Chapitre 3

Théorèmes limite fondamentaux

L'objet de ce chapitre est d'énoncer les deux théorèmes limite qui sont à la base de la théorie des probabilités et des statistiques à savoir, la loi des grands nombres et le théorème limite central. Pour se faire, nous généralisons tout d'abord la notion d'indépendance des évènements aux variables aléatoires, puis nous définissons différents modes de convergence qui vont nous permettre de traduire le fait qu'une suite de variables aléatoires converge vers une variable aléatoire limite.

3.1 Indépendance de variables aléatoires

Au chapitre précédent, nous avons introduit la notion d'indépendance de deux (ou plus d') évènements. Cette notion se généralise aux variables aléatoires.

3.1.1 Définitions équivalentes

Il existe plusieurs définitions équivalentes pour l'indépendance de variables aléatoires. La plus simple consiste à repasser par la notion d'indépendance pour les évènements.

Définition 3.1.1. Soient deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace de probabilités $(,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On dit que X et Y sont indépendantes, et on note parfois $X \perp Y$, si pour tous ensembles "mesurables" A et B dans $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(X \in A \text{ et } Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \times \mathbb{P}(Y \in B).$$

Plus généralement, on dit que des variables aléatoires $(X_i)_{i\in I}$ sont indépendantes, si pour toute famille d'évènements $(A_i)_{i\in I}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i \in A_i\}\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i \in A_i).$$

On peut se limiter à une famille d'évènements bien choisis et ainsi utiliser les fonctions de répartition. En outre, on peut envisager une définition utilisant l'espérance mathématique définie au chapitre précédent.

Définition 3.1.2 (équivalentes). Les variables X et Y sont indépendantes si pour tous $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(X \leqslant s \text{ et } Y \leqslant t) = \mathbb{P}(X \leqslant s) \times \mathbb{P}(Y \leqslant t) = F_X(s) \times F_Y(t).$$

Les variables X et Y sont indépendantes si pour toutes fonctions continues bornées g et h :

$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)] \times \mathbb{E}[h(Y)].$$

Exemple 3.1.3. On considère le jet de deux dés modélisé par $= \{1, \ldots, 6\}^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}()$, et $\mathbb{P}$ uniforme. On note X le résultat du premier dé et Y le résultat du second. Alors X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, pour tout $(k, \ell) \in \Omega$:

$$\mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = \ell) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = \ell).$$

Exemple 3.1.4. Soient $p \in]0, 1[$ et X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$ et telles que $\mathbb{P}(Y = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) = (1-p)^2$, $\mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) = p(1-p)$. Alors X et Y sont indépendantes. En effet, on a $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et $\mathbb{P}(X = 1) = p$ puisque

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) \\ &= (1-p)^2 + p(1-p) = (1-p). \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) = (1-p)^2,$$

$$\mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = p(1-p),$$

$$\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = p(1-p),$$

$$\mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0) = p^2.$$

Dans le cas de variables à densité, on peut encore donner la définition suivante.

Définition 3.1.5 (indépendance et densité). Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires continues admettant des densités $f_{X_1}, f_{X_2}, \ldots, f_{X_n}$. Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si le vecteur $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ admet la densité $f_{X_1} \times f_{X_2} \times \ldots \times f_{X_n}$, c'est-à-dire, pour tout $[a_i, b_i[\subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \in [a_i, b_i[\}\right) = \int_{\prod_{i=1}^n [a_i, b_i[} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \ldots f_{X_n}(x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Exemple 3.1.6. Soient X et Y deux variables aléatoires de loi exponentielle de paramètres λ et μ respectivement. On suppose que X et Y sont indépendantes. Alors le couple (X, Y) admet la densité $f_{(X,Y)}$ suivante :

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda x} \times \mu e^{-\mu y} = \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y}.$$

Coefficient de corrélation

La dépendance / relation entre deux variables aléatoires peut être quantifiée par la covariance comme vue précédemment. Cependant, à l'image de la moyenne et de la variance, la covariance est un moment donc possède une dimension ce qui la rend plus difficile à interpréter. C'est pourquoi on utilise plus généralement le coefficient de corrélation, indicateur sans dimension, défini par

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}}.$$

Le coefficient de corrélation mesure la qualité de la relation linéaire entre deux variables aléatoires X et Y (i.e. de la forme $Y = aX + b$).

Proposition 3.1.7. *Pour toutes variables X et Y possédant un moment d'ordre deux, on a les propriétés suivantes :*

1. $\rho(X,Y) \in [-1,1]$ *;*
2. *si $X \perp Y$, alors $\rho(X,Y) = 0$. La réciproque n'est pas vraie en général ;*
3. *si il existe une relation linéaire entre X et Y alors $\rho(X,Y) = \pm 1$.*

Exemple 3.1.8. On place au hasard deux billes dans deux boîtes A et B. On note X la variable aléatoire "nombre de billes dans la boîte A" et Y la variable aléatoire "nombre de boîtes vides". Les lois, espérances et variances de X, Y et XY sont :

$$\mathbb{P}(X=0) = 1/4, \quad \mathbb{P}(X=1) = 1/2, \quad \mathbb{P}(X=2) = 1/4, \quad \mathbb{E}[X] = 1, \mathrm{var}(X) = 1/2,$$

$$\mathbb{P}(Y=0) = 1/2, \quad \mathbb{P}(Y=1) = 1/2, \quad \mathbb{E}[Y] = 1/2, \mathrm{var}(Y) = 1/4,$$

$$\mathbb{P}(XY=0) = 3/4, \quad \mathbb{P}(XY=1) = 0, \quad \mathbb{P}(XY=2) = 1/4, \quad \mathbb{E}[XY] = 1/2.$$

Le coefficient de corrélation $\rho(X,Y)$ est nul car

$$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 1/2 - 1 \times 1/2 = 0.$$

Cependant les variables X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, X et Y ne peuvent s'annuler simultanément car il est impossible d'avoir à la fois aucune bille dans la boite A et aucune boite vide. On a donc

$$0 = \mathbb{P}(X = 0 \text{ et } Y = 0) \neq \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0) = 1/4 \times 1/2 = 1/8.$$

3.2 Convergence de variables aléatoires

Les théorèmes limite qui font l'objet de ce chapitre concernent le comportement asymptotique de suites de variables aléatoires. Ils traduisent la convergence de ces suites vers des limites, qui peuvent être déterministes mais aussi aléatoires. Nous précisons ici en quel sens une suite de variables aléatoires peut admettre une limite.

3.2.1 Les différents types de convergence

Nous commençons par donner la définition de la converge en probabilité d'une suite de variables aléatoires.

Convergence en probabilités

Définition 3.2.1 (convergence en probabilités). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire X, et on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[|X_n - X| > \varepsilon\right] = 0,$$

ou de manière équivalente :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[|X_n - X| \leqslant \varepsilon\right] = 1.$$

Exemple 3.2.2. Soit (X_n) une suite de variables indépendantes à valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$ et telles que $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1/n$, et donc $\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - 1/n$. Alors la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable “aléatoire” constante égale à un. En effet, fixons $0 < \varepsilon < 1$. Lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/n \longrightarrow 0.$$

Exemple 3.2.3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}(X_n = 2 - 1/n) = 1/3$ et $\mathbb{P}(X_n = 2 + 1/n) = 2/3$. Alors la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable “aléatoire” constante égale à 2. En effet, fixons $0 < \varepsilon < 1$. On a toujours $|X_n - 2| = 1/n$ de sorte que pour $n > 1/\varepsilon$:

$$\mathbb{P}(|X_n - 2| > \varepsilon) = 0.$$

Exemple 3.2.4. Considérons une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0,1\}$ et telle que $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable X_n de la façon suivante : si X vaut 1, alors X vaut 1 ; si X vaut zéro, alors X_n vaut $1/n$. Alors, n tend vers l'infini, la suite X_n converge en probabilité vers X. En effet, on a toujours $|X_n - X| = 1/n$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, dès que $n > 1/\varepsilon$, on a alors :

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Exemple 3.2.5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Alors, losque n tend vers l'infini, la suite de variables aléatoires $Y_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$ converge en probabilité vers la constante 1. En effet, soit $0 < \varepsilon < 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Y_n - 1| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) < 1 - \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(X_1 < 1 - \varepsilon) \ldots \mathbb{P}(X_n < 1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Il existe une notion de convergence qui est plus forte que la convergence en probabilité, c'est la convergence presque sûre : toute suite qui converge presque sûrement converge en probabilité.

Convergence presque sûre

Définition 3.2.6 (convergence presque sûre). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que la suite (X_n) converge presque sûrement vers une variable aléatoire X, et on note $X_n \xrightarrow{p.s.} X$, si il existe un sous ensemble A de Ω avec $\mathbb{P}(A) = 1$ et pour tout $\omega \in A$:

$$X_n(\omega) \to X(\omega).$$

Exemple 3.2.7. Considérons l'espace de probabilté $(, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $= [0,1]$, $\mathcal{F}$ est la tribu borélienne, et $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère la variable aléatoire X_n définit comme suit :

$$X_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad X_n(\omega) = \min(n \times \omega, 1).$$

Soit $A :=]0,1]$, on a $\mathbb{P}(A) = 1$. Par ailleurs, pour tout $\omega \in A$, on a $n \times \omega \to +\infty$, donc pour n assez grand $X_n(\omega) = 1$. La suite de variables aléatoires X_n converge donc presque sûrement vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

Exemple 3.2.8. On reprend l'exemple 3.1.8. À la variable XY qui est à valeurs dans $= \{0,1,2\}$, on associe la suite Z_n définie par la formule :

$$Z_n = \left(1 - \frac{(XY-1)^2}{2}\right)^n.$$

Lorsque XY vaut 0 ou 2, on a $Z_n = 1/2^n$ qui converge vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Lorsque XY vaut 1, ce qui arrive avec probabilité $\mathbb{P}(XY = 1) = 0$, Z_n vaut 1. On peut donc affirmer que presque sûrement la suite de variables aléatoires converge presque sûrement vers zéro.

Nous définissons enfin un dernier mode de convergence, plus faible que les deux précédents, dont l'importance sera mise en évidence dans l'énoncé du théorème limite central.

Convergence en loi

Définition 3.2.9 (convergence en loi). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X, et on note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, si la suite des fonctions de répartition F_{X_n} converge vers F_X en tout point de continuité de F_X, *i.e.* lorsque n tend vers l'infini, pour tout x où F_X ne "saute" pas :

$$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n \leqslant x) \longrightarrow F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

Exemple 3.2.10. Soit (X_n) une suite de variables indépendantes et uniformes à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1/2^n, 2/2^n, \ldots, 1\}$, *i.e.* telles que

$$\mathbb{P}(X_n = k/n) = 1/(2^n + 1), \quad k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}.$$

Alors la suite (X_n) converge en loi vers la variable aléatoire X de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. En effet, soit $x \in [0, 1]$ alors pour tout n il existe k_n tel que $k_n/2^n \leqslant x < (k_n + 1)/2^n$ et donc $k_n/2^n \to x$. Dès lors,

$$\mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \frac{k_n}{2^n} \to x = F_X(x).$$

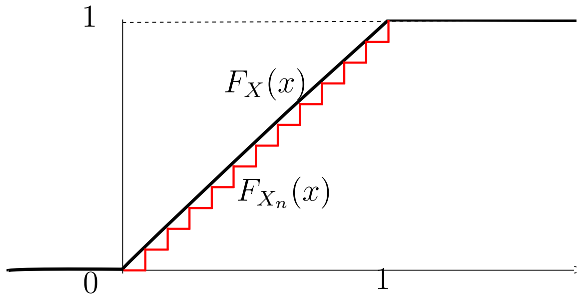

FIGURE 3.1 – Fonction de répartition des lois uniformes continue et discrètes.

Exemple 3.2.11. Les variables exponentielles sont caractérisées par leur fonction de répartititon : si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$. Soient (a_n) une suite de nombres réels positifs tels que $\sum_1^{+\infty} a_n = 2$, et (X_n) des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(a_n)$. Alors la suite $Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ converge en loi vers une variable de loi $\mathcal{E}(2)$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_n > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x, \ldots, X_n > x) = \mathbb{P}(X_1 > x) \ldots \mathbb{P}(X_n > x) \\
&= e^{-a_1 x} \times \ldots \times e^{-a_n x} = \exp\left[-\left(\textstyle\sum_1^n a_k\right) x\right] \longrightarrow e^{-2x}.
\end{aligned}$$

3.3 Les théorèmes limites

Nous pouvons à présent énoncer les deux théorèmes limite fondamentaux qui seront nos principaux outils dans la suite du cours, en particulier dans la partie du cours consacrée aux statistiques. Nous énonçons ainsi tout d'abord la loi des grands nombres puis le théorème limite central, en donnant à chaque fois des exemples d'applications de ces résultats.

3.3.1 Loi des grands nombres

La loi des grands nombres est le premier résultat fondamental de la théorie des probabilités. Elle concerne la moyenne arithmétique de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Voici l'énoncé précis du théorème :

Théorème 3.3.1. *Soit* (X_n) *une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, telle que* $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$*. Alors lorsque* n *tend vers l'infini, on a*

$$\frac{S_n}{n} := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.\ et\ \mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1],$$

autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ *:*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| > \varepsilon\right] = 0,$$

et même, il existe $A \subset \Omega$ *tel que* $\mathbb{P}(A) = 1$ *et pour tout* $\omega \in A$ *:*

$$\frac{S_n(\omega)}{n} = \frac{X_1(\omega) + \ldots + X_n(\omega)}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[X_1].$$

Remarque 3.3.2. La loi des grands nombres justifie la démarche intuitive suivante : pour connaître le résultat moyen d'une expérience aléatoire, on refait un grand nombre de fois l'expérience et on considère la moyenne arithmétique des résultats obtenus. En y réfléchissant bien, il n'est pas du tout clair a priori que la moyenne arithmétique des résultats soit une bonne approximation du résultat moyen. La loi des grands nombres justifie rigoureusement ce résultat intuitif.

Exemple : mutation d'un gène

Parmi de nombreuses causes, une certaine maladie est déclenchée par la mutation d'un gène sur un chromosome. Pour avoir une idée du nombre de personnes dans la population susceptibles d'être atteintes par cette maladie, on souhaite connaître la proportion de la population chez qui il y a eu mutation. On demande ainsi à n personnes de se soumettre à un test, on note $\{X_i = 0\}$ (resp. $\{X_i = 1\}$ les évènements il n'y a pas (resp. il y a) mutation chez la $i-$ème personne testée.

On fait l'hypothèse que les résultats des tests sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes, autrement dit que les variables X_i sont indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p, la proportion théorique de mutation au sein de la population. D'après la loi des grands nombres, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\frac{S_n}{n} := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1] = p.$$

Autrement dit, avec une grande probabilité, si n est assez grand, la moyenne arithmétique S_n/n est proche de p. Une bonne valeur approchée de la proportion de personne chez qui la mutation est apparue est donc S_n/n. Dans la pratique, une valeur de n de l'ordre de 1000 ou 10000 fournit déjà une bonne approximation de p.

Exemple : nombre d'accidents

Afin de fixer ses primes pour l'année à venir, une compagnie d'assurance souhaite connaître le nombre moyen de sinistres auquels seront confrontés ses clients dans l'année. Les sinistres sont des évènements rares et l'expérience montrent que pour chaque client, leur nombre peut être modélisé par une variable de Poisson de paramètre λ. On suppose aussi que les nombres de sinistres pour deux clients distincts sont indépendants. La difficulté ici est choisir le paramètre $\lambda > 0$.

Pour se faire, la compagnie ouvre ses archives et observe le nombre de sinistres pour 100 de ses clients sur les 20 dernières années. On note ainsi X_i les nombres de sinistres individuels annuels, où $i = 1 \ldots 2000$. D'après la loi des grands nombres, si X_i est une suite de variables indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\frac{S_n}{n} := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1] = \lambda.$$

Autrement dit, avec une grande probabilité, si n est assez grand, la moyenne arithmétique S_n/n est proche de λ. Une bonne valeur approchée du nombre moyen de sinistres par client chaque année est $S_{2000}/2000$.

Exemple : pile ou face

Vous jouez un grand nombre de fois de suite à pile ou face. Vous gagnez un euro à chaque pile et perdez un euro à chaque face. On note S_n le gain après n lancers. Ce gain peut sécrire sous la forme $S_n = \sum_1^n X_i$ où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\pm 1, p)$, $p \in [0, 1]$. Le cas d'une pièce équilibrée correspond bien sûr à $p = 1/2$. On s'intéresse aux questions du type : après n lancers, êtes-vous bénéficiaire ? quel est votre gain moyen ? etc.

La réponse à ces questions est donnée par la loi des grands nombres. En effet, d'après le théorème, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\frac{S_n}{n} := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1] = 2p - 1.$$

Ainsi, si $p > 1/2$ et n est assez grand, avec une grande probabilité on a $S_n \sim n(2p-1) > 0$ et vous êtes bénéficiaire. En revanche, lorsque $p < 1/2$, il vaut mieux arrêter de jouer rapidement sous peine d'être ruiné ! Le cas où $p = 1/2$ est plus difficile à trancher. Pour ce faire, on a besoin d'un résultat plus fin que la loi des grands nombres.

3.3.2 Théorème limite central

La loi des grands nombres exprime le fait que la moyenne arithmétique d'une suite de variables indépendantes (X_n) de même loi converge vers la moyenne stochastique de la loi en question, c'est-à-dire $\mathbb{E}[X_1]$. Le théorème limite central est un raffinement de la loi des grands nombres : il précise à quelle vitesse a lieu cette convergence, et comment la moyenne arithmétique fluctue autour de sa limite.

Théorème 3.3.3. *Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, telle que $\mathbb{E}[|X_1|] < +\infty$ et $\mathbb{E}[|X_1|^2 < +\infty$. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = var(X_1)$. Alors, lorsque n tend vers l'infini, on a*

$$\sqrt{n} \times \left(\frac{S_n}{n} - m \right) := \frac{(X_1 - m) + \ldots + (X_n - m)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

ou de manière équivalente :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \times \left(\frac{S_n}{n} - m \right) := \frac{(X_1 - m) + \ldots + (X_n - m)}{\sigma \times \sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0, 1).$$

Autrement dit, pour tout x dans $\mathbb{R}$, lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \times \left(\frac{S_n}{n} - m \right) \leqslant x \right] \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) \leqslant x),$$

ou encore pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \times \left(\frac{S_n}{n} - m \right) \in [a, b] \right] \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) \in [a, b]).$$

Remarque 3.3.4. Le théorème limite central exprime le fait que dans la loi des grands nombres, les fluctuations autour de la moyenne limite sont de l'ordre de $1/\sqrt{n}$ et que la loi de ces fluctuations est universelle : elle est gaussienne et ne dépend pas la loi initiale des variables X_i :

$$S_n = n \times m + \sigma \times \sqrt{n}\, \mathcal{N}(0, 1) + o(\sqrt{n}),$$

$$i.e. \ \frac{S_n}{n} = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, \mathcal{N}(0, 1).$$

L'universalité des fluctuations explique pourquoi la loi normale est omniprésente dans la modélisation de phénomènes aléatoires.

Exemple : mutation d'un gène

On reprend l'exemple de l'estimation de la proportion de mutation dans la population. On souhaite préciser l'erreur commise lorsque l'on approche la valeur théorique $p = \mathbb{E}[X_1]$ par la moyenne empirique S_n/n. On rappelle que la variance d'une variable de Bernoulli de paramètre p est $\sigma^2 = p(1-p)$. D'après le théorème limite central, lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \times \left(\frac{S_n}{n} - p\right) := \frac{(X_1 - p) + \ldots + (X_n - p)}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

En prenant les valeurs absolues, on obtient :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \times \left|\frac{S_n}{n} - p\right| \xrightarrow{loi} |\mathcal{N}(0,1)|.$$

Soit $x_0 = 1.961$ de sorte que $\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| > x_0) \leqslant 5\%$. Lorsque n tend vers l'infini, on a alors,

$$\mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} \times \left|\frac{S_n}{n} - p\right| > x_0\right] \longrightarrow \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| > x_0) \leqslant 5\%.$$

Autrement dit,

$$\mathbb{P}\left(p \notin \left[\frac{S_n}{n} - \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}x_0, \frac{S_n}{n} + \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}x_0\right]\right) \longrightarrow \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| > x_0) \leqslant 5/\%.$$

Comme on a toujours $p(1-p) < 1/4$, on conclut que lorsque n tend vers l'infini :

$$\mathbb{P}\left(p \notin \left[\frac{S_n}{n} - \frac{x_0}{2\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{x_0}{2\sqrt{n}}\right]\right) \leqslant 5\%.$$

Pour n assez grand, on peut donc affirmer qu'avec une probabilité supérieure à 95%, le taux de mutation moyen p appartient à l'intervalle

$$I_n := \left[\frac{S_n}{n} - \frac{x_0}{2\sqrt{n}}, \frac{S_n}{n} + \frac{x_0}{2\sqrt{n}}\right].$$

Exemple : nombre d'accidents

On reprend l'exemple précédent du nombre de sinistres. Là encore, on souhaite contrôler l'erreur commise en disant que le nombre moyen de sinistre λ est proche de S_n/n. On rappelle que la variance d'une loi de Poisson de paramètre λ est $\sigma^2 = \lambda$. D'après le théorème limite central, lorsque n tend vers l'infini, on a

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda}} \times \left(\frac{S_n}{n} - \lambda\right) := \frac{(X_1 - \lambda) + \ldots + (X_n - \lambda)}{\sqrt{n\lambda}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

En prenant les valeurs absolues, on obtient alors :

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda}} \times \left| \frac{S_n}{n} - \lambda \right| \xrightarrow{loi} |\mathcal{N}(0,1)|.$$

Soit $x_0 = 2.5759$ de sorte que $\mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| > x_0) < 1\%$. Lorsque n tend vers l'infini, on a alors,

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{\frac{n}{\lambda}} \times \left| \frac{S_n}{n} - \lambda \right| > x_0 \right] \longrightarrow \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| > x_0) < 1\%.$$

Autrement dit,

$$\mathbb{P}\left(\lambda \notin \left[\frac{S_n}{n} - \sqrt{\frac{\lambda}{n}} \times x_0, \frac{S_n}{n} + \sqrt{\frac{\lambda}{n}} \times x_0 \right] \right) \longrightarrow \mathbb{P}(|\mathcal{N}(0,1)| > x_0) < 1/\%.$$

On peut montrer que la convergence a encore lieu lorsque l'on remplace la variance λ par S_n/n, *i.e.*

$$\mathbb{P}\left(\lambda \notin \left[\frac{S_n}{n} - \sqrt{\frac{S_n}{n^2}} \times x_0,\ \frac{S_n}{n} + \sqrt{\frac{S_n}{n^2}} \times x_0 \right] \right) \leqslant 1\%.$$

Pour n assez grand, on peut donc affirmer qu'avec une probabilité supérieure à 99%, le nombre moyen d'accidents λ appartient à l'intervalle

$$I_n = \left[\frac{S_n}{n} - \sqrt{\frac{S_n}{n^2}} \times x_0,\ \frac{S_n}{n} + \sqrt{\frac{S_n}{n^2}} \times x_0 \right].$$

Exemple : pile ou face

On précise maintenant l'évolution du gain dans un jeu de pile ou face symétrique, *i.e.* lorsque $p = 1/2$. La loi des grands nombres donne :

$$\frac{S_n}{n} := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_1] = 2p - 1 = 0.$$

Le théorème limite central précise :

$$2\sqrt{n} \times \frac{S_n}{n} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1).$$

Pour tout intervalle $[a,b] \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{2S_n}{\sqrt{n}} \in [a,b] \right) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \in [a,b]) > 0.$$

Autrement dit, la gain normalisé $S_n/\sqrt{n}$ visite n'importe quel intervalle avec une probabilité strictement positive.

Exemple : prix d'une action

Le prix S_n d'une action au jour n est modélisé ainsi : $S_0 = s > 0$ est fixé, et $S_{n+1} = (1 + r + \sigma\varepsilon_{n+1})S_n$, où $r > 0$ est un taux fixe, $\sigma \in]0, 1 + r[$ est une volatilité fixe, et $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli $B(\pm 1, 1/2)$. On souhaite répondre aux questions suivantes :

1. Étudier le comportement des suites $(\log S_n)/n$ et S_n.
2. Étudier le comportement de la suite $(\log S_n)/\sqrt{n}$ lorsque $(1 + r)^2 = 1 + \sigma^2$.
3. Étudier le comportement de la suite suivante :

$$\left[(1+r)^2 - \sigma^2\right]^{\left(-1/(2\sqrt{n})\right)} \times S_n^{1/\sqrt{n}}.$$

On montre tout d'abord aisément par récurrence que pour $n > 0$, on a

$$S_n = \prod_{i=1}^{n} (1 + r + \sigma\varepsilon_i)s.$$

En prenant le logarithme, on obtient :

$$\log(S_n) = \log s + \sum_{i=1}^{n} Y_i, \quad \text{où l'on a posé } \; Y_i := \log(1 + r + \sigma\varepsilon_i).$$

Comme les variables ε_i, les variables Y_i sont indépendantes et identiquement distribuées. Par ailleurs, comme $0 < \sigma < 1 + r$, on a

$$\mathbb{E}[|Y_1|] = \frac{1}{2}|\log(1 + r + \sigma)| + \frac{1}{2}|\log(1 + r - \sigma)| < +\infty,$$

et

$$\mathbb{E}[Y_1^2] = \frac{1}{2}|\log(1 + r + \sigma)|^2 + \frac{1}{2}|\log(1 + r - \sigma)|^2 < +\infty.$$

Le calcul de l'espérance $m = \mathbb{E}[Y_1]$ et de la variance $\sigma^2 = \mathbb{E}[Y_1^2] - \mathbb{E}[Y_1]^2$ donne :

$$\begin{aligned}
m &= \tfrac{1}{2}\log(1 + r + \sigma) + \tfrac{1}{2}\log(1 + r - \sigma) \\
&= \tfrac{1}{2}\log\left((1 + r - \sigma) \times (1 + r - \sigma)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\log\left((1 + r)^2 - \sigma^2\right) = \log\left(\sqrt{(1 + r)^2 - \sigma^2}\right), \\
\sigma^2 &= \tfrac{1}{4}\log(1 + r + \sigma^2) + \tfrac{1}{4}\log(1 + r - \sigma)^2 - \tfrac{1}{2}\log(1 + r + \sigma)\log(1 + r - \sigma) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(\log(1 + r + \sigma) - \log(1 + r - \sigma)\right)^2 = \tfrac{1}{4}\left(\log\left(\tfrac{1+r+\sigma}{1+r-\sigma}\right)\right)^2.
\end{aligned}$$

Il s'agit ici naturellement d'utiliser la loi des grands nombres et le théorème limite central.

1. Les variables Y_i satisfont aux hypothèses de la loi des grands nombres, d'après le théorème 3.3.1 on peut affirmer que lorsque n tend vers l'infini :
$$\frac{\log(S_n)}{n} = \frac{\log s}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{\mathbb{P}} m = \mathbb{E}[Y_1].$$
On a donc, lorsque n tend vers l'infini :
$$S_n = \exp\left(n \times m + o_{\mathbb{P}}(n)\right).$$
Il y a donc une dichotomie selon que $m > 0$ ou $m < 0$. Si $m > 0$, c'est-à-dire si $(1+r)^2 > 1+\sigma^2$ le prix de l'action croît exponentiellement vite vers l'infini. $m < 0$, c'est-à-dire si $(1+r)^2 < 1+\sigma^2$ la prix de l'action tend exponentiellement vite vers zéro. Le cas $m = 0$ est plus subtil.
2. Le cas où $(1+r)^2 = 1+\sigma^2$ correspond au cas $m = 0$. Comme Y_i admet un moment d'ordre deux, on peut appliquer le théorème limite central, lorsque n tend vers l'infini :
$$\frac{\log(S_n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$
Pour tout intervalle $[a,b] \in \mathbb{R}$, on a donc
$$\mathbb{P}\left(\frac{\log(S_n)}{\sqrt{n}} \in [a,b]\right) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,\sigma^2) \in [a,b]) > 0.$$
Autrement dit, le prix normalisé $\log(S_n)/\sqrt{n}$ visite n'importe quel intervalle avec une probabilité strictement positive.
3. Plus généralement, le théorème 3.3.3 donne :
$$\sqrt{n}\left(\frac{\log(S_n)}{n} - m\right) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$
c'est-à-dire :
$$\left(\frac{\log(S_n)}{\sqrt{n}} - m \times \sqrt{n}\right) \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,\sigma^2),$$
et en prenant l'exponentielle :
$$\exp\left[\frac{\log(S_n)}{\sqrt{n}}\right] \exp\left[-m \times \sqrt{n}\right] \xrightarrow{loi} \exp\left(\mathcal{N}(0,\sigma^2)\right),$$
ou encore
$$S_n^{1/\sqrt{n}} e^{-m\sqrt{n}} = S_n^{1/\sqrt{n}} \times \left[(1+r)^2 - \sigma^2\right]^{(-1/(2\sqrt{n}))} \xrightarrow{loi} \exp\left(\mathcal{N}(0,\sigma^2)\right).$$