Cours de Topologie et Analyse Fonctionnelle

Master 1 en **Mathématiques**

Présenté par Leila Slimane

Table des matières

Chapitre 1

Rappels de Topologie Générale

Dans ce chapitre nous présentons les notions de base de topologie générale, déjà vues en Licence, que nous aurons besoin tout au long de ce cours. Nous rappelons les notions d'espace topologique, de topologie produit, de continuité, de convergence, de compacité et d'espace de Banach. Notons que l'objectif de la topologie générale est de généraliser les notions de limite, convergence, continuité et d'autres notions présentées dans l'espace $\mathbb{R}$ à un espace plus général X muni d'une certaine structure.

1.1 Espace topologique

Définition 1.1.1 *Soit X un ensemble. On appelle topologie sur X la donnée d'un ensemble Θ des parties de X vérifiant les conditions suivantes :*

1. *Θ contient X et $\emptyset$;*

2. *toute union (finie ou non) d'éléments de Θ est encore dans Θ :*

$$\forall (U_i)_{i\in I} \text{ une famille (finie ou infinie) d'éléments de } \Theta \text{ alors } \underset{i\in I}{\cup} U_i \in \Theta;$$

3. *toute intersection finie d'éléments de* Θ *est encore dans* Θ *:*

$$\text{si } U_1, U_2, \cdots, U_n \in \Theta \text{ alors } \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \Theta.$$

Les éléments de Θ *sont appelés ouverts de* X *et le couple* (X, Θ) *est appelé espace topologique.*

Si (X, Θ) est un espace topologique, une partie A de X est dite un fermé de X ssi son complémentaire $C_X A$ est un ouvert. Comme :

$$X \backslash \underset{i\in I}{\cup} A_i = \underset{i\in I}{\cap} (X \backslash A_i) \text{ et } X \backslash \underset{i\in I}{\cap} A_i = \underset{i\in I}{\cup} (X \backslash A_i),$$

on déduit de la définition précédente les propriétés suivantes sur les fermés :

1. X et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des fermés ;
2. toute intersection (finie ou non) de fermés est un fermé ;
3. toute union finie de fermés est un fermé.

Exemples :

1. Soit X un ensemble. Alors $\{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X, appelée la topologie grossière, c'est la plus petite topologie possible que l'on peut obtenir de X.
2. Soit $\Theta = P(X)$, l'ensemble de tout les parties de X. Alors Θ est une topologie appelée la topologie discrète, c'est la plus grande topologie possible que l'on peut obtenir de X.
3. Soit $X = \{a, b, c\}$ et $\Theta = \{\emptyset,\ X,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\}\}$. On peut vérifier que Θ est une topologie. Par contre $\Theta_1 = \{\emptyset,\ X,\ \{a\},\ \{b\},\ \{b, c\}\}$ n'est pas une topologie car $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \Theta_1$.
4. Sur $\mathbb{R}$ l'ensemble des réunions quelconques d'intervalles ouverts $]a, b[$ est une topologie. Sauf mention contraire on munit toujours $\mathbb{R}$ de cette topologie.

Définition 1.1.2 *Soit* Θ_1*et* Θ_2 *deux topologies sur l'ensemble* X*. On dit que* Θ_1 *est plus* *fine (ou plus forte) que Θ_2 si $\Theta_2 \subset \Theta_1$. C'est-à-dire tout ouvert de Θ_2 est un ouvert de Θ_1.*

Ainsi la topologie discrète est la plus fine et la topologie grossière est la moins fine de toutes les topologies. La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ se situe entre les deux.

Définition 1.1.3 *Soit (X, Θ) un espace topologique.*

– *On dit que V est un voisinage de x si V contient un ouvert de Θ contenant x.*

– *On note par $V(x)$ l'ensemble de tout les voisinages de x :*

$$V(x) = \{V \in P(X);\ \exists O \in \Theta : x \in O \subset V\}.$$

– *On dit que $B(x)$ est une base de voisinage de $x \in X$ si :*

$$\forall V \in V(x),\ \exists W \in B(x) : W \subset V.$$

Proposition 1.1.1 *Une partie U de X est un ouvert si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.*

Exemple : La famille $]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}[$, $(r \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}^*)$ constitue une base pour la topologie usuelle.

Remarque 1.1.1 *Il n'y a pas en général unicité de base de voisinage pour une topologie.*

Définition 1.1.4 *Soit (X, Θ) un espace topologique.*

1. *L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de X est le plus petit fermé contenant A. On dit que A est dense dans X si $\overline{A} = X$.*
2. *Lintérieur $\overset{\circ}{A}$ d'une partie A de X est le plus grand ouvert contenu dans A.*
3. *On appelle frontière de A, que l'on note $Fr(A)$, l'ensemble $\overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$.*

On a les propriétés suivantes de l'adhérence et de l'intérieur :

Proposition 1.1.2 *Soit (X, Θ) un espace topologique et A et B deux parties de X.*

1. $\overline{A} = A \Leftrightarrow A$ est fermé.

2. $\overset{\circ}{A} = A \Leftrightarrow A$ est ouvert.

3. $A \subset \overline{A}, \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$

4. $C_X \overset{\circ}{A} = \overline{C_X A}, \qquad C_X \overline{A} = \overset{\circ}{C_X A}.$

5. $\overset{\circ}{A} \subset A, \quad \overset{\circ}{\overbrace{\overset{\circ}{A}}} = \overset{\circ}{A}, \quad \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$

6. $FrA = \overline{A} \cap \overline{C_X A}.$

Proposition 1.1.3 *Soit A une partie d'un espace topologique (X, Θ).*

- *Un point x de X est dans $\overline{A}$ si et seulement si l'intersetion de tout voisinage de x avec A est non vide.*
- *L'ensemble A est dense dans X si et seulement si A recontre tout ouvert non vide de X.*

Définition 1.1.5 *Un espace topologique est séparéé (ou de Hausdorff) si la propriété suivante est vérifiéé : $\forall x, y \in X$ avec $x \neq y$, $\exists V \in V(x)$, $\exists W \in V(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.*

Exemples :

1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle est un espace séparé.
2. Un ensemble muni de la topologie discrète est séparée car tout singleton est un voisinage du point qu'il contient.
3. Si l'ensemble X contient au moins deux éléments et il muni de la topologie grossière $\Theta = \{\emptyset, X\}$ alors X n'est pas séparé.

Définition 1.1.6 *Soient (X, Θ) un espace topologique et A un sous-ensemble de X. On appelle la topologie induite par Θ sur A, notée Θ_A, la topologie définie par :*

$$\Theta_A = \{O \cap A, \quad \forall O \in \Theta\}.$$

Sauf mention contraire les parties d'un espace (ou ensemble) topologique sont munies toujours de la topologie induite. De plus si A est un ouvert (resp. fermé) de X alors tout ouvert (rep. fermé) de A est un ouvert (resp. fermé) de X.

1.2 Continuité

Dans toute cette section (X, Θ) et (Y, Θ') désignent deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ une application.

Définition 1.2.1 *Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. On dit que $f(x)$ tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 (et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$) si : $\forall W \in V(y_0)$, $\exists V \in V(x_0)$ tel que $f(V) \subset W$.*

Grâce aux propriétés suivantes : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (qui sont vraies pour toute application $f : X \to Y$, tout $A \subset X$ et tout $B \subset Y$) on obtient la définition équivalente suivante :

Définition 1.2.2 *Soient $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. On dit que $f(x)$ tend vers y_0 lorsque x tend vers x_0 si : $\forall W \in V(y_0) : f^{-1}(W) \in V(x_0)$.*

On présente maintenant le concept de la continuité d'une application en un point.

Définition 1.2.3 *On dit que f est continue en $x_0 \in X$ si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ lorsque x tend vers x_0 c'est-à-dire : $\forall W \in V(f(x_0))$, $\exists V \in V(x_0)$ tel que $f(V) \subset W$;*
ce qui est équivalent à : $\forall W \in V(f(x_0) : \ f^{-1}(W) \in V(x_0)$.

Définition 1.2.4 *On dit que l'application $f : X \to Y$ est contine sur X si elle est continue en tout point de X.*

Théorème 1.2.1 ***(fondamental)*** *Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *l'application f est continue sur X ;*
2. *l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X : $\forall O \in \Theta'$; $f^{-1}(O) \in \Theta$;*

3. l'image réciproque de tout fermé de Y est un fermé de X.

Exemples :

1) L'application identité d'un espace topologique est continue.

2) L'application constante d'un espace vers un autre est continue.

Proposition 1.2.1 *Sur l'ensemble X la topologie Θ_1 est plus fine que la topologie Θ_2 si et seulement si l'application identité $Id : (X, \Theta_1) \to (X, \Theta_2)$ est continue.*

Théorème 1.2.2 ***(de composition)*** *Soit (X, Θ), (X, Θ') et (X, Θ'') trois espaces topologiques et x un point de X. Soient aussi $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications telles que f est continue en x et g est continue en $f(x)$. Alors l'application composée $g \circ f$ $: X \to Z$ est continue en x.*

1.3 Topologie produit

Soit $(X_i, \Theta_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques, avec I un ensemble quelconque et les X_i sont non vides. On définit le produit de cette famille par :

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} ,\ x_i \in X_i \right\} .$$

La notation $(x_i)_{i \in I}$ désigne donc une famille d'éléments, où x_i est un élément de X_i. Dans le cas d'une famille finie ou dénombrable $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ on peut noter les éléments du produit par $(x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n, \cdots)$ avec $x_i \in X_i$. Dans le cas où I est un ensemble quelconque on ne peut pas utiliser une telle représentation car elle n'a pas de sens.

Définition 1.3.1 *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Pour tout $j \in I$ on définit la projection canonique par :*

$$P_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j, \qquad P_j \left((x_i)_{i \in I} \right) \ = x_j.$$

Afin de définir la topologie produit on donne la notion suivante :

Définition 1.3.2 *On appelle les rectangles (ou ouverts) élémentaires de* $\prod\limits_{i\in I} X_i$ *les sous-ensembles définis par :* $\prod\limits_{i\in I} \mathcal{U}_i$ *avec* $\mathcal{U}_i$ *ouvert de* X_i *pour tout* $i \in I$*.*

La topologie produit sera définie comme suit :

Définition 1.3.3 *On appelle topologie produit sur* $\prod\limits_{i\in I} X_i$ *la plus petite topologie contenant tous les rectangles élémentaires* $\prod\limits_{i\in I} \mathcal{U}_i$ *avec* $\mathcal{U}_i$ *ouvert de* X_i*.*

On a le résultat suivant qui relie la topologie produit et les projections canoniques.

Définition 1.3.4 *La topologie produit est la topologie la moins fine sur* $\prod\limits_{i\in I} X_i$ *rendant continues toutes les projections canoniques.*

On donne maintenant une propriété importante de la topologie produit.

Proposition 1.3.1 *Si tous les espaces topologiques* $(X_i, \Theta_i)_{i\in I}$ *sont séparés alors* $\prod\limits_{i\in I} X_i$ *muni de la topologie produit est aussi séparé.*

1.4 Limite et valeurs d'adhérence d'une suite

Dans toute cette section (X, Θ) désigne un espace topologique.

Définition 1.4.1 *Soient* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléménts de* X *et* l *un point de* X*. On dit que la suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l *(et on écrit* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$*) si :*

$$\forall V \in V(l),\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \textit{tel que}\ \forall n \geq n_0 \ \textit{alors}\ x_n \in V.$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l *on dit que* l *est la limite de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Remarque 1.4.1 *Dans un espace topologique la limite d'une suite n'est pas nécessairement unique. Par exemple si* (X, Θ) *est la topologie grossière alors tout élément de* X *est la limite de toute suite d'éléménts de* X*.*

Proposition 1.4.1 *Dans un espace topologique séparé, la limite de toute suite (si elle existe) est unique.*

Proposition 1.4.2 *Soit F un fermé de (X, Θ) et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente d'éléménts de F. Alors la limite de cette suite est encore dans F. On dit que F est séquentiellement fermé.*

Nous donnons maintenant la notion de valeur d'adhérence d'une suite d'un espace topologique.

Définition 1.4.2 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléménts de X. On dit que a est valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :* $\forall V \in V(l),\ \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0$ *tel que* $x_n \in V$.

Remarque 1.4.2 *La limite d'une suite (si elle existe) est toujours une valeur d'adhérence pour cette suite mais la réciproque est (généralement) fausse.*

Exemple : Dans $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, possède -1 et 1 comme valeurs d'adhérence.

Proposition 1.4.3 *Soient (X, Θ) et (Y, Θ') deux espaces topologiques, $x \in X$ et $f : X \to X'$ continue en x. Alors pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X convergeant vers x, on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$ *(appelée continuié séquentielle).*

On note que la continuité séquentielle est plus faible que la continuité.

1.5 Compacité

Définition 1.5.1 *Soit (X, Θ) un espace topologique. On dit que (X, Θ) satisfait la propriété de Borel-Lebesgue si : " de tout recouvrement d'ouverts de X on peut extraire un sous recouvrement fini", ou bien :*

$\forall (\Omega_i)_{i\in I}$ *une famille d'ouverts telle que* $\bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i = X$, $\exists J \subset I$, *avec J fini, tel que* $\bigcup\limits_{i\in J} \Omega_i = X$.

Définition 1.5.2 *On dit que (X, Θ) est compact s'il est séparé et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. De plus, une partie A d'une topologie (X, Θ) est compacte si, munie de la topologie induite, c'est un espace topologique compact.*

Une proprtiété équivalente de celle de Borel-Lebesgue en utilisant les fermés est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.5.1 *Un espace topologique (X, Θ) séparé est compact si et seulement si de toute famille de fermés d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille d'intersection vide :*

$$\forall \left(F_i\right)_{i\in I} \text{ une famille de fermés telle que } \underset{i\in I}{\cap} F_i = \emptyset,\ \exists J \subset I \text{ avec } J \text{ fini tel que } \underset{i\in J}{\cap} F_i = \emptyset.$$

La proposition suivante nous donne une caractérisation de la compacité d'une partie d'un espace topologique séparé sans faire appel à la topologie induite.

Proposition 1.5.2 *Une partie A d'un espace topologique (X, Θ) séparé est compacte si et seulement si de toute famille d'ouverts $\forall \left(\Omega_i\right)_{i\in I}$ de X telle que : $A \subset \underset{i\in I}{\cup} \Omega_i$ on peut extraire un nombre fini d'ouverts tels que : $A \subset \underset{i\in J}{\cup} \Omega_i$ ($J \subset I$ avec J fini).*

Exemples :

1) Si (X, Θ) est un ensemble fini, muni de sa topologie discrète, alors (X, Θ) est compact.
2) L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle n'est pas compact. En effet, à partir du recouvrement $(]-n, n[)_{n\in\mathbb{N}}$ on ne peux pas extraire un sous recouvrement fini de $\mathbb{R}$ mais l'intervalle $[a,\, b]$ est bien compact.
3) Dans un espace séparé l'ensemble constitué d'une suite convergente et sa limite est compact.

Théorème 1.5.1 *Soit (X, Θ) un espace topologique séparé et A une partie de X.*

1. *Si A est compacte alors A est fermée.*

2. *Réciproquement si X est compact alors toute partie fermée est compacte.*

Théorème 1.5.2 ***(Heine, Borel-Lebesgue)*** *Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $[a, b]$, où $a, b \in \mathbb{R}$, est compact.*

Corollaire 1.5.1 *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Théorème 1.5.3 *Soit (X, Θ) et (Y, Θ') deux espaces topologiques séparés. L'image d'un compact par une application continue de X dans Y est compacte.*

Corollaire 1.5.2 *Toute fonction continue sur un espace compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

Théorème 1.5.4 ***(De Tykhonov)*** *un produit des espaces topologiques compacts est compact.*

1.6 Espaces Métriques

Dans cette section, nous présentons les notions de base de la métrique.

Définition 1.6.1 *Soit X un ensemble, on appelle distance sur X toute application d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :*

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

ii) $\forall x, y \in X, \ d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrie),*

iii) $\forall x, y, z \in X, \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple (X, d) est appelé un espace métrique.

Remarque 1.6.1 *Une distance d sur un ensemble vérifie :* $\forall x, y \in X, \ d(x, y) \geq 0$.

Exemples :

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique.

2. Tout ensemble non vide peut être muni de la distance triviale δ définie par :

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}.$$

3. L'ensemble $X = \mathbb{R}^N$ peut être muni par une de ces distances :

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|, \quad d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \qquad d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.6.2 *Soit (x, d) un espace métrique et r un réel positif.*

- *On appelle une boule ouverte (resp. boule fermée) de centre $x \in X$ et de rayon r l'ensemble : $B(x,r) = \{y \in X, \ d(x,y) < r\}$ (resp. $B_f(x,r) = \{y \in X, \ d(x,y) \le r\}$).*
- *L'ensemble $S(x,r) = \{y \in X, \ d(x,y) = r\}$ est appelé sphère de centre x et de rayon r.*

Définition 1.6.3 *L'ensemble Ω de l'espace métrique (X, d) est dit ouvert si il est vide ou si $\forall x \in \Omega, \ \exists r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$.*

Définition 1.6.4 *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée, s'il existe une boule fermée telle que : $A \subset B(x,r)$.*

Proposition 1.6.1 *Toute boule ouverte de (X, d) est un ouvert de X.*

Remarque 1.6.2 *Tout espace métrique est un espace topologique, en effet les boules ouvertes engendrent la topologie associée à un espace métrique.*

Exemple : La topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est la topologie sur $\mathbb{R}$ associée à la distance usuelle $d(x,y) = |x - y|$. L'intervalle $]x - r, x + r[$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r.

Proposition 1.6.2 *Tout espace métrique est un espace toplogique séparé.*

Définition 1.6.5 *Soit X un ensemble. On munit X de deux distances d_1 et d_2. On dit que les deux distances sont topologiquement équivalentes si et seulement si l'application identité Id est continue de (X, d_1) dans (X, d_2) et de (X, d_2) dans (X, d_1).*

On donne dans la suite la définition de la convergnence des suites dans l'espace métrique.

Définition 1.6.6 *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléménts d'un espace métrique (X,d) et l un point de X. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que } \forall n \geq n_0 \textit{ alors } d(x_n, l) < \varepsilon.$$

Avant de définir les espaces complets, on donne la définition d'une suite de Cauchy.

Définition 1.6.7 *Soit (X,d) un espace métrique. On dit qu'une suite d'éléménts de X est une suite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq n_0$, $\forall q \geq n_0$ alors $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.*

On note que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers l dans (X,d) alors elle est de Cauchy car : $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, l) + d(l, x_q)$. Mais la réciproque est fausse, c'est-à-dire il existe des suites de Cauchy qui ne convergent pas.

Définition 1.6.8 *Soit (X,d) un espace métrique. On dit que cet espace est complet si et seulement si toute suite de Cauchy d'éléments de X converge dans X.*

Exemple : L'epace $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est complet. Par contre $\mathbb{Q}$ muni de cette distance ne l'est pas.

Proposition 1.6.3 *Le produit cartésien d'un nombre fini d'espaces métriques complets est un espace métrique complet.*

On déduit alors que l'espace $\mathbb{R}^N$ muni de l'une des distances d_1, d_2 ou d_∞ est un espace complet.

Définition 1.6.9 *Une partie A d'un espace métrique (X,d) est dite complète si munie de la distance induite est un espace métrique complet.*

Proposition 1.6.4 *On a les propriétés suivantes :*

- *Toute partie complète est fermée.*
- *Toute partie fermée d'un espace métrique complet est complète.*

1.7 Espace normés

Dans cette section, on rappelle quelques généralités sur les espaces normés abstrait, déjà vues dans des cours de Licence. Dans ce qui suit, on désigne par $\mathbb{k}$ l'espace des scalaires $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.7.1 *Soit E un espace véctoriel réel ou complexe. Une norme sur E est une application : $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :*

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E : \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *(homogénéité).*

iii) $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Le couple $(E, \|.\|)$ est alors appelé espace vectoriel normé.

Remarque 1.7.1 *Si on supprime la condition i) on dit que $\|.\|$ est une semi-norme. On note qu'on a toujours $\|0_E\| = 0$.*

A partir d'une norme, on obtient une distance sur E en posant $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition 1.7.2 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.*

1. *On dit que $\|.\|_2$ est plus forte que $\|.\|_1$ s'il existe $c > 0$ telle que :*

$$\forall x \in E, \ \ \|x\|_1 \leq c \|x\|_2 .$$

2. *On dit que $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes s'ils existent $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ telles que :* $\forall x \in E, \ \ c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 .$

Il est évident que les distances associées à deux normes équivalentes sont équivalentes.

Exemples :

1) Sur $\mathbb{k}^n$ les normes $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty$ et $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ sont toutes équivalentes**.**

2) On définit sur $C([0,1], \mathbb{k})$, l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{k}$, et sur $F_b([0,1], \mathbb{k})$, l'espace des fonctions bornées sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{k}$, la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|,$$

c'est la norme de la convergence uniforme.

3) Soit $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. L'espace du produit cartésien $E \times F$ peut être muni d'une des normes du produit suivantes :

$$\|(u,v)\|_1 = \|u\|_E + \|v\|_F, \qquad \|(u,v)\|_2 = \sqrt{\|u\|_E^2 + \|v\|_F^2}, \quad \|(u,v)\|_\infty = \max(\|u\|_E, \|v\|_F).$$

Ces normes sont équivalentes.

Proposition 1.7.1 *Les topologies engendrées par deux normes équivalentes sont les mêmes.*

Proposition 1.7.2 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. Alors $\|.\|_2$ est plus forte que $\|.\|_1$ si et seulement si tout ouvert de E pour la topologie associée à $\|.\|_1$ est ouvert pour la topologie de $\|.\|_2$. Autrement dit, plus la norme est forte plus la topologie associée est fine.*

Définition 1.7.3 *On appelle espace de Banach tout espace normé complet.*

1.7.1 Applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $L(E,F)$.

Proposition 1.7.3 *Une application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement si :*

$\exists M \geq 0, \forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

Définition 1.7.4 *Soit $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E à F. Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ on note $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ la plus petite constante M telle que :*

$\forall x \in E : \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

A partir de la définition de $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ on a : $\|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E$. De plus on peut vérifier que :

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in E, \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \in E, \|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F .$$

Proposition 1.7.4 *L'espace* $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$ *est un espace vectoriel normé. De plus si* $(F, \|.\|_F)$ *est un espace de Banach, alors* $\mathcal{L}(E,F)$ *l'est aussi.*

Remarque 1.7.2 *La définition de* $\mathcal{L}(E,F)$ *dépend du choix des normes sur* E *et* F *cependant modifier les normes sur* E *et* F *par des normes équivalentes ne modifie pas* $\mathcal{L}(E,F)$ *et change* $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ *en une norme équivalente.*

Définition 1.7.5 *On appelle dual topologique de* E *et on le note* $E' = \mathcal{L}(E, \Bbbk)$ *l'espace des formes linéaires continues sur* E*.*

Théorème 1.7.1 *Soit* f *une forme linéaire sur* $(E, \|.\|_E)$*. Alors,* f *est continue si et seulement si son noyau* $Ker f$ *est fermé.*