République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ DJILALI BOUNAAMA, KHEMIS MILIANA

FACULTÉ des SCIENCES et de la TECNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES et INFORMATIQUE

Cours et TD de :

Topologie et Analyse Fonctionnelle

Pour : Master 1 Analyse Mathématique et Applications

Présenté par

Leila Slimane

2020-2021

Table des matières

Introduction

L'analyse fonctionnelle est une discipline des mathématiques qui étudie les espaces fonctionnels, c'est-à-dire les espaces dont ses éléments sont des fonctions. Elle étudie et présente des outils indispensables pour l'analyse de ces espaces. Ces derniers sont nécessaires pour l'étude et la résolution de certains problèmes, qui apparaissent dans plusieurs domaines, comme les équations aux dérivées partielles, les équations intégrales, optimisation... etc.
Ce cours s'adresse aux étudiants de Master I Analyse Mathématiques et Applications. Les sujets couverts dans ce cours sont : rappel de topologie générale, les grands théorèmes de l'analyse fonctionnelle, les topologies faible et faible-étoile, ainsi que les espaces réflexifs, séparables et uniformément convexes.

Chapitre 1

Rappels de Topologie Générale

Chapitre 2

Les Grands Théorèmes de l'Analyse Fonctionnelle

Dans ce chapitre, on présente les théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle. On commence par le théorème de Baire qui joue un rôle très important dans la démonstration de certains grands théorèmes notamment : le théorème de l'application ouverte et le théorème de Banach-Steinhaus.

2.1 Théorème de Baire

Théorème 2.1.1 *(**Théorème de Baire -1899**) Soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de fermés de X d'interieur vide. Alors $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ est d'intérieur vide.*

Ce théorème annonce que dans un espace métrique complet la réunion d'une famille dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide. Autrement dit : soit (X, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite de fermés de X, alors si $A = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ admet un point d'intérieur *i.e.* $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$ alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F_m} \neq \varnothing$.

On note que :

- $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$ n'est pas forcément fermé.

– L'ensmble des indices doit être dénombrable.

– Ce théorème est souvent utilisé lorsque $X = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} F_n$.

Afin de présenter l'énoncé équivalent du théorème de Baire en utilisant les ouverts, rappelons que : $\overline{C_X A} = C_X \overset{\circ}{A}$. Donc un ensemble est dense si et seulement si son complémentaire est d'intérieur vide : $\overline{A} = X \Leftrightarrow \overset{\circ}{\overline{C_X A}} = \emptyset$.

Théorème 2.1.2 ***(Théorème de Baire-deuxième version)*** *Soit (X,d) un espace métrique complet et $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses de X. Alors, $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}\Omega_n$ est dense dans X.*

Notons que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}\Omega_n$ n'est pas nécessairement ouvert. Cette version du théorème de Baire dit que dans un espace métrique complet, une intersection dénombrable d'ouverts denses est encore dense dans X.

Preuve. Devoir à remettre avant les examens. ■

2.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 2.2.1 ***(Théorème de Banach-Steinhaus, 1927)*** *Soit E un espace de Banach et F un espace normé et soit $(T_i)_{i\in I}$une famille d'applications de $\mathcal{L}(E,F)$ (I ensemble d'indices quelconques). On supppose que pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{T_i(x),\ \ i \in I\}$ est borné dans F : $\forall x \in E, \exists C_x > 0 : C_x = \underset{i\in I}{Sup} \|T_i(x)\|_F < +\infty$. Alors :*

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall i \in I, \quad \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M.$$

Ce théorème veut dire que s'il existe, pour chaque $x \in E$, un nombre positif $M_x < +\infty$ tel que :

$$\|T_i(x)\|_F \leq \ M_x \|x\|_E, \quad \forall i \in I,$$

alors il existe un nombre positif M tel que :

$$\|T_i(x)\|_F \leq M \|x\|_E, \quad \forall x \in E, \ \forall i \in I.$$

Preuve. Devoir n°2 : à remettre avant les examens. ■

Présentons maintenant le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.1 *Soit E un espace de Banach et F un espace normé et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'applications de $\mathcal{L}(E,F)$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n x = Tx$ existe $\forall x \in E$. Alors : la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et de plus : $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \inf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.*

Preuve. Les applications T_n sont linéaires, alors on obtient facilement que T est linéaire aussi. La suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, car elle est convergente, donc le théorème de Banach-Steinhaus assure que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :

$\exists M \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$; $\quad \|T_n(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

Passons à la limite on obtient que :

$\|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

Par la suite T est continue i.e. $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq M$.

De plus comme :

$$\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E,$$

on déduit que :

$$\|T(x)\|_F = \lim_{n\to+\infty} \|T_n(x)\|_F \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E,$$

d'où : $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \inf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$. ■

2.3 Théorème de l'application ouverte

Définition 2.3.1 *Considérons (X,Θ), (Y,Θ') deux espaces toplogiques. L'application $f : X \to Y$ est appelée application ouverte si l'image de tout ouvert de X par f est un ouvert de Y.*

Remarque 2.3.1 *Quand f est une fonction continue de X sur Y, l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X, mais on sait rien apriori sur la nature topologique de l'image directe d'un ouvert par f.*

Exemple 2.3.1 *Toute application constante sur un espace métrique est continue mais elle n'est pas ouverte. Prenons comme exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, alors $f(]a,b[) = \{c\}$, le singleton $\{c\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.*

Enonçons maintenant le théorème de l'application ouverte qui est aussi appellé théorème de Banach-Schauder.

Théorème 2.3.1 ***(Théorème de l'application ouverte)*** *Soit E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$ surjective. Alors T est une application ouverte, i.e.*

$$\exists c > 0 : \; B_F(0,c) \subseteq T\left(B_E(0,1)\right). \tag{2.1}$$

1. Il est important que les deux espaces E et F dans ce théorème soient **complets**.
2. Ce théorème s'utilise de la façon suivante :

$$\forall y \in F, \; \exists x \in E \text{ tel que } y = Tx \;\text{ et }\; \|x\| \leq \frac{1}{c}\|y\|. \tag{2.2}$$

3. La relation (2.1) induit que l'application est ouverte : en effet, soit Ω un ouvert non vide de E et soit $y_0 \in T(\Omega)$; comme T est surjective il existe $x_0 \in \Omega$ tel que : $y_0 = Tx_0$. Soit $r > 0$ tel que $B_E(x_0, r) \subset \Omega$, alors $y_0 + T(B_E(0,r)) = T(B_E(x_0,r)) \subset T(\Omega)$, d'où par (2.1) :

$$B_F(y_0, rc) = y_0 + rB_F(0,c) \subset y_0 + rT(B_E(0,1)) = T(B_E(x_0,r)) \subset T(\Omega).$$

Donc $T(\Omega)$ est bien un ouvert de F.

Présentons maintenant deux conséquences très importantes de ce théorème.

Théorème 2.3.2 ***(Théorème d'isomorphisme de Banach)*** *Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue et bijective. Alors T^{-1}est continue. L'application T est donc un isomorphisme.*

Preuve. Soit Ω un ouvert de E. Comme T est bijective, on a : $\left(T^{-1}\right)^{-1}(\Omega) = T(\Omega)$, mais $T(\Omega)$ est un ouvert grâce au théorème de l'application ouverte. On conclut donc que l'image réciproque de tout ouvert de E par T^{-1} est un ouvert de F. Ce qui veut dire que T^{-1}est continue. ■

Corollaire 2.3.1 *Soit E un e.v.n. que l'on munit de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Supposons de plus que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont complets et qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in E$: $\|x\|_1 \leq c\ \|x\|_2$. Alors les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.*

Preuve. L'inégalité $\|x\|_1 \leq c\ \|x\|_2$ signifie que l'application identité $Id : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$, qui est linéaire et bijective, est continue. Donc Id^{-1} est continue, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach. Par la suite :

$$\exists c' > 0, \quad \forall x \in E : \|x\|_2 \leq c'\ \|x\|_1\,,$$

d'où l'équivalence des deux normes. ■

2.4 Théorème du graphe fermé

Définition 2.4.1 *Soit E et F deux e.v.n. et T une application de E vers F. Le graphe de T (noté $G(T)$) est le sous ensemble de $E \times F$ défini par :*

$$G(T) = \{(x, Tx) \in E \times F; \quad x \in E\}.$$

On peut vérifier facilement que si T est continue alors $G(T)$ est fermé au sens de la topologie produit de $E \times F$. Mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Théorème 2.4.1 ***(Théorème du graphe fermé)*** *Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si le graphe de T, $G(T)$, est fermé.*

Preuve. L'implication directe est évidente. Montrons l'implication réciproque : supposons que $G(T)$ est fermé et montrons que T est automatiquement continue. Munissons E d'une seconde norme, appelée norme du graphe, définie par :

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F , \quad \forall x \in E.$$

Comme $G(T)$ est fermé, on déduit que $(E, \|\cdot\|_T)$ est un espace complet *i.e. de Banach.* (Car $G(T)$ est fermé dans l'espace complet $E \times F$, donc il est complet) D'autre part on a :

$$\|x\|_E \leq \|x\|_T.$$

Corollaire 2.3.1 entraine que ces deux normes sont équivalentes :

$$\exists C > 0, \quad \forall x \in E : \|x\|_T \leq C \|x\|_E .$$

Par la suite :

$$\forall x \in E : \|Tx\|_F \leq C \|x\|_E ,$$

ce qui veut dire que T est continue. ■

Remarque 2.4.1 *Soit E et F deux Banach et T une application linéaire de E vers F. Pour démontrer la continuité de T, il suffit donc de vérifier que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que (x_n, Tx_n) converge vers (x, y), on a $y = T(x)$.*

2.5 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences

2.5.1 La forme analytique du théorème de Hahn-Banach

Théorème 2.5.1 ***(Théorème de Hahn-Banach, forme analytique)*** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application vérifiant :*

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \ \forall x \in E, \forall \lambda > 0.$
2. $p(x+y) \leq p(x) + p(y), \ \ \forall x, y \in E.$

Soit G un sous espace verctoriel de E et $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire satisfaisant : $g(x) \leq p(x), \ \ \forall x \in G$. Alors il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge g i.e. $g(x) = f(x), \ \ \forall x \in G$, et qui satisfait : $f(x) \leq p(x), \ \ \forall x \in E$.

Dans la suite, on présente quelques conséquences très importantes du théorème de Hahn-Banach, lorsque E est un espace vectoriel **normé** (e.v.n.) de norme $\|\cdot\|$.

Théorème 2.5.2 ***(Théorème de prolongement de Hahn-Banach)*** *Considérons E un $\mathbb{R}-$e.v.n. et G un sous-espace vectoriel de E et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue de norme $\|g\|_{G'} = \sup\limits_{x \in G, \|x\| \leq 1} g(x)$. Alors il existe un prolongement $f \in E'$ de g tel que : $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec $p(x) := \|g\|_{G'} \|x\|$. ■

Corollaire 2.5.1 *Soit E un e.v.n. et $x_0 \in E$. Alors il existe $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = 1$ et $f(x_0) = \|x_0\|$.*

Preuve. Le résultat est trivial si $x_0 = 0_E$. Quand $x_0 \neq 0_E$ on applique le théorème 2.5.2 en choisissant : $G = \mathbb{R}x_0$ et $g(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ de sorte que $\|f\|_{E'} = 1$. ■

Corollaire 2.5.2 *Soit E un e.v.n. Pour tout $x \in E$ on a :*

$$\|x\|_E = \sup_{L \in E', \|L\|_{E'} = 1} |L(x)| \, ,$$

i.e. le sup est atteint.

Preuve. Le résultat est évident lorsque $x = 0_E$. Supposons que $x \neq 0_E$. Soit $L \in E'$ tel que $\|L\|_{E'} = 1$. Alors comme : $|L(x)| \leq \|L\|_{E'} \|x\|_E$, on obtient $|L(x)| \leq \|x\|_E$. Donc

$$\sup_{L \in E', \|L\|_{E'}=1} |L(x)| \leq \|x\|_E .$$

Réciproquement le corollaire 2.5.1 assure l'exsitence de $\widetilde{L} \in E'$ tel que $\widetilde{L}(x) = \|x\|_E$ et $\left\|\widetilde{L}\right\|_{E'} = 1$. Donc :

$$\|x\|_E = \left|\widetilde{L}(x)\right| \leq \sup_{L \in E', \|L\|_{E'}=1} |L(x)| .$$

Alors, on déduit que

$$\|x\|_E = \sup_{L \in E', \|L\|_{E'}=1} |L(x)| .$$

■

Corollaire 2.5.3 *Pour tout e.v.n. E, le dual E' sépare les points de E i.e. pour tout x_1, $x_2 \in E$ tel que $x_1 \neq x_2$ il existe $f \in E'$ tel que $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Preuve. Si $x_1 \neq x_2$ alors posons $x = x_1 - x_2 \neq 0_E$, il existe d'après le corollaire 2.5.1 $f \in E'$ telle que $f(x) = \|x\| \neq 0$. Ceci implique que : $f(x_1) \neq f(x_2)$. ■

Remarque 2.5.1 *Cette propriété n'est pas vérifiée pour des espaces plus généraux.*

2.5.2 La forme géométrique du théorème de Hahn-Banach

Dans toute la suite E désigne un $\mathbb{R}-$espace vectoriel normé.

Définition 2.5.1 *On appelle hyperplan toute partie de E de la forme :*

$$H := \{x \in E;\ f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

où f est une forme linéaire sur E, non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Proposition 2.5.1 *L'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si et seulement f est continue.*

Définition 2.5.2 *Soit A et B deux parties de E.*

1. *On dit que l'hyperplan $[f = \alpha]$ sépare A et B au* ***sens large*** *si :*

$$f(a) \leq \alpha \leq f(b), \quad \forall a \in A, \, \forall b \in B.$$

2. *On dit que l'hyperplan $[f = \alpha]$ sépare A et B au* ***sens strict*** *si :*

$$f(a) < \alpha < f(b), \quad \forall a \in A, \, \forall b \in B.$$

La séparation exprime géométriquement que A et B se situent de part et d'autre de de l'hyperplan $[f = \alpha]$.

Théorème 2.5.3 *(**Théorème de Hahn-Banach, première forme géométrique**) Soit A et B deux parties convexes de E, non vides et disjointes. Supposons que A est ouverte. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au* ***sens large****.*

Théorème 2.5.4 *(**Théorème de Hahn-Banach, deuxième forme géométrique**) Soit A et B deux parties convexes de E, non vides et disjointes. Supposons que A est* ***fermé*** *et que B est* **compact.** *Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au* ***sens strict.***

2.5.3 Critère de densité :

Corollaire 2.5.4 *Soit F un sous-espace vectoriel de E non dense. Alors F est inclus dans un hyperplan fermé de E.*

Preuve. Soit $x_0 \in E\backslash\overline{F}$. On applique le théorème de Hahn-Banach 2.5.4 avec $A = \overline{F}$ et $B = \{x_0\}$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in E'$ tels que : $\forall x \in \overline{F},\ \ f(x) < \alpha < f(x_0)$. Par la suite : $f(\lambda x) < \alpha$, $\forall x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $f(x) = 0, \forall x \in F$. Mais $f \neq 0_{E'}$ car $f(x_0) > f(x), \forall x \in F$. Donc F est inclus dans l'hyperplan $\ker f = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$ *i.e.* $F \subset \ker f$. ∎

Remarque 2.5.2 *Corollaire 2.5.4 peut être donné sous la forme suivante :*
soit $F \subset E$ un s.e.v. tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E'\backslash\{0_{E'}\}$ tel que $f(x) = 0, \forall x \in F$.

Corollaire 2.5.5 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est dense si et seulement :*

$$\forall f \in E';\quad f(x) = 0, \forall x \in F \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in E\ ;$$

autrement dit : toute forme linéaire $f \in E'$ s'annulant sur F s'annule aussi sur E tout entier.

Preuve. Voir exercice 2.6. ∎

2.6 Exercices

Exercise 2.1 *Soit E un espace métrique complet. Montrer que le théorème de Baire est aussi valable pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de E.*

Solution : Soit $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de $\mathcal{O}$ et denses dans $\mathcal{O}$. On cherche à montrer que $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap}\mathcal{O}_n$ est aussi dense dans $\mathcal{O}$. Soit A un ouvert non-vide de $\mathcal{O}$. Notons que les $\mathcal{O}_n$ et A sont aussi ouverts dans E car $\mathcal{O}$ est un ouvert de E.

Posons : $\mathcal{U}_n = \mathcal{O}_n \cup C_E\overline{\mathcal{O}}$. On constate que $\mathcal{U}_n$ est un ouvert de E, de plus il est dense dans E, car :

$$E = \overline{\mathcal{O}} \cup C_E\overline{\mathcal{O}} = \overline{\mathcal{O}_n} \cup C_E\overline{\mathcal{O}} \subset \overline{\mathcal{U}_n} \Rightarrow \overline{\mathcal{U}_n} = E.$$

En appliquant le théorème de Baire, on obtient que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ est aussi dense dans E, donc $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n) \cap A \neq \emptyset$ car A est un ouvert non-vide de E. D'autre part on a :
$A \subset \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O}_n \cap A = \mathcal{U}_n \cap A$ pour tout n. Alors on trouve que $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n) \cap A \neq \emptyset$. Ceci montre que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ est dense dans E. Par la suite, le théorème de Baire est aussi vrai pour $\mathcal{O}$.

Exercise 2.2 *Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite d'ouverts denses dans $(\mathbb{R}, |.|)$. Montrer que $U := \bigcap_{n\geq 0} U_n$ n'est pas un ensemble dénombrable.*

Solution : Supposons que U est dénombrable infini (le cas où U est fini se traite de la meme manière). Il existe alors une application bijective φ de $\mathbb{N}$ dans U..
Posons : $V_n = U_n - \{\varphi(n)\}$. Il est clair que V_n est encore un ouvert et dense dans $\mathbb{R}$. Le théorème de Baire nous assure que $\bigcap_{n\geq 0} V_n$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$. Mais d'autre part on a :
$\bigcap_{n\geq 0} V_n = \bigcap_{n\geq 0} (U_n - \{\varphi(n)\}) = \bigcap_{n\geq 0} U_n - \bigcup_{n\geq 0} \{\varphi(n)\} = U - U = \emptyset$. Contradiction.

Exercise 2.3 *Soit $E = C([0,1])$ l'espace des fonctions continues sur [0, 1], à valeurs dans $\mathbb{R}$. Considérons les deux espaces normés $X = (E, \|.\|_\infty)$ et $Y = (E, \|.\|_1)$ où :*

$$\|f\|_\infty = \sup |f(t)|\, , \, t \in [0,1], \qquad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

On note I l'application identité de X dans Y.

1. *Montrer que I est une application bijective et continue. Quelle est sa norme ?*
2. *Montrer que l'application I^{-1} n'est pas continue.*

   (indication : utiliser la suite $f_n(t) = t^n$).
3. *Sachant que X est un espace de Banach, déduire que l'espace normé Y n'est pas de Banach.*

Solution.

1. C'est évident que I est linéaire et bijective. De plus I est continue et $\|I\| \leq 1$, en effet :

$$\|I(f)\|_1 = \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \leq \int_0^1 \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|\, dt = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| = \|f\|_\infty .$$

Prenons maintenant f_0 définie par $f_0(t) = 1$ on obtient $\|I(f_0)\|_1 = \|f_0\|_1 = \|f_0\|_\infty = 1$. Ceci montre que $\|I\| = 1$.

2. Comme I est bijective son inverse $I^{-1} : Y = (E, \|.\|_1) \to X = (E, \|.\|_\infty)$ est bien défini. Supposons que I^{-1} est continue. Donc il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall f \in E,\ \ \|f\|_\infty = \|I^{-1}(f)\|_\infty \leq C\,\|f\|_1 .$$

Considérons la suite de fonctions de E définie par $f_n(t) = t^n$. On a :

$\|f_n\|_\infty = 1 \leq C\,\|f\|_1 = C\frac{1}{n+1}\ \ \Rightarrow C \geq n+1,\ \ \forall n \in \mathbb{N},$

ce qui est impossible. On déduit de cette contradiction que I^{-1} n'est pas continue.

3. Comme X est un espace de Banach, si Y était de Banach aussi on pourrait appliquer le théorème d'isomorphisme de Banach. Par la suite, Y n'est pas complet i.e. n'est pas de Banach.

Exercise 2.4 *Soit* $E = C([0,1])$ *l'espace des fonctions continues sur* $[0,1]$*, à valeurs réelles et* $\|.\|$ *une norme sur* E*, tels que* $(E, \|.\|)$ *soit un espace de Banach. On pose l'hypothèse suivante :*

"Si $f_n,\ f \in E$*, tels que* $\|f_n - f\| \to 0$*, alors* $f_n(t) \to f(t)$ *pour tout* $t \in [0,1]$*."*

Montrer que les deux normes $\|.\|$ *et* $\|.\|_\infty$ *sont équivalentes.*

Solution. Considérons l'application identité $I : E_1 = (E, \|.\|_\infty) \to E_2 = (E, \|.\|)$. Il est clair que I est linéaire et bijective. On va appliquer le théorème du graph fermé pour montrer que I est continue. Considérons maintenant $(f_n, I(f_n))$ une suite du graphe de I convergente vers (f, g) dans $E_1 \times E_2$. Alors :

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \text{ et } \|I(f_n) - g\| = \|f_n - g\| \to 0.$$

En utilisant la définition de $\|.\|_\infty$, on déduit de la première convergence que $f_n(t) \to f(t),\ \ \forall t \in [0,1]$. En utilisant l'hypothèse donnée dans l'énoncé, on obtient de la seconde convergence que $f_n(t) \to g(t),\ \ \forall t \in [0,1]$. L'unicité de la limite donne : $f(t) = g(t)$,

$\forall t \in [0,1]$, c'est-à-dire $f = g = I(f)$, ce qui prouve que le graph de I est fermé. En appliquant le théorème du graph fermé, comme E_1 et E_2 sont des Banach, on déduit que I est continue. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour toute $f \in E$ on a : $\|f\| = \|I(f)\| \leq \alpha \|f\|_\infty$.
D'autre part, comme I est bijective, le théorème d'isomorphisme de Banach assure que I^{-1} est continue. Donc il existe $\beta > 0$ tel que pour toute $f \in E$ on a :

$$\|f\|_\infty = \|I^{-1}(f)\|_\infty \leq \beta \|f\|.$$

Par conséquence, les deux normes sont équivalentes.

Exercise 2.5 *Soit E et F des espaces de Banach et T une application linéaire de E vers F. Supposons que pour toute forme linéaire $l \in F'$, la forme linéaire $l \circ T : E \to \mathbb{R}$ est continue. Démontrer que T est aussi continue.*

Solution. Grâce au théorème du graphe fermé, il suffit de montrer que le graphe de T est fermé. Commençons par vérifier que le graphe de T :

$$G(T) = \{(x, T(x)), \quad x \in E\}$$

est égale à l'ensemble H défini par :

$$H = \{(x,y) \in E \times F, \quad \forall l \in F' : l(y) = l \circ T(x)\}.$$

Comme $T(x) = y$ implique que $l \circ T(x) = l(y)$, on obtient que $(x, T(x)) \in H$. Donc $G(T) \subset H$.
D'autre part, soit $x \in E$, $y \in F$ tel que $y \neq T(x)$ (i.e. $(x,y) \notin G(T)$). D'après le corollaire 2.5.1 on sait qu'il existe $l \in F'$ tel que $l(y - T(x)) \neq 0$, c'est-à-dire $l(y) \neq l \circ T(x)$ et par la suite $(x,y) \notin H$. Donc $H \subset G(T)$ d'où l'égalité $G(T) = H$.
Comme $l \circ T$ est continue, on a pour tout $l \in F'$, l'application $(x,y) \to l(y) - l \circ T(x)$ est continue donc son noyau est fermé dans $E \times F$. En conséquence H, qui est l'intersection de ces noyaux, est fermé, i.e. $G(T)$ est fermé. On conclut alors que T est continue.

Exercise 2.6 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est dense si et seulement :*

$$\forall f \in E' \text{ tel que } f(x) = 0, \forall x \in F \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in E.$$

Solution. L'implication directe est claire, car si une application continue f s'annule sur une partie dense de E est forcément nulle, en effet :

$\forall x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans F telle que $x_n \to x$. Si f s'annule sur F, alors on obtient : $\quad 0 = f(x_n) \to f(x)$ i.e. $f(x) = 0$.

Montrons la réciproque par contraposition. Supposons que F est un s.e.v. non dense de E. Alors le corollaire 2.5.4 assure l'existence d'une forme linéaire continue **non nulle** f telle que $F \subset \ker f$ d'où le résultat.

Exercise 2.7 *Soit E un e.v.n. et $x_0 \in E$. Alors il existe $f \in E'$ telle que $\|f\|_{E'} = \|x_0\|_E$ et $f(x_0) = \|x_0\|_E^2$.*

Solution. Le résultat est trivial si $x_0 = 0_E$. Quand $x_0 \neq 0_E$. Posons $F = \mathbb{R}x_0$ et définissons sur F l'application $L(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|_E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Le théorème de prolongement de Hahn-Banach assure l'existence de $f \in E'$ tel que $f_{|F} = L$ donc $f(x_0) = \|x_0\|_E^2$ et $\|f\|_{E'} = \|L\|_{F'}$.

Mais $\|L\|_{F'} = \|x_0\|_E$ car :

$$\|L\|_{F'} = \sup_{y\in F, y\neq 0_E} \frac{|L(y)|}{\|y\|_F} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq 0} \frac{|L(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|_E} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq 0} \frac{|\lambda|\|x_0\|_E^2}{|\lambda|\|x_0\|_E} = \|x_0\|_E .$$

Donc $\|f\|_{E'} = \|x_0\|_E$.

Exercise 2.8 *Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Solution. Supposons que $\mathbb{R}$ est dénombrable. Alors $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$ est une réunion dénombrable des fermés d'interieur vide pour la topologie usuelle associée à la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$. Comme $(\mathbb{R}, d)$ est complet, on déduit en appliquant le théorème de Baire que $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}}} = \overset{\circ}{\mathbb{R}} = \emptyset$. Contradiction avec le fait que $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Chapitre 3

La Topologie Faible et la Topologie Faible Etoile

Dans ce chapitre E désigne un $\mathbb{R}$-espace de Banach. Il est muni de la topologie engendrée par les boules ouvertes que l'on appellera la **topologie forte**. On note par E' le dual topologique de E *i.e.* l'espace des formes linéaires continues sur E.

3.1 La topologie faible

On définera la topologie faible **comme étant** la topologie la moins fine, *i.e.* celle avec le moins d'ouverts, rendant continues tous les éléments de E'. Autrement dit, la topologie faible sur E est la topologie la moins fine telle que toute forme linéaire continue, au sens de la norme, reste continue.

L'avantage de la topologie faible est qu'elle contient plus de compacts que la topologie forte dans le cas des espaces de dimension infinie.

Définition 3.1.1 *La topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$, est la topologie la moins fine pour laquelle toutes les formes linéaires continues $f \in E'$ restent continues.*

La topologie faible est construite de la manière suivante : en effet, celle ci doit au minimum contenir tous les ensembles de la forme $f^{-1}(U)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in E'$. Si on choisit comme ouverts toutes les réunions quelconques d'intersections finies de tels ensembles, on construit une topologie. De plus cette topologie a le moins d'ouverts parmis les topologies ayant les ensembles $f^{-1}(U)$ comme ouverts.

Proposition 3.1.1 *Une base de voisinages pour la topologie faible de $x_0 \in E$ est donnée par les ensembles de la forme :*

$$V = \{x \in E; \ \ |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \ \ \forall i = 1, \cdots, n\},$$

avec $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ et $f_1, \cdots, f_n \in E'$ arbitraires.

Proposition 3.1.2 *La topologie faible est séparée.*

Preuve. Soit $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$. On veut construire V_1 et V_2 ouverts pour la topologie faible tels que : $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. D'après le théorème de Hahn-Banach (deuxième forme géométrique) ou directement d'après le corollaire 2.5.3 il existe $f \in E'$ telle que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Posons :

$$\varepsilon = \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{4}, \ V_1 = f^{-1}(]f(x_1) - \varepsilon, \ f(x_1) + \varepsilon[) \ \text{ et } V_2 = f^{-1}(]f(x_2) - \varepsilon, \ f(x_2) + \varepsilon[).$$

C'est-à-dire : $V_1 = \{x \in E; \ \ |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon, \}$ et $V_2 = \{x \in E; \ \ |f(x) - f(x_2)| < \varepsilon, \}$. On constate que V_1 et V_2 sont des ouverts pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ et de plus $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ■

L'espace E peut être muni de deux topologies séparées différentes :

1. La topologie forte associée à la norme de E.
2. La topologie "faible" notée $\sigma(E, E')$.

On rappelle que par construction, la topologie faible est moins fine que la topologie forte : tout ouvert (resp. fermé) pour la topologie faible est un ouvert (resp. fermé) pour la topologie forte.

Proposition 3.1.3 *En dimension finie, les deux topologies coïncident.*

Preuve. Suposons que E est de dimension finie. Comme tout ouvert de la topologie faible est un ouvert pour la topologie forte, il suffit de vérifier qu'un ouvert pour la topologie forte est aussi un ouvert dans $\sigma(E, E')$.
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E pour la topologie forte et $x_0 \in \mathcal{U}$. On cherche à construire un voisinage de x_0 pour la topologie faible inclus dans $\mathcal{U}$. Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de E et soient les formes linéaires (continues) définies par :

$$\begin{array}{lcl} \varphi_j : & E & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n & \mapsto x_j \end{array}.$$

Comme toute les normes sont équivalentes sur E, on munit E par la norme :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |x_j| = \max_{1 \le j \le n} |\varphi_j(x)|.$$

Fixons r_0 tel que la boule ouverte $B(x_0, r_0)$ au sens de $\|\cdot\|_\infty$ soit contenue dans $\mathcal{U}$. On a :

$$\begin{aligned} B(x_0, r_0) &= \{x \in E, \ \ \|x - x_0\|_\infty < r_0\} \\ &= \left\{x \in E, \ \max_{1 \le j \le n} \left|x_j - x_{0_j}\right| < r_0\right\} \\ &= \left\{x \in E, \ \max_{1 \le j \le n} |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < r_0\right\} \\ &= \{x \in E, \ \ |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| < r_0, \ \ i = 1, \cdots n\}. \end{aligned}$$

Alors $B(x_0, r_0)$ est bien un voisinage de x_0 pour la topologie faible inclus dans $\mathcal{U}$. On conclut alors que $\mathcal{U}$ est un ouvert pour la topologie faible. ■

On note que dans le cas de dimension infinie, la topologie faible est strictement plus faible que la topologie forte : il existe des ouverts (resp. des fermés) pour la topologie forte qui ne sont pas ouverts (resp. fermés) pour la topologie faible.

Proposition 3.1.4 *En dimension infinie, la boule unité ouverte $B(0,1)$ est d'intérieur vide pour la topologie faible.*

Preuve. Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Supposons par l'absurde que l'intérieur de $B(0,1)$ pour la topologie faible n'est pas vide. Donc il existe $x_0 \in B(0,1)$ et $V \in \sigma(E,E')$ tels que : $x_0 \in V \subset B(0,1)$. On peut prendre V de la forme suivante :

$V = \{x \in E \; ; \; |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n\}$, où $f_i \in E'$ pour $i = 1, \cdots, n$.

Considérons maintenant l'application : .

$$\psi : \begin{array}{c} E \to \mathbb{R}^n \\ x \mapsto (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \end{array},$$

qui est linéaire et non injective puisque E est de dimension infinie. Donc il existe $y_0 \in E \backslash \{0_E\}$ tel $\psi(y_0) = 0$. Par linéarité on déduit que $|f_i(x_0 + \lambda y_0) - f_i(x_0)| = 0 < \varepsilon$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc $x_0 + \lambda y_0 \in V$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Contradiction avec le fait que V est borné, car $V \subset B(0,1)$. Alors $B(0,1)$ est d'intérieur vide pour la topologie faible. ■

Cette proposition affirme que $B(0,1)$ n'est pas ouverte pour la topologie faible. Ce qui veut dire que la topologie forte contient plus d'ouverts que la topologie faible. De plus, par passage au complémentaire, on déduit qu'en dimension infinie la topologie forte contient aussi plus de fermés que la topologie faible.

Le résultat suivant annonce que les ensembles convexes qui sont fermés fortement restent fermés faiblement.

Proposition 3.1.5 *Soit C un ensemble convexe de E. Alors C est fermé pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ si et seulement si il est fermé pour la topologie forte.*

Preuve. L'implication directe est triviale. Montrons l'implication réciproque. Supposons que C est un convexe fortement fermé et montrons que $E \backslash C$ est ouvert faiblement. Supposons que $C \neq E$, sinon le résultat est trivial. Soit $x_0 \in E \backslash C$. Comme C est un convexe fermé et $\{x_0\}$ est un convexe compact, le théorème de Hahn-Banach (deuxième forme géométrique) assure l'existence de $f \in E'$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in C, \quad f(x) < \alpha < f(x_0).$$

L'ensemble $f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in E, \ f(x) > \alpha\}$ est un ouvert pour $\sigma(E, E')$ qui contient x_0 et il est contenu dans $E \backslash C$. Donc on déduit que $E \backslash C$ est un ouvert pour la topologie faible. ■

Proposition 3.1.6 *Soit E un Banach et M un sous-espace vectoriel fermé de E pour la topologie forte. La topologie faible $\sigma(M, M')$ coïncide avec la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M.*

Preuve. voir exercice 3.1. ■

On s'intéresse maintenant aux propriétés des suites convergentes au sens de la topologie faible. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $x \in E$, on introduit les notations suivantes :

1. $x_n \to x$ désigne la convergence de x_n vers x pour la topologie forte : $\|x_n - x\|_E \to 0$.
2. $x_n \rightharpoonup x$ désigne la convergence de x_n vers x pour la topologie faible.

En utilisant la définition des voisinages faibles on obtient le résultat suivant :

Proposition 3.1.7 *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Alors la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si et seulement si $f(x_n) \to f(x)$, $\forall f \in E'$.*

Preuve. Par construction de la topologie faible, $f \in E'$ signifie que f est continue pour la topologie faible.

L'implication directe découle de la continuité de f, il est clair que si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement alors $f(x_n) \rightharpoonup f(x)$ qui est équivalent à $f(x_n) \to f(x)$ car $\mathbb{R}$ est de dimension finie.

Pour montrer la réciproque supposons que pour tout $f \in E'$, $f(x_n) \to f(x)$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N_f tel que pour tout $n > N_f$: $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$.

Soit $\mathcal{U}$ un voisinage de x dans la topologie faible. Donc il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, f_2, ..., f_m$ tels que $V = \{y \in E \ ; |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, m\}$ et $V \subset \mathcal{U}$ et $x \in V$.

Mais comme pour tout $f \in E'$, $f(x_n) \to f(x)$ forcément il existe un $N = \max N_{f_i}, i = 1, \cdots, m$ tel que pour tout $n > N$, $x_n \in V \subset \mathcal{U}$. Donc pour tout voisinage de x dans $\sigma(E, E')$ il existe un N tel que pour tout $n > N$, x_n est dans ce vosinage. Donc $x_n \rightharpoonup x$. ■

Proposition 3.1.8 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On a :*

1. *Si $x_n \to x$ fortement alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.*
2. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ alors $\|x_n\|_E$ est bornée et $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \to f$ alors $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Preuve.

1. Si $x_n \to x$ fortement alors $f(x_n) \to f(x)$ pour toute application f continue. En particulier $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in E'$. Par la suite $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ d'après proposition 3.1.7.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application :
$$\begin{aligned} T_n : \quad & E' \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto f(x_n) \end{aligned}.$$
Il est clair que toutes les applications T_n sont linéaires, de plus elles sont continues, en effet : $$|T_n(f)| = |f(x_n)| \leq \|f\|_{E'} \|x_n\|_E .$$
Le théorème de Banach-Steinhaus assure que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :
$$\exists C > 0, \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall f \in E', \ |T_n(f)| = |f(x_n)| \leq C \|f\|_{E'} .$$
D'après le corollaire 2.5.2 du théorème de Hahn-Banach, on a :
$$\|x_n\|_E = \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} |f(x_n)| .$$
Ceci permet de conclure que :
$$\forall n \in \mathbb{N} : \|x_n\|_E \leq C.$$
Passons à la limite dans l'inégalité $|f(x_n)| \leq \|f\|_{E'} \|x_n\|_E$ on obtient :

$$|f(x)| \leq \|f\|_{E'} \liminf \|x_n\|_E .$$

En appliquant encore une fois le corrolaire 2.5.2, on trouve :

$$\|x\|_E = \sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |f(x)| \leq \liminf \|x_n\|_E .$$

3. On écrit $f_n(x_n) - f(x)$ sous la forme suivante :

$$f_n(x_n) - f(x) = (f_n(x_n) - f(x_n)) + (f(x_n) - f(x)).$$

Comme $x_n \rightharpoonup x$ faiblement on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} (f(x_n) - f(x)) = 0$. De plus :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \|x_n\|_E \|f_n - f\|_{E'} .$$

La propriété **2.** donne que $\|x_n\|_E$ est bornée puisque $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement, on déduit alors que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$ car $f_n \to f$. Donc on obtient que :

$$\lim_{n \to +\infty} (f_n(x_n) - f(x)) = 0.$$

■

Remarque 3.1.1 *Lorsque E est de dimension finie on a : $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si $x_n \to x$ i.e la convergence faible est équivalente à la convergence forte.*

Proposition 3.1.9 *Soit E et F deux Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue de E vers F pour la topologie forte (des deux espaces) si et seulement si T est continue de $(E, \sigma(E, E'))$ dans $(F, \sigma(F, F'))$ (pour la topologie faible des deux espaces).*

Preuve. Commençons par montrer l'implication directe. Suposons que T est continue de E vers F pour la topologie forte. Soit Ω un ouvert de $(F, \sigma(F, F'))$ pour la topologie faible. On veut montrer que $T^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $(E, \sigma(E, E'))$ pour la topologie faible. Supposons que Ω est de la forme : $\Omega = \bigcap\limits_{i \in I} \varphi_i^{-1}(\theta_i)$ où I est fini, $\varphi_i \in F'$ et θ_i est ouvert de $\mathbb{R}$. Alors :

$$T^{-1}(\Omega) = \bigcap_{i \in I} T^{-1} \varphi_i^{-1}(\theta_i) = \bigcap_{i \in I} (\varphi_i \circ T)^{-1}(\theta_i).$$

Mais $\varphi_i \circ T : E \to \mathbb{R}$ est linéaire et continue donc $\varphi_i \circ T \in E'$ et par la suite $T^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $(E, \sigma(E, E'))$ (pour la topologie faible). Donc T est continue pour la topologie faible.

Afin de montrer l'implication réciproque on va utiliser le théorème du graphe fermé. En effet il suffit de montrer que le graphe de T est fermé pour la topologie forte. Soit $(x_n, T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers $(x, y) \in E\times F$. En particulier $x_n \to x$ fortement alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement. Comme T est continue pour la topologie faible on a $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$. Mais $T(x_n) \to y$, par la suite $T(x_n) \rightharpoonup y$. Comme la topologie faible est séparée, on déduit que la limite est unique donc $y = T(x)$. Par la suite le graphe de T est fermé d'où la continuite de T pour la topologie forte. ∎

3.2 La topologie faible étoile

Soit E un Banach. L'espace dual de E noté E' est aussi un Banach. On note E'' l'ensemble des formes linéaires continues sur E', qui est encore un espace de Banach. On l'appelle le **bidual de** E. On peut munir E' de deux topologies séparées :

i) la topologie forte associée à la norme de E',

ii) la topologie faible sur E', notée $\sigma(E', E'')$.

Comme on a vu dans la section précédente, que la deuxième topologie est en général moins fine que la première mais elle contient plus de compacts et de suites convergentes. On cherche à munir E' d'une troixième topologie séparée de telle façon que la boule unité fermée $B_{E'}(0,1)$ devienne compacte même si E est de dimension infinie.

Définissons l'application suivante : à tout $x \in E$ on associe une forme ξ_x linéaire sur E' en posant :

$$\xi_x : \begin{array}{l} E' \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(x) \end{array}.$$

On a :

$$\forall (x, f) \in E \times E' : \ |\xi_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x\|_E .$$

Donc ξ_x est une forme linéaire continue sur E' avec $\|\xi_x\|_{E''} \leq \|x\|_E$. D'après le corollaire 2.5.2, qui est une conséquences du théorème de Hahn-Banach, on a :

$$\|x\|_E = \sup_{L \in E', \|L\|_{E'} = 1} |L(x)| ,$$

ceci permet de déduire que $\|\xi_x\|_{E''} = \|x\|_E$.

On note J l'application définie par :

$$\begin{aligned} J : \ & E \to E'' \\ & x \mapsto \xi_x \end{aligned} .$$

Il est clair que l'application J est linéaire. De plus J est une isométrie (J conserve la norme) *i.e.* $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$ car $\|J(x)\|_{E''} = \|\xi_x\|_{E''} = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Donc J est continue , *i.e.* $J \in \mathcal{L}(E, E'')$ et elle est bien injective, comme elle conserve la norme. Par contre, si E est de dimension infinie, J n'est pas nécessairement surjective. En général, $J(E)$ est un sous espace strict de E''. A l'aide de l'injection canonique J on peut identifier E à $J(E) \subset E''$.

Définition 3.2.1 *On appelle topologie faible étoile sur E', la topologie la moins fine pour la quelle toutes les applications ξ_x restent continues. La topologie faible * se note $*\sigma(E', E)$(ou tout simplement $\sigma(E', E)$).*

Notons que chaque ξ_x est continue comme forme linéaire sur E' (pour la topologie forte) par la suite $\xi_x \in E''$. Ainsi ξ_x est continue pour la topologie faible $\sigma(E', E'')$ et par définition de la topologie faible *, on déduit que la topologie faible * est moins forte que la topologie faible qui elle même est moins forte que la topologie forte. La raison d'appauvrir ainsi les topologies est : plus une topologie est faible, moins elle contient d'ouverts et plus elle possède de compacts.

Remarque 3.2.1 *Etant donné E un espace de Banach, E' peut être muni de trois topologies différentes (classées de la plus fine à la moins fine) :*

1. *la topologie forte associe à la norme de E',*
2. *la topologie faible sur E', notée $\sigma(E',E'')$,*
3. *la topologie faible * sur E', notée $*\sigma(E',E)$.*

Les ouverts de $*\sigma(E',E)$ sont du type : $\underset{quelconque}{\cup} \ \underset{finie}{\cap} \xi_{x_i}^{-1}(W_i)$ où les W_i sont des ouverts de $\mathbb{R}$ et les x_i des éléments de E. Ceci nous permet de déduire le résultat suivant sur les bases de vosinages pour la topologie faible étoile.

Proposition 3.2.1 *Soit f_0 un élément de E'. Tout voisinage de f_0 pour la topologie faible étoile contient un ouvert de la forme :*

$$V_{f_0} = \{f \in E', \ \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n\}$$

avec $\varepsilon > 0$ et $x_i \in E$.

Remarque 3.2.2 *Dans le cas où E est de dimension finie les trois topologies (forte, faible $\sigma(E',E'')$, et faible étoile $*\sigma(E',E)$) coincident, en effet $dimE = dimE' = \dim E''$ et par la suite $\sigma(E',E'') = *\sigma(E',E)$.*

Proposition 3.2.2 *La topologie faible étoile $*\sigma(E',E)$ est séparéé.*

Preuve. Soient f_1 et f_2 deux éléments de E' distincts. Il existe alors $x \in E$ tel que : $f_1(x) \neq f_2(x)$. Soit $\varepsilon = \frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{4}$. Posons :

$$\mathcal{O}_i = \{f \in E', \quad |f(x) - f_i(x)| < \varepsilon\} = \xi_x^{-1}\left(]f_i(x) - \varepsilon, \ f_i(x) + \varepsilon[\right) \qquad i = 1, 2.$$

Il est clair que $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux ouverts de E' pour la topologie faible étoile qui vérifient :

$$f_1 \in \mathcal{O}_1, \ f_2 \in \mathcal{O}_2 \text{ et } \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset.$$

Donc la topologie faible * est bien séparée. ■

Notation : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléménts de E' et $f \in E$. On note :

– convergence forte (en norme) : $f_n \to f$,

– convergence faible : $f_n \rightharpoonup f$,

– convergence faible * : $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ ou $f_n \rightharpoonup f$ faible *.

Proposition 3.2.3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E'. On a les propriétés suivantes :*

1. *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E', E)$ si et seulement si $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in E$.*
2. *Si $f_n \to f$ fortement alors $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E', E'')$ et si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E', E)$.*
3. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E', E)$ alors $\|f_n\|$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.*
4. *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E', E)$ et si $x_n \to x$ fortement alors $f_n(x_n) \to f(x)$ fortement.*

Preuve. La preuve se fait d'une manière analogue avec quelque différences à celle de la proposition 3.1.8. ■

Remarque 3.2.3 *Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pour $*\sigma(E', E)$ (ou même si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement pour $\sigma(E', E''))$ et si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ on peut pas déduire que $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Proposition 3.2.4 *Soit $\varphi : E' \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue pour la topologie $*\sigma(E', E)$. Alors, il existe $x \in E$ tel que : $\varphi(f) = f(x)$, $\forall f \in E'$.*

Théorème 3.2.1 *Soit H un hyperplan de E' fermé pour le topologie faible étoilé $*\sigma(E', E)$. Alors il existe $x \in E\backslash\{0_E\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que H est de la forme :*
$H = \{f \in E'; \quad f(x) = \alpha\}$.

Le théorème fondamental suivant annonce que la topologie faible étoile rend compact la boule unité fermée.

Théorème 3.2.2 ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)*** *La boule unité fermée de E' :*

$$B_{E'} = \{f \in E', \quad \|f\| \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie faible étoile $*\sigma(E', E)$.

Remarque 3.2.4 *L'importance de ce théorème et de la topologie faible étoile vient du fait que la boule unité fermée d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compact pour la topologie forte.*

3.3 Exercices

Exercise 3.1 *Soit E un Banach et M un sous-espace vectoriel fermé de E pour la topologie forte. Montrer que la topologie faible $\sigma(M, M')$ coïncide avec la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M.*

Solution. Le sous-espace vectoriel M est un fermé d'un Banach, donc M est un Banach aussi. Alors M peut être muni de la topologie faible $\sigma(M, M')$. Soit U un ouvert de la topologie $\sigma(M, M')$. On peut toujours supposer que U est de la forme :

$$U = \{x \in M, \quad |f_i(x - x_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n\} \tag{3.1}$$

avec x_0 un élément de M, $\varepsilon > 0$, $f_i \in M'$ pour $i = 1, \cdots, n$. Le théorème de Hahn-Banach permet de prolonger les f_i en formes linéaires $\widetilde{f_i}$ continues sur E. Donc on obtient $U = M \cap V$ avec :

$$V = \left\{x \in E, \quad \left|\widetilde{f_i}(x - x_0)\right| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n\right\}.$$

Mais V est un ouvert de $\sigma(E, E')$, alors U est un ouvert pour la topologie induite par $\sigma(E, E')$ sur M.

Réciproquement, si V est un ouvert de $\sigma(E, E')$ qui contient x_0 un élément de M, on peut toujours supposer qu'il est de la forme :

$$V = \left\{x \in E, \quad \left|\widetilde{f_i}(x - x_0)\right| < \varepsilon, \quad i = 1, \cdots, n\right\}$$

avec , $\varepsilon > 0$, $\widetilde{f_i} \in E'$ pour $i = 1, \cdots, n$. Posons f_i la restriction de $\widetilde{f_i}$ à M. On a bien $f_i \in M'$ et $V \cap M$ est donné par (3.1) donc $V \cap M$ est un ouvert de $\sigma(M, M')$.

Exercise 3.2 *Soit E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue de E muni de la topologie faible dans F muni de la topologie forte. Montrer qu'il existe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in X'$ tels que :* $\underset{1\le j\le n}{\cap} \ker\varphi_j \subset \ker T$.

Solution. Comme la boule unité fermée B_Y de Y est un voisinage de 0_Y, son image réciproque par T est un voisinage de 0_X dans X pour la topologie faible (car $T(0_X) = 0_Y$). Alors il existe un $\varepsilon > 0$ et des formes linéaires continues $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n \in X'$ tels que $V_{\varepsilon,}\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n(0_X) \subset T^{-1}(B_y)$. Notons que :

$$V_{\varepsilon,}\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n(0_X) = \{x \in X;\ \ |\varphi_j(x)| \le \varepsilon, \quad 1 \le j \le n\}.$$

Puisque $\underset{1\le j\le n}{\cap} Ker\varphi_j \subset V_{\varepsilon,}\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n(0_X)$ on obtient que $\underset{1\le j\le n}{\cap} Ker\varphi_j \subset T^{-1}(B_y)$. Mais comme $\underset{1\le j\le n}{\cap} Ker\varphi_j$ est un sous espace vectoriel de X, si $x \in \underset{1\le j\le n}{\cap} Ker\varphi_j$ on a nécessairement $tx \in \underset{1\le j\le n}{\cap} Ker\varphi_j$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$|t|\,\|Tx\| = \|T(tx)\| \le 1,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cela n'est possible que si $Tx = 0_Y$. Par conséquent $\underset{1\le j\le n}{\cap} Ker\varphi_j \subset \ker T$.

Exercise 3.3 *Sans utiliser le fait que la topologie faible est séparée, montrer que la limite faible d'une suite, si elle existe, est unique.*

Solution. Soit $(x_n)_n$ une suite de E. Supposons que $x_n \rightharpoonup x$ et $x_n \rightharpoonup y$ avec $x \ne y$.

Ceci est équivalent à $f(x_n) \to f(x)$ et $f(x_n) \to f(y)$ pour tout $f \in E'$. Mais $(f(x_n))_n$ est une suite réelle qui converge dans $\mathbb{R}$. Donc la limite est unique, c'est-à-dire $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in E'$. D'autre part le corollaire 2.5.3 assure l'existence d'un $f_0 \in E'$ tel que $f_0(x) \ne f_0(y)$ car $x \ne y$. Contradiction.

Exercise 3.4 *Montrer que si E est de dimension finie. Alors la convergence faible d'une suite est équivalente à la convergence forte (sans prendre en cosidération que la topologie faible et forte coïncident dans le cas de dimension finie).*

Solution. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. Supposons que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E et que $\dim E = k$. Soit $\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}$ une base quelconque de E. Alors $\exists\alpha_i^{(n)} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, k$ et $\exists\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, k$ tels que :

$$x_n = \alpha_1^{(n)} e_1 + \alpha_2^{(n)} e_2 + \cdots + \alpha_k^{(n)} e_k \quad \text{et} \quad x_n = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k.$$

Comme $f(x_n) \to f(x)$ pour tout $f \in E'$. On peut prendre en particuliers $f_1, f_2, \cdots, f_k$ définis par : $f_i(e_i) = 1$ et $f_i(e_m) = 0$ si $m \neq i$. Alors : $f_i(x_n) = \alpha_i^{(n)}$ et $f_i(x) = \alpha_i$. Le fait que $f_i(x_n) \to f_i(x)$ implique que $\alpha_i^{(n)} \to \alpha_i$ dans $\mathbb{R}$. Par la suite :

$$\|x_n - x\| = \left\| \sum_{i=1}^{k} \left(\alpha_i^{(n)} - \alpha_i \right) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{k} \left| \alpha_i^{(n)} - \alpha_i \right| \|e_i\| .$$

Passons à la limite on obtient que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$, ce qui veut dire que la suite $(x_n)_n$ converge fortement.