendré

est un sous graphe de G engendré par l'ensemble des sommets $\{s_1, s_2, s_3\}$,
tandis que le graphe

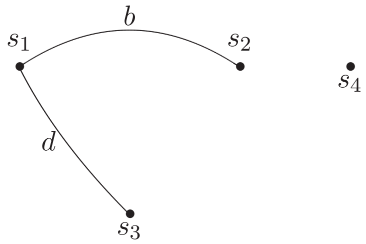

Figure 1.8: Graphe partiel

est un graphe partiel engendré par l'ensemble des arêtes $\{b, d\}$.

Soient S l'ensemble des villes de l'Algérie qui ont une gare et A l'ensemble des voies ferrées les reliant.
Si S_1 est l'ensemble des villes centre d'Algérie, avec une gare, et A_1 l'ensemble des voies ferrées les reliant, le graphe $G_1 = (S_1, A_1)$ est le sous-graphe du graphe $G = (S, A)$ engendré par S_1.
Maintenant si on considère A_2 le réseau TGV. Le graphe $G_2 = (S, A_2)$ est un graphe partiel de G.
Si A_3 représente le réseau TGV reliant les villes du centre d'Algérie, le graphe $G_3 = (S_1, A_3)$ est un sous graphe partiel de G.

Graphe symétrique

Un graphe est dit *symétrique* si pour toute paire de sommets x et y, il existe autant d'arcs de la forme (x, y) que d'arcs de la forme (y, x).
Un graphe est *antisymétrique* si pour tout arc de la forme (x, y), il n'existe pas d'autre arc de la forme (x, y) ou de la forme (y, x) (C'est un 1-graphe).

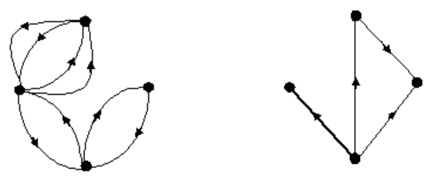

Figure 1.9: Graphes symétrique et antisymétrique

Graphe complet

Un graphe *complet* est un graphe dont tous les sommets sont adjacents.

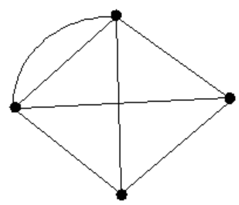

Figure 1.10: Graphe complet

Clique

Une *clique* est un graphe simple et complet. Une clique d'ordre n se note K_n.

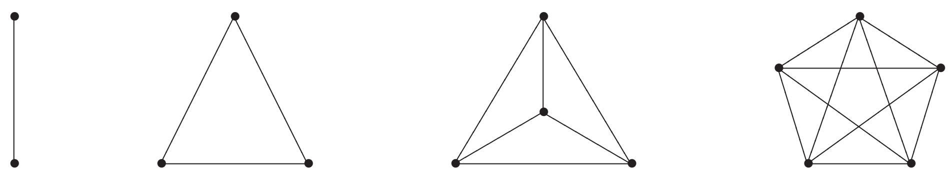

Figure 1.11: Les cliques K_2, K_3, K_4 et K_5.

Biparti

Un graphe $G = (S, A)$ est dit *biparti* si on peut partitionner l'ensemble de ses sommets S en deux sous-ensemble (classes) S_1 et S_2 de telle sorte que deux sommets de même classe ne soient pas adjacents. On le note par $G = (S_1, S_2, A)$.

Un graphe biparti $G = (S_1, S_2, A)$ est dit complet si tous les sommets de S_1 sont adjacents à tous les sommets de S_2.

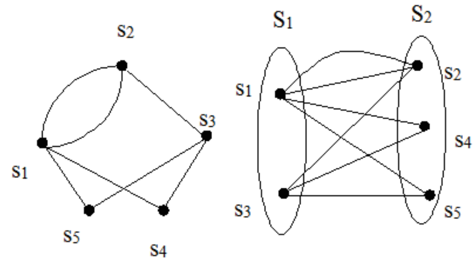

Figure 1.12: Graphe biparti

Stable

On dit qu'un sous-ensemble S' de l'ensemble des sommets S est *stable* s'il ne contient pas de paire de sommets adjacents. Dans l'exemple ci-dessous, le sous-ensemble $\{s_2, s_4, , s_5\}$ est stable.

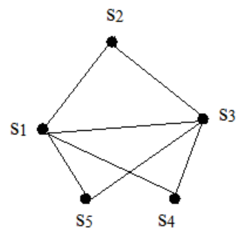

Figure 1.13: Un stable

Graphe complémentaire

A un graphe simple $G = (S, A)$ d'ordre n on peut définir son *graphe complémentaire* $\bar{G} = (S, \bar{A})$ d'ordre n comme suit:
Un arc de A n'appartient pas à $\bar{A}$ et vise versa. Notons que $G \cup \bar{G}$ donne une clique K_n.

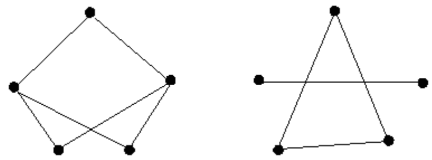

Figure 1.14: Graphe et son complémentaire

1.5 Matrices associées à un graphe

1.5.1 Matrice d'incidence sommet-arc

Soit G un graphe sans boucle d'ordre n et de taille m.
La matrice d'*incidence sommets-arcs* de G est une matrice $A = (A_{ij})$ de dimension $n \times m$, telle que chaque ligne i correspond au sommet s_i de G et chaque colonne j correspond à l'arc a_j de G. La matrice A est définie comme suit :

- $A_{ij} = 1$ si le sommet s_i est l'extrémité initiale de l'arc a_j,
- $A_{ij} = -1$ si le sommet s_i est l'extrémité terminale de l'arc a_j,
- $A_{ij} = 0$ dans les autres cas.

Notons que le nombre de valeurs égales à $(+1)$ (respectivement, (-1)) d'une ligne i donne le degré extérieur $d_G^+(s_i)$ (respectivement, $d_G^-(s_i)$) du sommet s_i correspondant.
La matrice d'incidence sommets-arcs associé au graphe suivant:

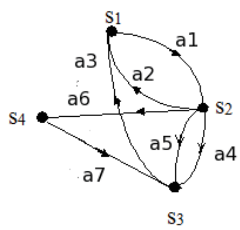

Figure 1.15: Un graphe

est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer par exemple que : $d_G^+(s_1) = 1$ et $d_G^-(s_1) = 2$.

1.5.2 Matrice d'adjacence ou d'incidence sommets-sommets

La matrice d'*adjacence* ou *d'incidence sommets-sommets* d'un graphe G d'ordre n est une matrice $A = (A_{ij})$ carrée de dimension $n \times n$, où chaque ligne correspond à un sommet de G et chaque colonne correspond également à un sommet de G, telle que l'élément A_{ij} représente le nombre d'arc de la forme (a_i, a_j).
Dans cette matrice on a $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = d_G^+(s_i)$ et $\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = d_G^-(s_j)$.
La matrice d'adjacence ou d'incidence sommets-sommets associée au graphe ci-dessous

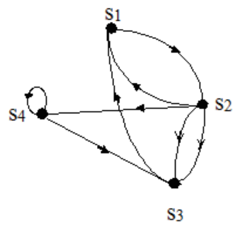

Figure 1.16: Un graphe

est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer, par exemple, que $\sum_{j=1}^{4} A_{2j} = d_G^+(s_2) = 4$ et $\sum_{i=1}^{4} A_{i2} = d_G^-(s_2) = 1$.

1.5.3 Forme condensée des matrices creuses

La matrice représentée par la figure Fig 1.17 a un nombre important d'éléments nuls. On dit qu'on a une matrices creuse.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figure 1.17: Matrice d'adjacence d'un graphe

Il est possible de présenter cette matrice sous forme condensée, c'est à dire de repérer les termes non nuls soit par leur position dans la matrice (Fig.1.18) :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Figure 1.18: Première forme d'une matrice condensée

ou bien par indiquer pour chaque arc, son extrémité initiale et son extrémité terminale (Fig.1.19) :

$$\left(\begin{array}{c|cc} a_1 & s_2 & s_8 \\ a_2 & s_3 & s_3 \\ a_3 & s_4 & s_5 \\ a_4 & s_4 & s_8 \\ a_5 & s_5 & s_6 \\ a_6 & s_5 & s_8 \\ a_7 & s_6 & s_5 \\ a_8 & s_6 & s_5 \\ a_9 & s_7 & s_3 \end{array}\right)$$

Figure 1.19: Deuxième forme d'une matrice condensée

1.6 Vocabulaire lié à la connexité

1.6.1 Chaîne, chemin, longueur

Une *chaîne* de longueur $q > 0$ de G est une séquence d'arcs $a = (a_1, a_2, \cdots, a_p)$ telle que pour toute i, $1 \leq i \leq q-1$, a_i est adjacent à a_{i+1}.
Une chaîne *élémentaire* est une chaîne ne rencontrant pas deux fois le même sommet.
Une chaîne *simple* est une chaîne n'utilisant pas deux fois le même arc.
Un *chemin* de longueur $q > 0$ est une chaîne $a = (a_1, a_2, \cdots, a_p)$ telle que pour tout i, $1 \leq i \leq q-1$, l'extrémité terminale de a_i coïncide avec l'extrémité initiale de a_{i+1}.
Une chaîne (un chemin) est dite *fermée* si les deux sommets aux extrémités de la chaîne coïncident.
Dans l'exemple suivant, de la figure 1.20, $a = (a_1, a_4, a_5, a_6)$ est un chaîne élémentaire, simple de longueur 4. La chaîne $a = (a_1, a_4, a_5, a_6)$ n'est pas un chemin. Par contre, la chaîne $a = (a_2, a_3)$ est un chemin élémentaire, simple de longueur 2.

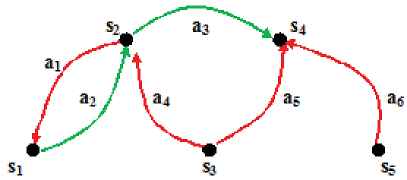

Figure 1.20: Chaîne et chemin

1.6.2 Connexité

Un graphe G est dit *connexe* si pour toute paire de sommets distincts s_i et s_j, il existe une chaîne reliant s_i et s_j.
Une *composante connexe* de G est un sous-graphe connexe de G d'ordre maximal, c'est-à-dire qui n'est contenu dans aucun autre sous-graphe connexe de G.
Un graphe est connexe si et seulement s'il n'a qu'une seule composante connexe.
Dans l'exemple de la figure 1.21, le graphe n'est pas connexe car il n'existe pas de chaîne reliant s_3 et s_9. Il possède trois composantes connexes, les sous-graphes engendrés par : $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $\{s_6, s_7, s_8\}$ et $\{s_9\}$.

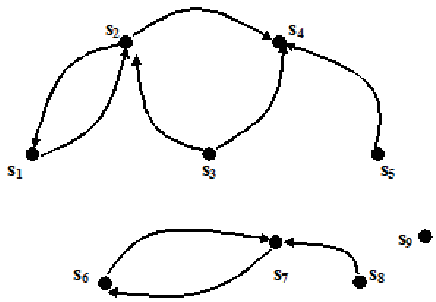

Figure 1.21: La connexité et les composantes connexes

1.6.3 Cycle et circuit

Un *cycle* (un *circuit*) est une chaîne (un chemin) simple et fermée.
Un cycle *élémentaire* (circuit *élémentaire*) est un cycle (un circuit) ne rencontrant pas deux fois le même sommet, excepté le sommet initial qui coïncide nécessairement avec le sommet final.

Dans l'exemple de la figure1.22, la chaîne (a_3, a_4, a_5) est un cycle de longueur 3. (a_3, a_4, a_5) n'est pas un circuit. Par contre, (a_1, a_2) est un circuit de longueur 2.

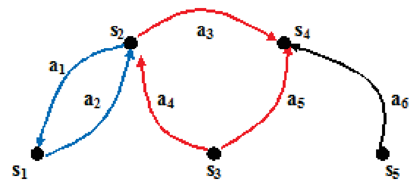

Figure 1.22: Cycle et circuit

On désigne par μ^+ l'ensemble des arcs du cycle orientés dans le sens de parcours et par μ^- l'ensemble des autres arcs du cycle. Si les arcs sont numérotés $1, 2, \cdots, p$, on peut faire correspondre à tout cycle un vecteur $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p)$ de $\mathbb{R}^p$ défini comme suit :

$$\mu_i = \begin{cases} 0 & i \notin \mu^+ \bigcup \mu^- \\ +1 & i \in \mu^+ \\ -1 & i \in \mu^- \end{cases}$$

Par la suite, on confondra un cycle ou un circuit avec son vecteur associé et on parlera de somme de cycles ou de circuits.
Pour l'exemple de la figure 1.22 ci-dessus, le vecteur associé au cycle (a_3, a_4, a_5) est donné par $\mu = (0, 0, -1, -1, 0, 0)$.

1.6.4 Cocycle et cocircuit

Soit $E \subset S$. Par définition, $\omega_G(E) = \omega_G^+(E) \bigcup \omega_G^-(E)$ est l'ensemble des arcs incidents à l'ensemble E.
L'ensemble $\omega_G(E)$ est dit un *cocycle* si les deux conditions sont vérifiées:

$$\begin{cases} \omega_G(E) \neq \emptyset \\ \omega_G^+(E) \bigcap \omega_G^-(E) = \emptyset \end{cases}$$

Autrement dit, les deux sous-ensembles $\omega_G^+(E)$ et $\omega_G^-(E)$ forment une partition de $\omega_G(E)$.
Un *cocircuit* est un cocycle $\omega_G(E)$ dans lequel tous les arcs sont orientés dans le même sens soit vers l'extérieur de E, soit vers l'intérieur de E. Autrement dit, on a $\omega_G(E) = \omega_G^+(E)$ ou $\omega_G(E) = \omega_G^-(E)$.
Dans la figure 1.23 ci-dessous, si on prend $E = \{s_2, s_3, s_4\}$ on obtient $\omega_G^+(E) = \{a_1\}$ et $\omega_G^-(E) = \{a_2, a_6\}$. Ce qui donne le cocycle $\omega_G(E) = \{a_1, a_2, a_6\}$.
Pour l'ensemble $E' = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, on a $\omega_G(E') = \omega_G^-(E') = \{a_6\}$. Le singleton $\{a_6\}$ est donc un cocircuit.

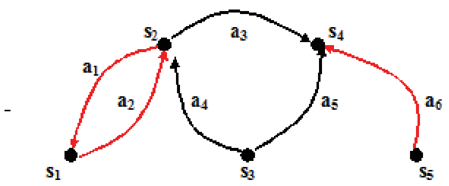

Figure 1.23: Exemple de cocycle et cocircuit

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux sous graphes connexes d'un graphe connexe $G = (S, A)$ tels que :

$$\begin{cases} S_1 \neq \emptyset,\ S_2 \neq \emptyset \\ S_1 \bigcap S_2 = \emptyset \\ S_1 \bigcup S_2 = S \end{cases}$$

L'ensemble des arcs reliant G_1 et G_2 est appelé *cocycle élémentaire*.
Dans la figure 1.24, $\{a_3, a_5\}$ est un cocycle élémentaire, avec $S_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$ et $S_2 = \{s_4, s_5\}$.

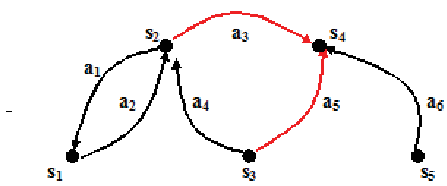

Figure 1.24: Exemple de cocycle élémentaire

On peut correspondre à tout cocycle $\omega_G(E)$ un vecteur $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$ de $\mathbb{R}^m$, où $m = ||G||$. Le vecteur est défini par :

$$\omega_i = \begin{cases} 0 & i \notin \omega_G(E) \\ +1 & i \in \omega_G^+(E) \\ -1 & i \in \omega_G^-(E) \end{cases}$$

Par la suite, on confondra un cocycle ou un cocircuit avec son vecteur associé et on parlera de somme de cocycles ou de cocircuits.
Pour l'exemple de la figure 1.24 ci-dessus, le vecteur associé au cocycle $\{a_1, a_2, a_6\}$ est donné par $\omega = (1, -1, 0, 0, 0, -1)$.