Université Djilali Bounaâma de Khemis-Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et d'Informatique

2 ième Année Informatique
Module : La théorie des graphes

La solution de la série d'exercices N^o 1

Exercice 1

Traduisons ce problème à l'aide d'un graphe.
Chaque région de la ville est représentée par un sommet, et un pont entre deux régions, par une arête entre les sommets concernés.
Le graphe associé au plan de la ville est donc le graphe suivant :

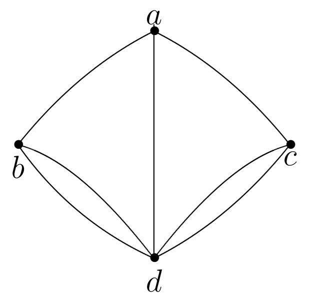

Figure 1: Le graphe de Koenigsberg

Exercice 2

Les graphes G_1 et G_2 représentent tous deux le même graphe, qui est un graphe cyclique (c'est un cycle) d'ordre 6.
Les graphes G_3 et G_4 représentent tous deux le même graphe, un pentagone ou l'un des sommets est relié à tous les autres, les autres sommets étant seulement reliés à leurs deux voisins.

Exercice 3

Ces trois situations correspondent toutes au graphe de l'octaèdre.
(Voir Figure 2)

Exercice 4

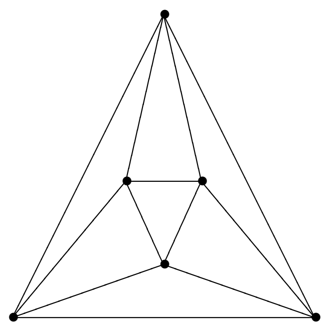

Figure 2: Le graphe de l'octaèdre

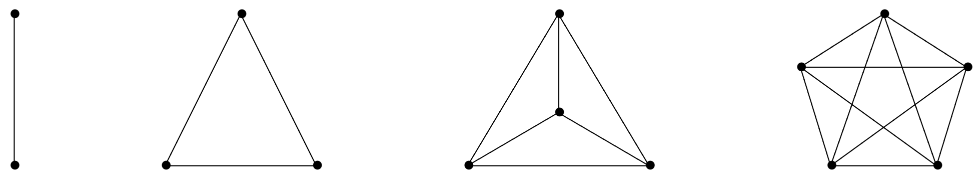

Figure 3: Les graphes complets

Les graphes complets sont représentés dans la Figure 3.
Puisque le graphe K_n possède toutes les arêtes possibles, il a autant d'arêtes que de façons de choisir 2 éléments parmi n, soit $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 5

Dans un graphe simple où tout sommet est de degré 2, toute composante connexe a au moins 3 éléments (le sommet considéré, et les deux sommets distincts qui lui sont adjacents).
Donc, pour les ordres 3, 4, 5, il ne peut y avoir qu'une composante connexe, et le graphe est déterminé de façon unique.
A partir de l'ordre 6, il y a autant de graphes que de façon d'écrire l'ordre comme somme d'entiers supérieurs ou égaux à 3.

Exercice 6

L'idée essentielle est de représenter le problém par un *graphe* $G = (S, A)$: chaque club est représenté par un sommet, et où on relie par une arête deux clubs qui disputent un match.
Après qu'on a essayé tous les situations possibles, on conclus qu'il n'est pas

possible que les équipes jouent toutes le même nombre de matchs.
Mais que se passe-t-il si la taille des données est important? Avec 15 clubs, par exemple, il est assez difficile de démarrer le travail sur ce problème.
Une bonne idée est alors d'utiliser les proriétés mathématiques des graphes qu'on a étudié :
Si le le problème a une solution alors on a:

$$\forall s \in S,\ d_G(s) = 3$$

puisque chaque équipe doit jouer 3 matchs.
Si on compte le nombre total de participations, on obtient :

$$\sum_{s \in S} d_G(s) = 3 \times 7 = 21.$$

Ce qui est absurde (la somme des degré doit être un nombre pair).
L'organisation d'un tel tournoi n'est pas possible. On voit que, plus généralement, pour la même raison, s'il y a un nombre impair d'équipes, il n'est pas possible qu'elles jouent toutes un nombre impair de matchs.

Exercice 7

Si l'on pense à représenter chaque segment par un sommet, et à relier 2 sommets si les segments correspondants se coupent, on voit, exactement comme pour l'exercice précédent, que l'exercice proposé est impossible.

Exercice 8

Le graphe G est simple, donc chaque sommet du graphe est adjacent à au plus 3 autres sommets. Autrement dit,

$$\forall s \in S,\ d_G(s) \leq 3.$$

La somme des degré du graphe vérifiée l'inégalité

$$\sum_{s \in S} d_G(s) \leq 3 \times 4 = 12 = 2 \times 6.$$

Par conséquent $||G|| \leq 6$, ce qui est absurde.
Donc il n'est pas possible de construire un graphe simple ayant 4 sommets et 7 arêtes.

Exercice 9

On a par définition
$$\sum_{s \in S} d_G(s) = 2||G||.$$
De plus G est r-régulier, c'est-à dire
$$\forall s \in S,\ d_G(s) = r.$$
Par substitution
$$\sum_{s \in S} r = 2||G||.$$
Ce qui donne
$$r|G| = 2||G||.$$
D'où le résultat
$$||G|| = \frac{r|G]}{2}.$$

Exercice 10

La régle 1 nous permet d'obtenir la représentation graphique suivante :
les commissions sont les sommets et un conseiller faisant partie d'exactement 2 commissions est représenté par une arête reliant les 2 sommets qui les représentent.
La règle 1 nous dit aussi que le graphe obtenu est sans boucle.
La règle 2 implique qu'il n'y a pas d'arête multiple, et que deux sommets quelconques sont adjacents ;
c'est à dire que le graphe est complet, c'est K_7, il a $\binom{7}{2}$ arêtes, soit 21 conseillers municipaux. On peut même en déduire le nombre de membres de chaque commission, c'est-à-dire 6.

Exercice 11

La situation est impossible, si du moins on suppose que l'amitié est réciproque. En effet, en traçant le graphe des amis, on voit que l'hypothèse implique qu'il y a 11 sommets impairs, ce qui ne peut arriver.

Exercice 12

Considérons un graphe d'ordre n, dont tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$. Supposons le graphe non connexe. Alors, il existe deux sommets a et b distincts, tels qu'aucune chaîne ne les relie. En particulier, ils ne sont pas adjacents. Il y a au moins $\frac{n-1}{2}$ sommets adjacents à a, et $\frac{n-1}{2}$ sommets adjacents à b. Ces sommets doivent être tous distincts, sinon il y aurait une chaîne de longueur 2 joignant a à b, et ils sont distincts de a et b. Mais alors il y a $2 + 2 \times \frac{n-1}{2} = n + 1$ sommets distincts, ce qui est impossible. On raisonne de même avec un graphe d'ordre $2p$ dont tout sommet est de degré au moins égal à p.