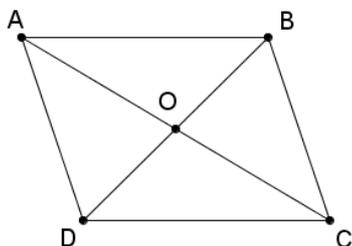


# Exercices sur les vecteurs

## Exercice 1

$ABCD$  est un parallélogramme et ses diagonales se coupent en  $O$ .



(1) Compléter par un vecteur égal :

a)  $\overrightarrow{AB} = \dots$

b)  $\overrightarrow{BC} = \dots$

c)  $\overrightarrow{DO} = \dots$

d)  $\overrightarrow{OA} = \dots$

e)  $\overrightarrow{CD} = \dots$

(2) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier :

a)  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

e)  $AB = DC$

b)  $[AB] = [DC]$

f)  $O = \text{mil } \overrightarrow{AC}$

c)  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$

g)  $\text{mil } \overrightarrow{BD} = \text{mil } \overrightarrow{AC}$

d)  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$

h)  $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$

## Exercice 2

En utilisant le quadrillage, dire pour chaque égalité si elle est vraie ou fausse :

(1)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

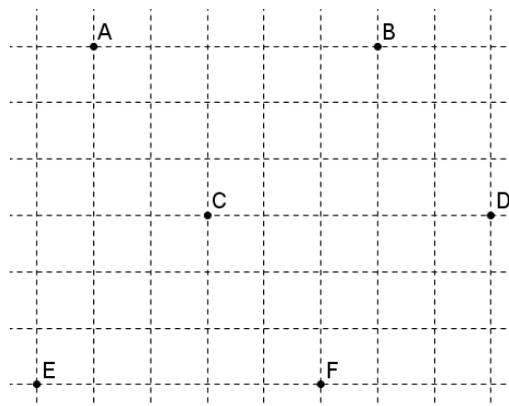
(2)  $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$

(3)  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$

(4)  $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}$

(5)  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$

(6)  $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{DC}$



## Exercice 3

Soit  $ABC$  un triangle quelconque.

(1) Construire :

- le point  $N$  tel que  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC}$  ;
- le point  $P$  tel que  $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BC}$  ;
- le point  $M$  tel que  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$  .

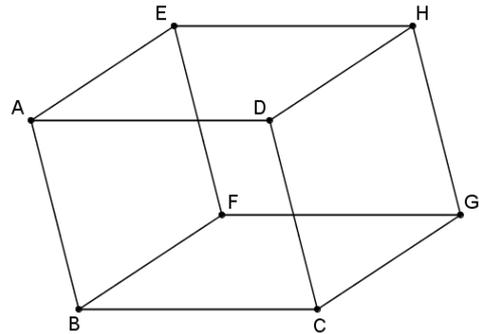
(2) Montrer que  $A = \text{mil}[NP]$ ,  $B = \text{mil}[PM]$  et  $C = \text{mil}[MN]$ .

(3) Quel est le rapport des aires des triangles  $ABC$  et  $MNP$  ? Justifier !

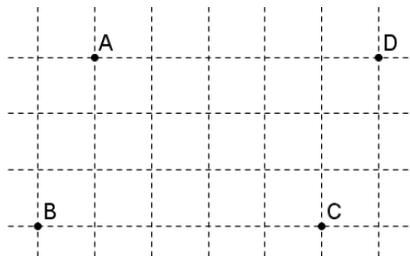
### Exercice 4

Sur la figure ci-contre, formée de parallélogrammes juxtaposés, déterminer :

- (1) un représentant de  $\overrightarrow{DB}$
- (2) trois représentants de  $\overrightarrow{AE}$
- (3) un représentant de  $\overrightarrow{FG}$  d'origine  $B$
- (4) un représentant de  $\overrightarrow{CF}$  d'extrémité  $E$
- (5) un représentant de  $\vec{0}$
- (6) un représentant de  $-\overrightarrow{AF}$



### Exercice 5



- (1) Reproduire le parallélogramme  $ABCD$  ci-dessus dans votre cahier puis construire les points  $E, F, G, H$  et  $I$  définis par :

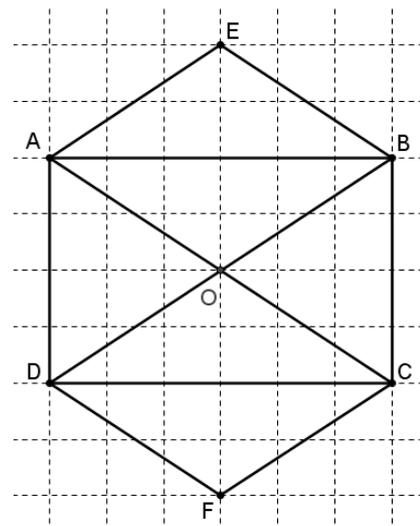
$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AC} ; \\ \overrightarrow{AH} &= -\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AC} . \end{aligned}$$

- (2) Quelle est la nature des quadrilatères  $BCEF$  et  $DGEC$ .
- (3) Que représente le point  $A$  pour le segment  $[IC]$  ?

### Exercice 6

Calculer les sommes vectorielles indiquées en utilisant la figure ci-contre :

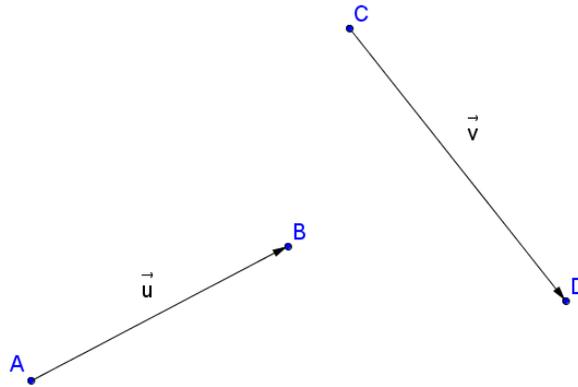
- (1)  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AO}$
- (2)  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DF}$
- (3)  $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AO}$
- (4)  $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{FC}$
- (5)  $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE}$
- (6)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$



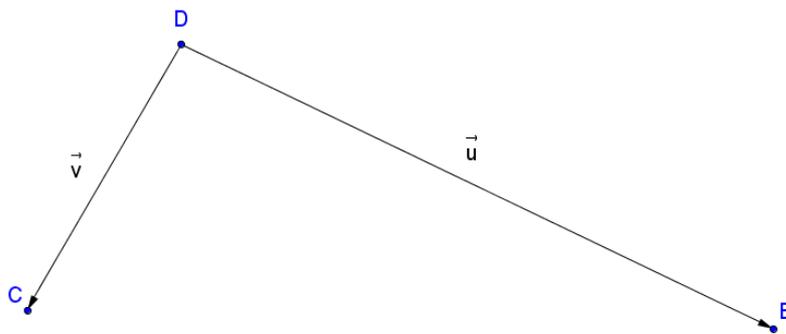
### Exercice résolu 7

Déterminer la somme des vecteurs sur chacune des figures suivantes et expliquer votre démarche.

(1)



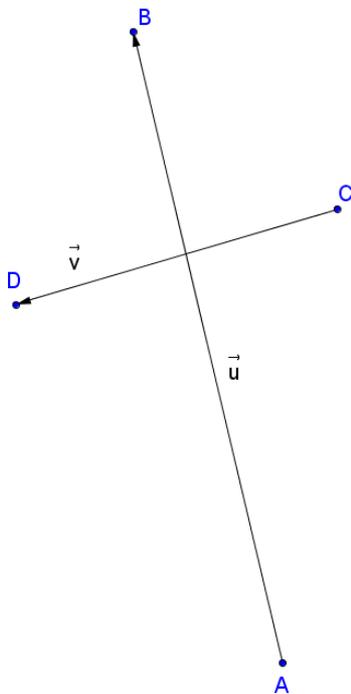
(2)



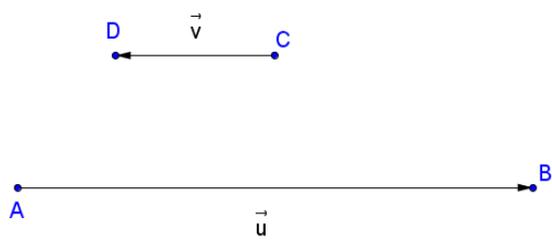
(3)



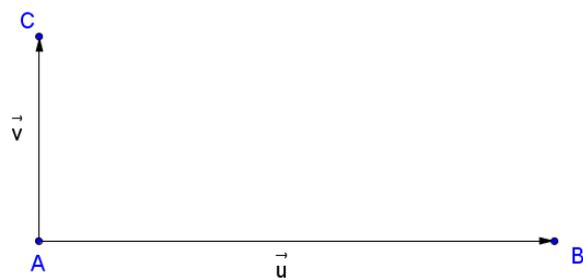
(4)



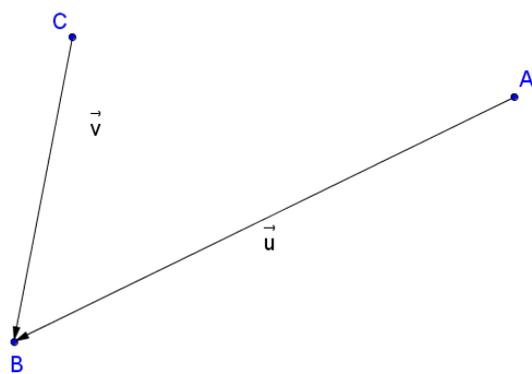
(5)



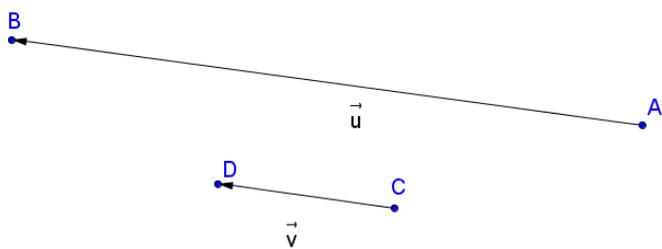
(6)



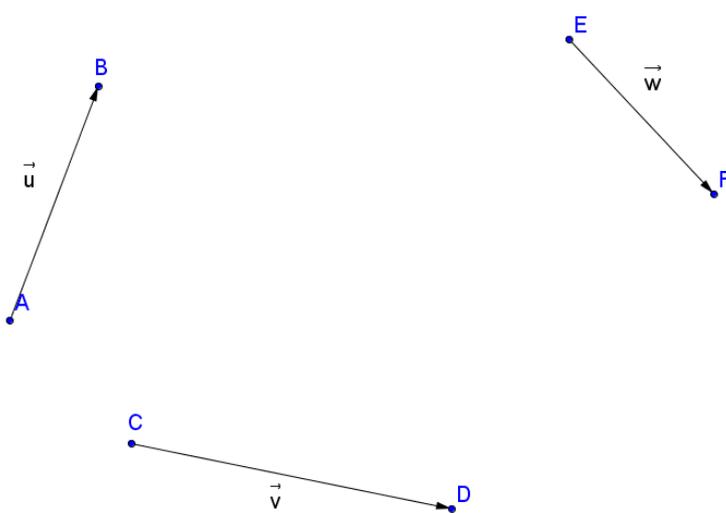
(7)



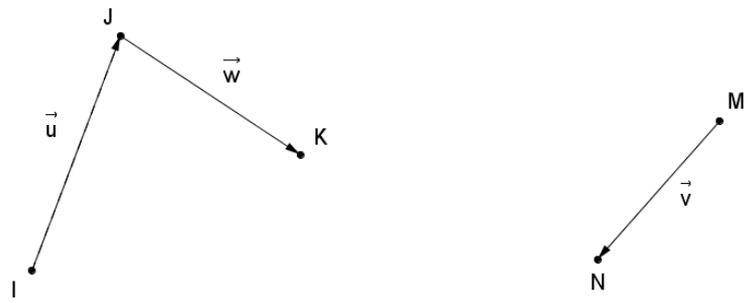
(8)



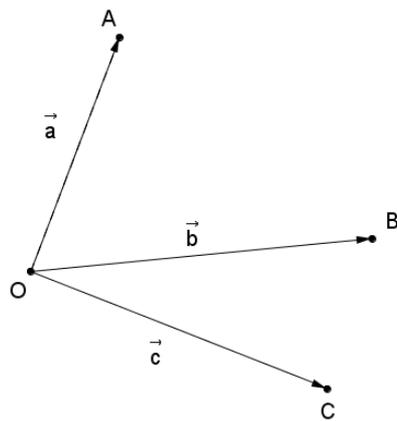
(9)



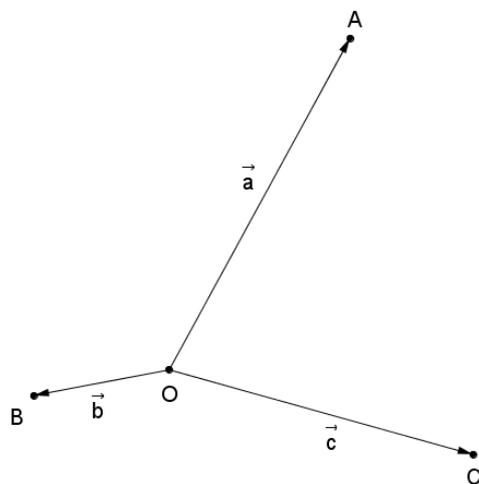
(10)



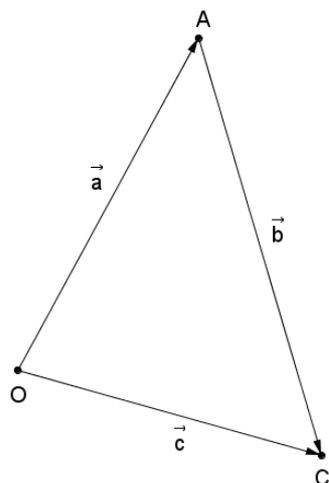
(11)



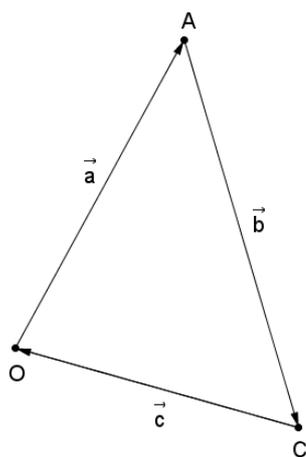
(12)



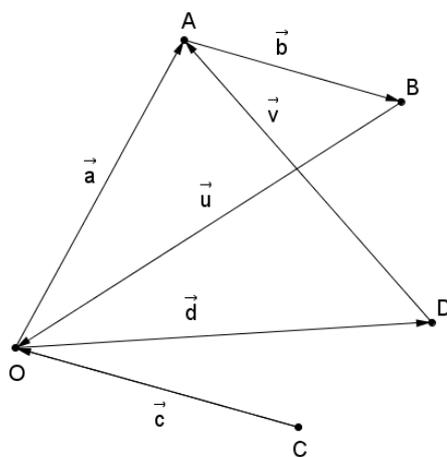
(13)



(14)



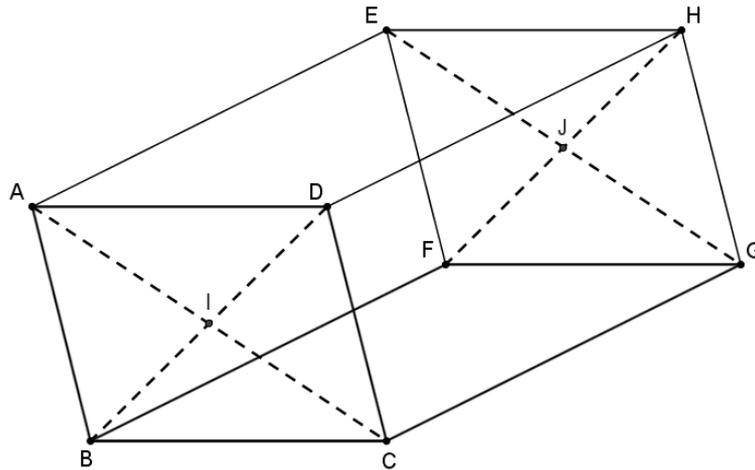
(15)



### Exercice 8

- (1) Sur les figures (1) à (8) de l'exercice 7, construire  $\vec{u} - \vec{v}$ .
- (2) Sur les figures (9) et (10) de l'exercice 7, construire  $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ .
- (3) Sur les figures (11) et (12) de l'exercice 7, construire  $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{b} - \vec{c}$  et  $\vec{w} = \vec{a} - \vec{c}$ . Quelle est la relation entre  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  ?

### Exercice résolu 9



Sur la figure ci-dessus, formée de parallélogrammes juxtaposés, déterminer un représentant de

- |   |  |
|---|--|
| (1) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF}$ | (8) $\overrightarrow{IF} - \overrightarrow{FJ}$  |
| (2) $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AC}$ | (9) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$                        |
| (3) $\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{BC}$ | (10) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{BD}$                       |
| (4) $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DH}$ | (11) $\overrightarrow{JE} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{ID}$                       |
| (5) $\overrightarrow{GJ} + \overrightarrow{BF}$ | (12) $\overrightarrow{GJ} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BI}$                       |
| (6) $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{JI}$ | (13) $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CG} - \overrightarrow{FH}$ |
| (7) $\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{AI}$ | (14) $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{FH}$ |

Déterminer le point  $O$  sur la figure tel que :  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} - \overrightarrow{IA}$ .

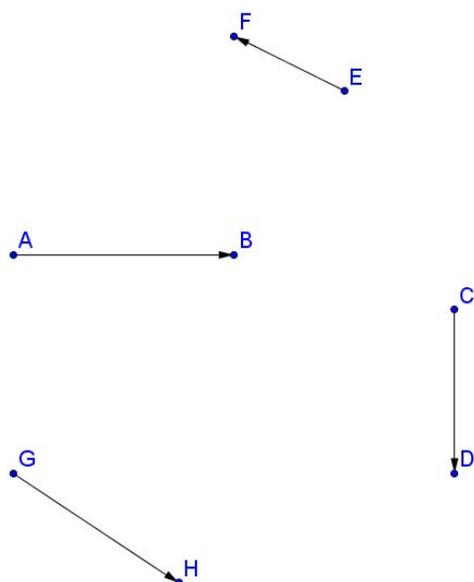
Déterminer le point  $P$  sur la figure tel que :  $\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AB}$

### Exercice 10

Démontrer les propriétés vectorielles suivantes à l'aide d'une figure.

- |   |  |
|---|--|
| (1) $-(-\vec{a}) = \vec{a}$                                       | (5) $2 \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} - 2\vec{b}$    |
| (2) $\vec{v} - \vec{u} = -(\vec{u} - \vec{v})$                    | (6) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{u} = 2\vec{u} + \vec{v}$     |
| (3) $\vec{u} - (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$ | (7) $-3 \cdot (2\vec{u}) = -6\vec{u}$                      |
| (4) $\vec{a} - (\vec{e} - \vec{r}) = \vec{a} - \vec{e} + \vec{r}$ | (8) $2 \cdot (-\frac{5}{3}\vec{z}) = -\frac{10}{3}\vec{z}$ |

## Exercice résolu 11



Sur la figure ci-dessus, construire le point

- |   |  |
|---|--|
| (1) $I$ tel que $\overrightarrow{EI} = 2\overrightarrow{AB}$            | (5) $M$ tel que $\overrightarrow{MA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EF}$               |
| (2) $J$ tel que $\overrightarrow{GJ} = -\overrightarrow{AB}$            | (6) $N$ tel que $\overrightarrow{NH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$              |
| (3) $K$ tel que $\overrightarrow{CK} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ | (7) $P$ tel que $\overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CD}$   |
| (4) $L$ tel que $\overrightarrow{LC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$  | (8) $Q$ tel que $\overrightarrow{HQ} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD})$ |

## Exercice 12

Soit  $ABCD$  un parallélogramme. Construire les points  $M, N, P, Q$  définis par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} ; \quad \overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} ; \\ \overrightarrow{CP} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} ; \quad 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{QD} = 3\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} . \end{aligned}$$

## Exercice 13

$A$  et  $B$  étant deux points distincts donnés, construire si possible les points inconnus  $Q, R, S, T, U, V, W, X, Y$  et  $Z$  en résolvant les équations vectorielles correspondantes :

- |   |   |
|---|---|
| (1) $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{QB}$ | (4) $\overrightarrow{BT} - 3\overrightarrow{AT} = 2\overrightarrow{AB}$ |
| (2) $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RB}$                       | (5) $\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{BU} = \vec{0}$               |
| (3) $\overrightarrow{AS} = 5\overrightarrow{BS}$                      | (6) $\overrightarrow{AV} + \overrightarrow{VB} = \vec{0}$               |

$$(7) \quad 2\overrightarrow{AW} = -\overrightarrow{WB}$$

$$(8) \quad \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$(9) \quad 2\overrightarrow{AY} - 3\overrightarrow{BY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$(10) \quad -2\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{BZ} = 2\overrightarrow{BA}$$

### Exercice 14

$A$  et  $B$  étant deux points distincts donnés, construire les points  $M$  et  $P$  tels que :  $2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$  et  $\overrightarrow{PA} - 5\overrightarrow{BP} = \vec{0}$

### Exercice 15

$A$ ,  $B$  et  $C$  étant trois points non alignés donnés, construire si possible les points inconnus  $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  en résolvant les équations vectorielles correspondantes :

$$(1) \quad \overrightarrow{UA} + \overrightarrow{UB} + \overrightarrow{UC} = \overrightarrow{BC}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{AV} - \overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VC} = \vec{0}$$

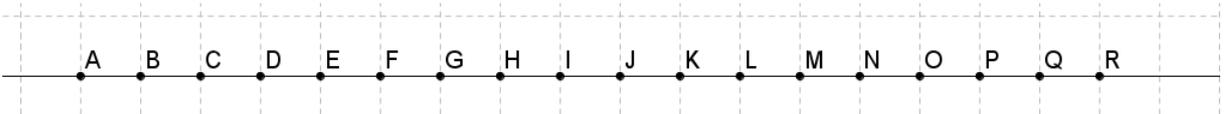
$$(3) \quad 2\overrightarrow{AW} - \overrightarrow{BW} - \overrightarrow{CW} = \overrightarrow{AB}$$

$$(4) \quad -3\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC} = \vec{0}$$

$$(5) \quad \overrightarrow{AY} - 2\overrightarrow{BY} + 3\overrightarrow{CY} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$(6) \quad \overrightarrow{AZ} - 3\overrightarrow{ZB} = 2(\overrightarrow{CZ} + \overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{BC})$$

### Exercice résolu 16



En observant la figure ci-dessus, compléter les relations de colinéarité suivantes :

$$(1) \quad \overrightarrow{AE} = \dots \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AB} = \dots \overrightarrow{AE}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{GD} = \dots \overrightarrow{JP} \text{ et } \overrightarrow{JP} = \dots \overrightarrow{GD}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{CL} = \dots \overrightarrow{QN} \text{ et } \overrightarrow{NQ} = \dots \overrightarrow{CL}$$

$$(4) \quad \overrightarrow{DH} = \dots \overrightarrow{AF} \text{ et } \overrightarrow{FA} = \dots \overrightarrow{HD}$$

$$(5) \quad \overrightarrow{GR} = \dots \overrightarrow{IQ} \text{ et } \overrightarrow{IQ} = \dots \overrightarrow{GR}$$

$$(6) \quad \overrightarrow{OH} = \dots \overrightarrow{OE} \text{ et } \overrightarrow{OE} = \dots \overrightarrow{OH}$$

$$(7) \quad \overrightarrow{BP} = \dots \overrightarrow{LG} \text{ et } \overrightarrow{PB} = \dots \overrightarrow{LG}$$

$$(8) \quad \overrightarrow{QI} = \dots \overrightarrow{IE} \text{ et } \overrightarrow{IQ} = \dots \overrightarrow{EI}$$

$$(9) \quad \overrightarrow{JE} = \dots \overrightarrow{JQ} \text{ et } \overrightarrow{JQ} = \dots \overrightarrow{JE}$$

$$(10) \quad \overrightarrow{MK} = \dots \overrightarrow{KG} \text{ et } \overrightarrow{GK} = \dots \overrightarrow{MK}$$

$$(11) \quad \overrightarrow{DN} = \dots \overrightarrow{HR} \text{ et } \overrightarrow{HR} = \dots \overrightarrow{ND}$$

$$(12) \quad \overrightarrow{LA} = \dots \overrightarrow{RB} \text{ et } \overrightarrow{RB} = \dots \overrightarrow{AL}$$

$$(13) \quad \overrightarrow{FL} = \dots \overrightarrow{NE} \text{ et } \overrightarrow{NE} = \dots \overrightarrow{LF}$$

$$(14) \quad \overrightarrow{KJ} = \dots \overrightarrow{BP} \text{ et } \overrightarrow{PB} = \dots \overrightarrow{JK}$$

$$(15) \quad \overrightarrow{AA} = \dots \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{BB} = \dots \overrightarrow{IJ}$$

$$(16) \quad \overrightarrow{IO} = \dots \overrightarrow{AR} \text{ et } \overrightarrow{RA} = \dots \overrightarrow{OI}$$

$$(17) \quad \overrightarrow{BK} = \dots \overrightarrow{CL} \text{ et } \overrightarrow{BK} = \dots \overrightarrow{LC}$$

$$(18) \quad \overrightarrow{GG} = \dots \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{AD} = \dots \overrightarrow{GG}$$

### Exercice 17

Dans chacun des cas suivants, déterminer une relation de colinéarité entre  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ , puis faire une figure :

(1)  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$

(4)  $2\overrightarrow{BA} = 3\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$

(2)  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

(5)  $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

(3)  $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$

(6)  $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$

### Exercice résolu 18

Soit  $A$  et  $B$  deux points distants de 1,5 cm.

(1) Construire le point  $C$  tel que  $\overrightarrow{BC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ .

(2) Construire le point  $D$  tel que  $\overrightarrow{AD} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ .

(3) Compléter et démontrer la relation de colinéarité :  $\overrightarrow{CD} = \dots\overrightarrow{AB}$ .

(4) En déduire la longueur du vecteur  $\overrightarrow{CD}$  en cm.

### Exercice 19

Soit  $ABC$  un triangle quelconque et  $D$  le point défini par :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}.$$

(1) Construire le point  $D$ .

(2) Exprimer  $\overrightarrow{AB}$  en fonction de  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

(3) Exprimer  $\overrightarrow{AC}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$ .

(4) Exprimer  $\overrightarrow{AD}$  en fonction de  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$ .

### Exercice 20

Soit  $ABCD$  quadrilatère quelconque,  $M$  le milieu de  $[AB]$ ,  $N$  le milieu de  $[BC]$ ,  $P$  le milieu de  $[CD]$  et  $Q$  le milieu de  $[AD]$ .

(1) Montrer que  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

(2) En déduire la nature du quadrilatère  $MNPQ$ .

### Exercice 21

Soit  $G$  le centre de gravité d'un triangle  $ABC$  et  $A' = \text{mil}[BC]$ ,  $B' = \text{mil}[CA]$ ,  $C' = \text{mil}[AB]$ . Montrer que  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ .

### Exercice 22

Soit  $G$  le centre de gravité d'un triangle  $ABC$ . Montrer que  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ ,  $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$  et  $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ .

### Exercice 23

Soit  $G$  le centre de gravité d'un triangle  $ABC$  et  $A' = \text{mil}[BC]$ ,  
 $B' = \text{mil}[CA]$ ,  $C' = \text{mil}[AB]$ .

- (1) Compléter les relations de colinéarité suivantes :

$$\overrightarrow{GA} = \dots \overrightarrow{GA'} ; \overrightarrow{GB} = \dots \overrightarrow{GB'} ; \overrightarrow{GC} = \dots \overrightarrow{GC'}.$$

- (2) En déduire que  $G$  est le centre de gravité du triangle  $A'B'C'$ .

### Exercice 24

Soit  $G$  le centre de gravité d'un triangle  $ABC$  et  $A' = \text{mil}[BC]$ ,  
 $B' = \text{mil}[CA]$ ,  $C' = \text{mil}[AB]$ .

- (1) Construire les points  $P, Q$  et  $R$  tels que :

a)  $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ , b)  $\overrightarrow{GQ} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA}$  et c)  $\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$ .

- (2) Montrer que :  $\overrightarrow{GP} = -\overrightarrow{GA}$ ,  $\overrightarrow{GQ} = -\overrightarrow{GB}$  et  $\overrightarrow{GR} = -\overrightarrow{GC}$ .

- (3) Quelle est l'isométrie qui transforme le triangle  $ABC$  en le triangle  $PQR$  ?

### Exercice 25

Soit  $G$  et  $G'$  les centres de gravité de deux triangles  $ABC$  et  $DEF$  respectivement.

- (1) Montrer que :  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{GG'}$ .

- (2) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que deux triangles aient le même centre de gravité.

### Exercice 26

Soit  $G$  le centre de gravité d'un triangle  $ABC$ .

- (1) Montrer qu'il existe un point unique  $D$  tel que  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$ .

- (2) Quelle est la nature du quadrilatère  $ABGD$  ?

### Exercice 27

Soit  $ABC$  un triangle.

- (1) Construire les points  $I, J$  et  $K$  tels que :

- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

- (2) Démontrer que les droites  $AI, BJ$  et  $CK$  sont concourantes en  $G$ , centre de gravité du triangle  $ABC$ .

### Exercice 28

Soit  $G$  le *centre de gravité* d'un quadrilatère quelconque  $ABCD$ , c.-à-d.  $G$  est l'*unique point* vérifiant l'égalité :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

- (1) Construire le point  $G$  après avoir démontré que :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

- (2) Soit  $M$  le milieu de  $[AB]$  et  $P$  le milieu de  $[CD]$ . Donner une construction plus simple du point  $G$  après avoir démontré que  $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$ .
- (3) Soit  $N$  le milieu de  $[BC]$  et  $Q$  le milieu de  $[AD]$ . Donner une construction encore plus simple du point  $G$  après avoir démontré que  $\overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$ .
- (4) Quelle est la nature du quadrilatère  $MNPQ$  ?

### Exercice 29

Soit  $ABC$  un triangle quelconque,  $O$  le centre du cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  à  $ABC$  et  $A'$  le milieu de  $[BC]$ . On définit le point  $H$  par la relation vectorielle :

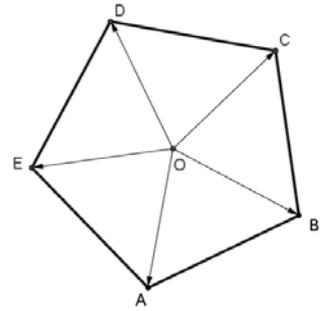
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

- (1) a) Démontrer que :  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ .  
b) En déduire que  $H$  appartient à la hauteur issue de  $A$  dans le triangle  $ABC$ .
- (2) a) Démontrer de même que  $H$  appartient aux deux hauteurs issues de  $B$  et de  $C$  respectivement dans le triangle  $ABC$ .  
b) Quel théorème vient-on de démontrer de cette façon ? Rappeler comment on appelle le point  $H$  dans le triangle  $ABC$ .
- (3) Soit  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ . En utilisant une caractérisation vectorielle de  $G$ , démontrer que :  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ . Que peut-on en déduire pour les points  $O$ ,  $G$  et  $H$  ? Énoncer le théorème démontré ainsi.

**Remarque :** La droite passant par les points  $O$ ,  $G$  et  $H$  est appelé *droite* d'Euler.

- (4) Montrer que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux milieux des côtés du triangle sont situés sur le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  au triangle.

- (5) Montrer que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle sont situés sur le cercle circonscrit  $\mathcal{C}$  au triangle.



### Exercice 30

La figure ci-contre représente le *pentagone régulier*  $ABCDE$  de centre  $O$ , c.-à-d.  $O$  est le centre du cercle circonscrit à ce pentagone.

- (1) Montrer que  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} // \overrightarrow{OD}$ . *Indication* :  $OD$  est un axe de symétrie du pentagone  $ABCDE$ .
- (2) Montrer de même que  $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} // \overrightarrow{OD}$ .
- (3) En déduire que  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} // \overrightarrow{OD}$
- (4) Montrer qu'on a également :
 
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} // \overrightarrow{OE}.$$
- (5) En déduire que  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ .  
( $O$  est donc le centre de gravité du pentagone  $ABCDE$ .)
- (6) Utiliser le résultat précédent pour prouver que :
  - a)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$  et
  - b)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$

### Exercice 31

Soit  $ABC$  un triangle. On définit les points  $D$ ,  $F$  et  $G$  par

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GC} = 5\overrightarrow{GA}.$$

- (1) Par  $D$  on trace la parallèle à  $BC$  qui coupe  $AC$  en  $E$ . Donner les relations de colinéarité entre a) les vecteurs  $\overrightarrow{CE}$  et  $\overrightarrow{AC}$  b)  $\overrightarrow{DE}$  et  $\overrightarrow{CB}$ . Justifier.
- (2) Démontrer que  $GF$  et  $DE$  sont parallèles. Justifier !

### Exercice 32

Soit un parallélogramme  $ABCD$  de centre  $O$ .

- (1) Construire les points  $E$  et  $F$  tels que :  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FC}$ .
- (2) Montrer que  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{FC}$ .
- (3) Montrer que  $BEFD$  est un parallélogramme.
- (4) Soit  $I = \text{mil}[AD]$  et  $J = \text{mil}[BC]$ . Montrer que  $IEJF$  est un parallélogramme.
- (5) La droite  $BE$  coupe respectivement  $AD$  en  $G$  et  $CD$  en  $H$ . Montrer que :
  - $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

- $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BH}$
- $\overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{DC}$

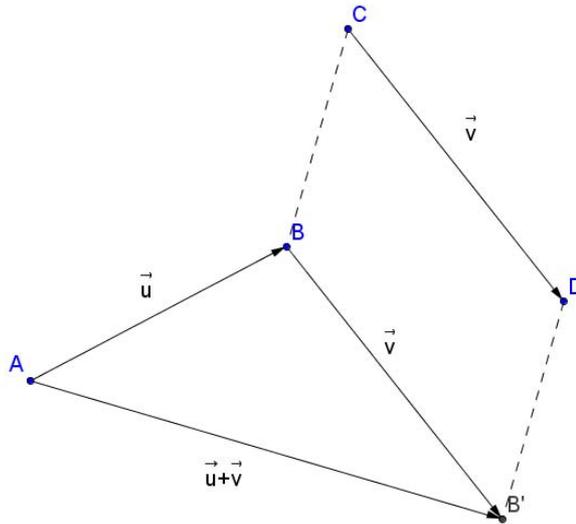
### **Exercice 33**

Soit  $ABCD$  un rectangle,  $I = \text{mil}[AB]$  et  $J = \text{mil}[DC]$ . Les droites  $DI$  et  $BC$  sont sécantes en  $K$  et les droites  $KJ$  et  $DB$  sont sécantes en  $G$ .

- (1) Démontrer que  $\overrightarrow{KG} = 2\overrightarrow{GJ}$ . Que représente  $G$  pour le triangle  $DCK$  ?
- (2) Démontrer que  $GC \parallel AJ$ .
- (3)  $AJ$  coupe  $DB$  en  $H$ . Démontrer que  $IGJH$  est un parallélogramme.

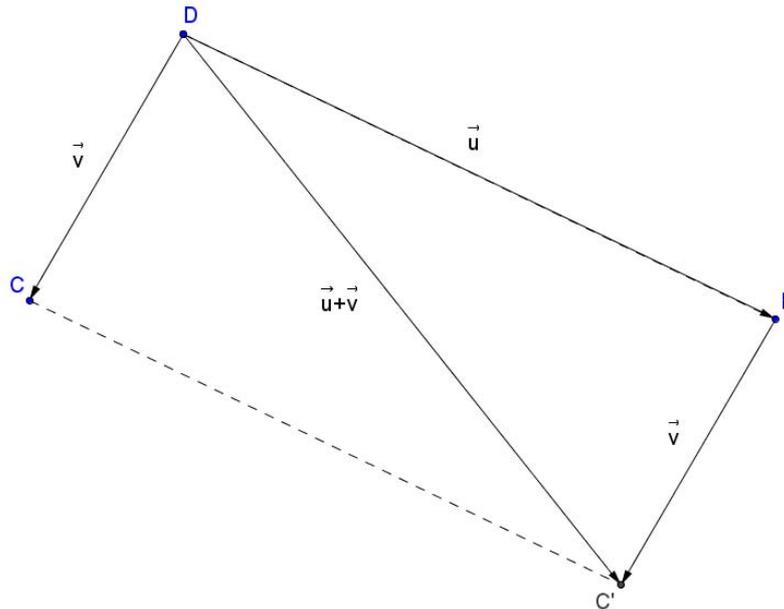
### Solution de l'exercice 7

(1)



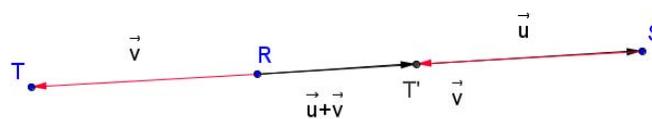
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'}$$

(2)



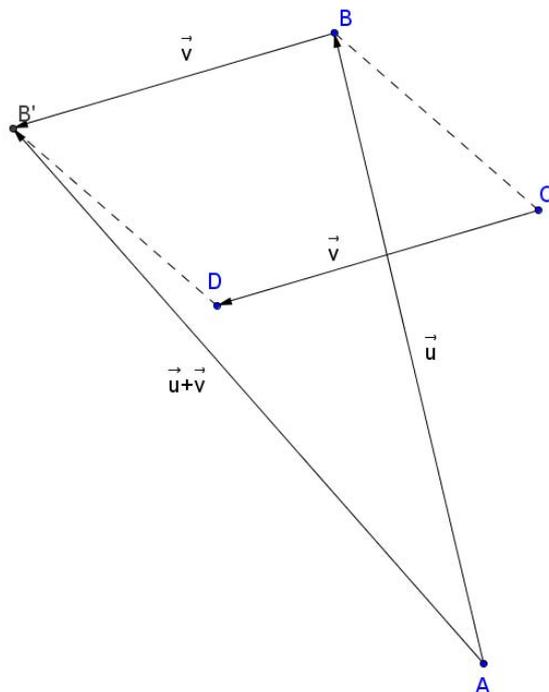
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{DC'}$$

(3)



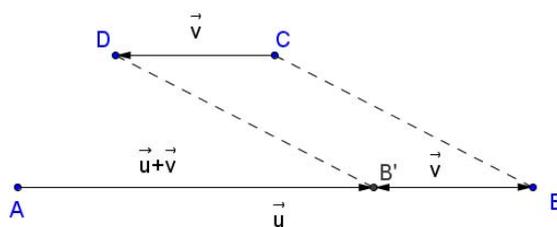
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{ST'} = \overrightarrow{RT'}$$

(4)



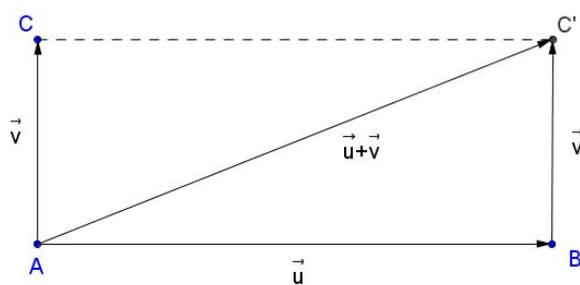
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'}$$

(5)



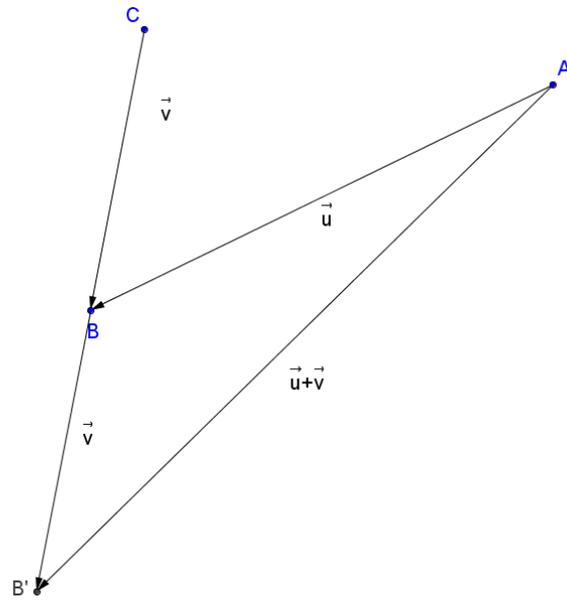
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'}$$

(6)



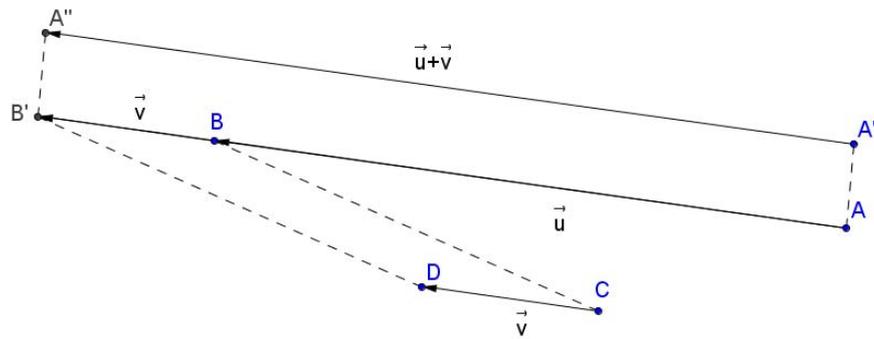
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC'}$$

(7)



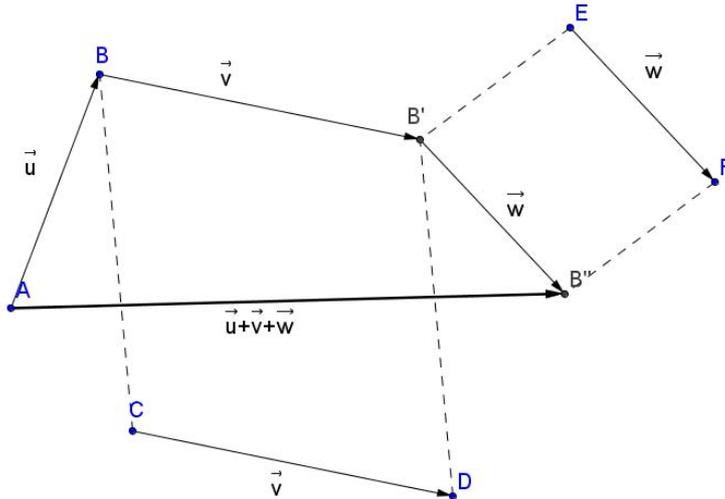
$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'}$$

(8)

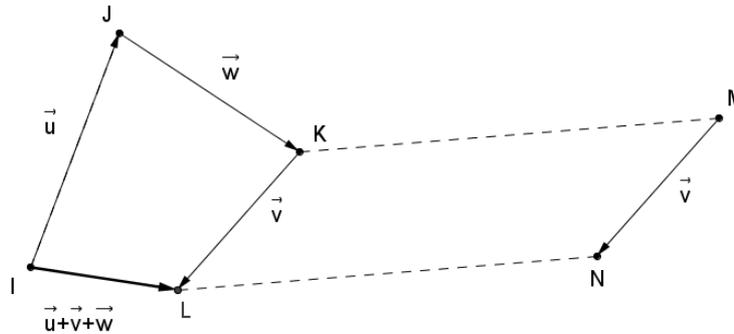


$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{A'A''}$$

(9)



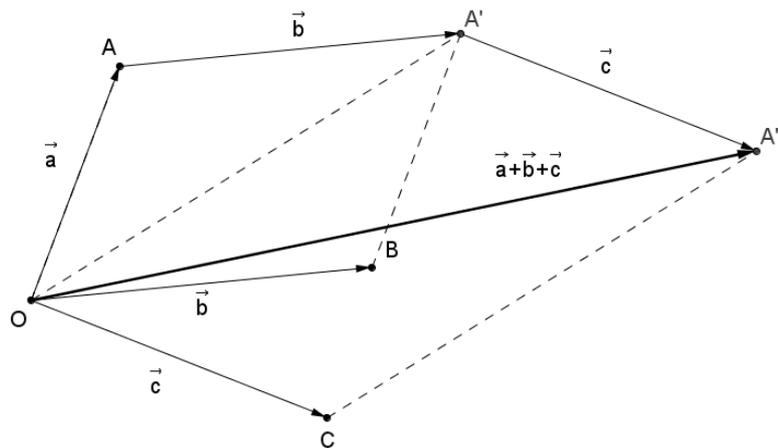
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'B''} = \overrightarrow{AB''} \quad (10)$$



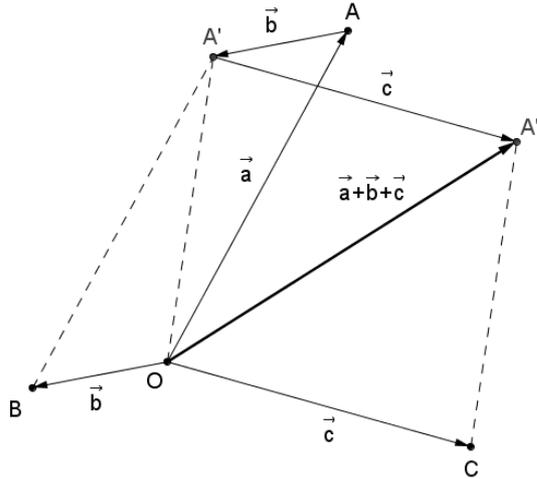
$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{w}) + \vec{v} = (\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK}) + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{IL}$$

(On a utilisé la commutativité et l'associativité de l'addition des vecteurs.)

(11)

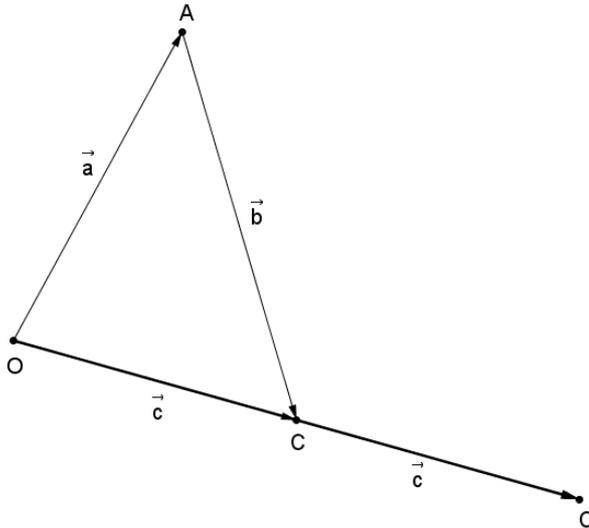


$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{OA''} \quad (12)$$



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{OA''}$$

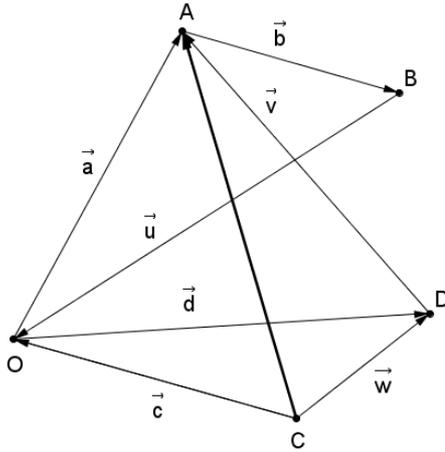
(13)



$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{OC'} (= 2\vec{c})$$

(14)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$  (vecteur nul)

(15)



$$\begin{aligned}
 & \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{u} + \vec{v} \\
 &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{u}) + (\vec{c} + \vec{d}) + \vec{v} \\
 &= \vec{0} + \vec{w} + \vec{v} = \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{CA}
 \end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 9**

(1)  $\vec{AE}$     (2)  $\vec{EC}$     (3)  $\vec{0}$     (4)  $\vec{HE}$     (5)  $\vec{CJ}$     (6)  $\vec{JB}$

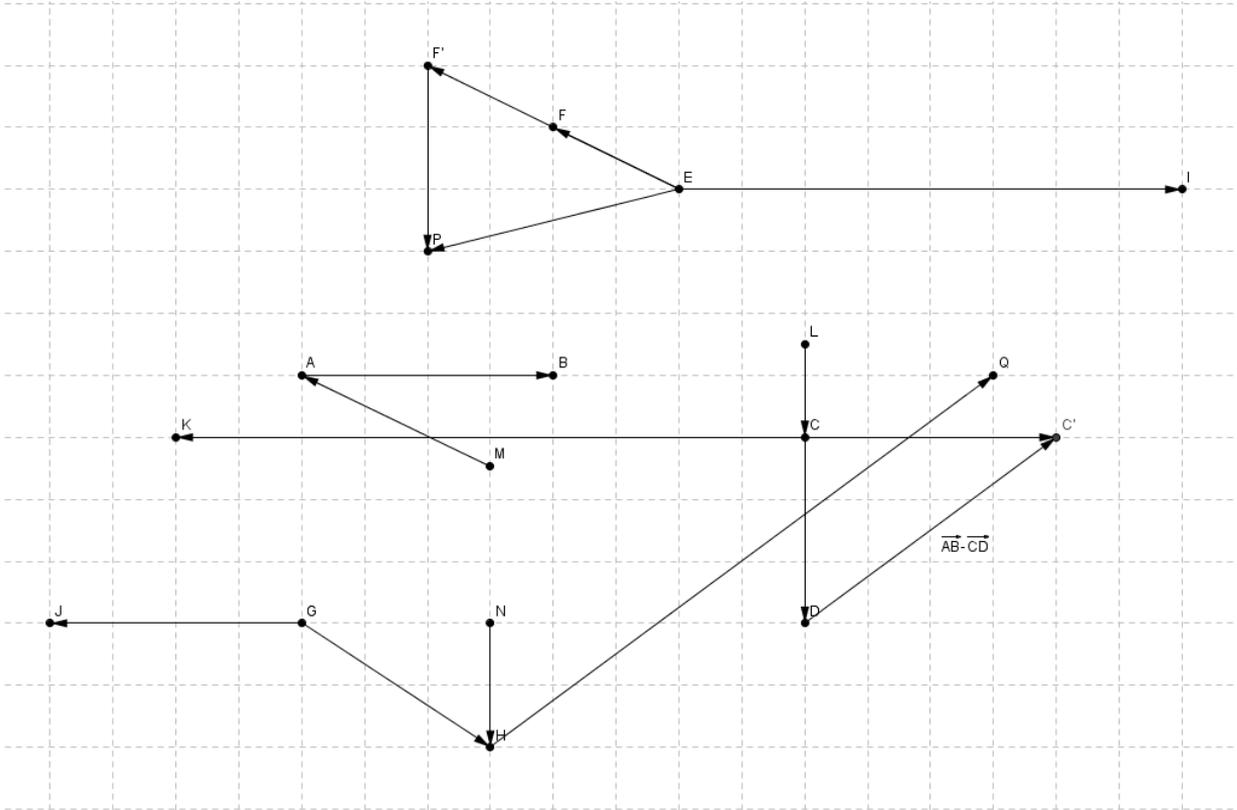
(7)  $\vec{FJ}$     (8)  $\vec{DF}$     (9)  $\vec{AH}$     (10)  $\vec{AD}$     (11)  $\vec{0}$     (12)  $\vec{BD}$

(13)  $(\vec{FD} + \vec{CG}) + \vec{IA} - \vec{FH} = \vec{FH} + \vec{IA} - \vec{FH} = \vec{IA}$     (14)  $\vec{AF}$

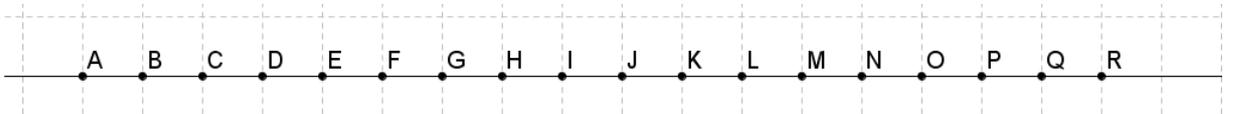
$$\vec{AO} = \vec{CF} + \frac{1}{2}\vec{FG} - \vec{IA} \Leftrightarrow O = \text{mil}[EF]$$

$$\vec{EP} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{GC} + \vec{AB} \Leftrightarrow P = \text{mil}[GC]$$

## Solution de l'exercice 11



## Solution de l'exercice 16

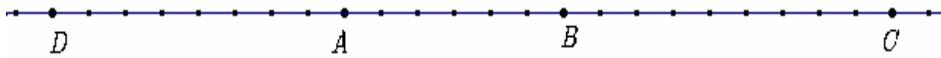


En observant la figure ci-dessus, compléter les relations de colinéarité suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| (1) $\overline{AE} = 4\overline{AB}$ et $\overline{AB} = \frac{1}{4}\overline{AE}$              | (11) $\overline{DN} = \overline{HR}$ et $\overline{HR} = -\overline{ND}$                           |
| (2) $\overline{GD} = -\frac{1}{2}\overline{JP}$ et $\overline{JP} = -2\overline{GD}$            | (12) $\overline{LA} = \frac{11}{16}\overline{RB}$ et $\overline{RB} = -\frac{16}{11}\overline{AL}$ |
| (3) $\overline{CL} = -3\overline{QN}$ et $\overline{NQ} = \frac{1}{3}\overline{CL}$             | (13) $\overline{FL} = -\frac{2}{3}\overline{NE}$ et $\overline{NE} = \frac{3}{2}\overline{LF}$     |
| (4) $\overline{DH} = \frac{4}{5}\overline{AF}$ et $\overline{FA} = \frac{5}{4}\overline{HD}$    | (14) $\overline{KJ} = -\frac{1}{14}\overline{BP}$ et $\overline{PB} = -14\overline{JK}$            |
| (5) $\overline{GR} = \frac{11}{8}\overline{IQ}$ et $\overline{IQ} = \frac{8}{11}\overline{GR}$  | (15) $\overline{AA} = 0\overline{AM}$ et $\overline{BB} = 0\overline{IJ}$                          |
| (6) $\overline{OH} = \frac{7}{10}\overline{OE}$ et $\overline{OE} = \frac{10}{7}\overline{OH}$  | (16) $\overline{IO} = \frac{6}{17}\overline{AR}$ et $\overline{RA} = \frac{17}{6}\overline{OI}$    |
| (7) $\overline{BP} = -\frac{14}{5}\overline{LG}$ et $\overline{PB} = \frac{14}{5}\overline{LG}$ | (17) $\overline{BK} = \overline{CL}$ et $\overline{BK} = -\overline{LC}$                           |
| (8) $\overline{QI} = 2\overline{IE}$ et $\overline{IQ} = 2\overline{EI}$                        | (18) $\overline{GG} = 0\overline{AD}$ et $\overline{AD} = \dots\overline{GG}$                      |
| (9) $\overline{JE} = -\frac{5}{7}\overline{JQ}$ et $\overline{JQ} = -\frac{7}{5}\overline{JE}$  | impossible !   |
| (10) $\overline{MK} = \frac{1}{2}\overline{KG}$ et $\overline{GK} = -2\overline{MK}$            |  |

### Solution de l'exercice 18

(1) et (2) :



(3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} \\ &= \left(-\frac{5}{2} - 1 - \frac{4}{3}\right)\overrightarrow{AB} \\ &= -\frac{29}{6}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\overline{CD} &= \frac{29}{6} \cdot 1,5 \\ &= \frac{29}{6} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{29}{4} = 7,25 \text{ cm}\end{aligned}$$