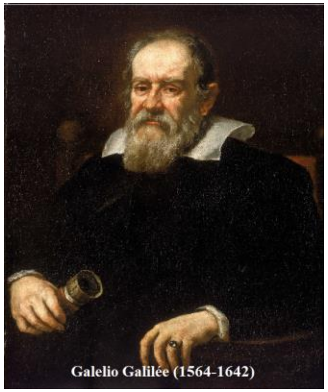
Chapitre II: Dynamique d'un point matériel

II.1. Objectif :

La cinématique a pour objet l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui les provoquent. La dynamique est la science qui étudie (ou détermine) les causes des mouvements de ces corps.



II.2. Principe d'inertie (Principe de Galilée):

Il constitue la première loi de Newton et qui s'énonce comme suit :

« ***Toute particule libre conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces agissant sur elle*** »

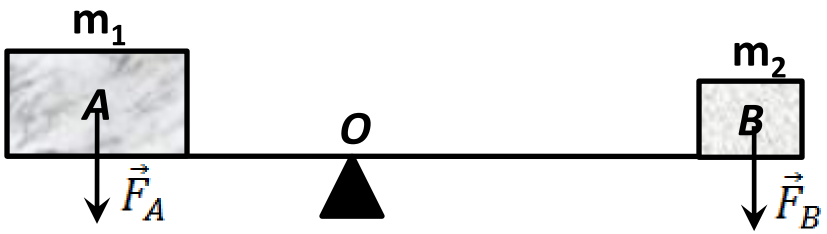
En d'autre terme : Si aucune force n'agit sur un objet ou si la force résultante est nulle :

- Un objet au repos reste au repos.

- Un objet mouvement contenue à se mouvoir à vitesse constante.

II.3. Centre d'inertie ou Barycentre : (Centre de Gravité)

En équilibre, la somme des moments des forces par rapport à « O » est nulle:



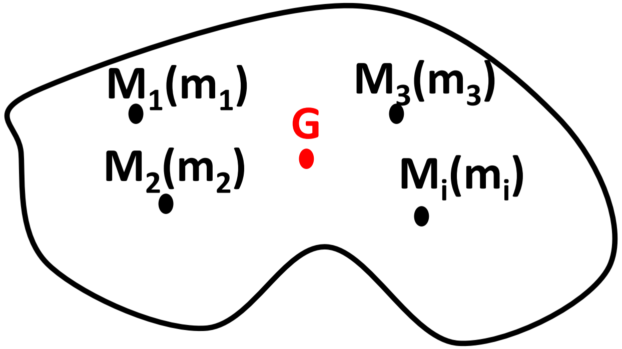
$$\sum \vec{M}_{\vec{F}_i}^{\,O} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_{\vec{F}_A}^{\,O} + \vec{M}_{\vec{F}_B}^{\,O} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{F_B} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} \wedge m_1\vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge m_2\vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}\right) \wedge \vec{g} = \vec{0} \qquad \boxed{\Rightarrow \boldsymbol{m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} = \vec{0}}}$$

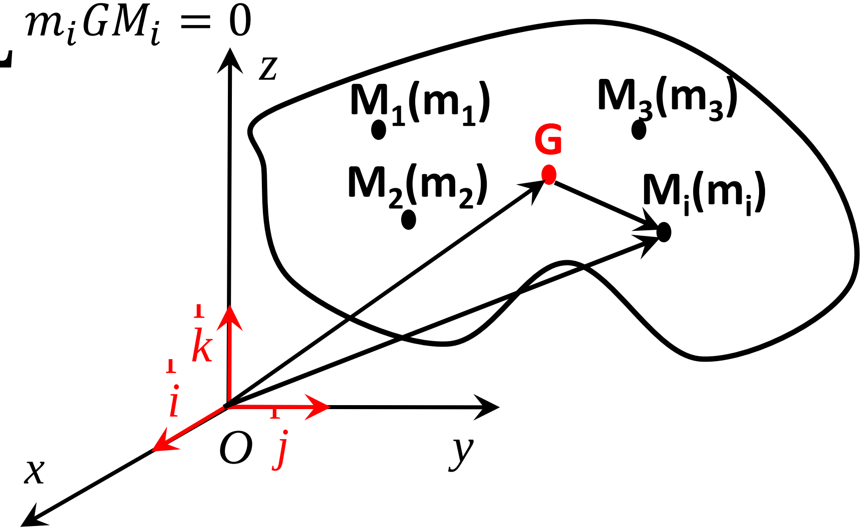
Pour un système quelconque:

$$\boldsymbol{m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + \cdots m_n\overrightarrow{GM_n} = \vec{0}} \quad \Longrightarrow \sum_i m_i\overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$



Pour un système quelconque:

$$\boldsymbol{m_1\overrightarrow{GM_1}+m_2\overrightarrow{GM_2}+\cdots m_n\overrightarrow{GM_n}=\vec{0}} \quad \Longrightarrow \sum_i m_i\overrightarrow{GM_i}=\vec{0}$$



D'autre part, d'après le schéma on a :

$$\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GM_i}=\overrightarrow{OM_i} \Longrightarrow \overrightarrow{GM_i}=\overrightarrow{OM_i}-\overrightarrow{OG}$$

$$\sum_i m_i\overrightarrow{GM_i}=\vec{0} \Longrightarrow \sum_i m_i\left(\overrightarrow{OM_i}-\overrightarrow{OG}\right)=\vec{0}$$

$$\Longrightarrow \sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}=\sum_i m_i\overrightarrow{OG} \quad \Longrightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}$$

$\sum_i m_i = M$, avec M représente la masse totale de système. $\quad \Longrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{M}\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}}$

Cette dernière relation donne le centre d'inertie d'un système constitué de masses m_i situées aux points M_i

- **<u>Pour un milieu continu</u>**, la somme devient intégrale: $\boldsymbol{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{M}\iiint \overrightarrow{OM}\,dM}$

II.4. Quantité de mouvement:

II.4.1. Définition: Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse « m » et se déplaçant à la vitesse $\vec{V}$ est défini par : $\boldsymbol{\vec{P} = m\vec{V}}$

- Le principe d'inertie peut s'énoncer alors de façon suivant:

« Une particule libre, se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère galiléen »

Remarque :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$

$\Longrightarrow$ La dérivé de la quantité de mouvement égale à la somme des forces externe appliqué sur ce corps.

II.4.2. Conservation de la quantité de mouvement:

Un système est dite isolé s'il ne subit aucune force (d'interaction) externe .

$$\vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = Cte$$

- **Pour un système de deux particules de masses m_1 et m_2 isolées :**

La quantité de mouvement totale du système à l'instant « t » est :

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$$

A l'instant « t' » on a : $\overrightarrow{P'} = \overrightarrow{P'}_1 + \overrightarrow{P'}_2 = m_1\overrightarrow{V'}_1 + m_2\overrightarrow{V'}_2$

Système isolé $\Longrightarrow$ La quantité de mouvement totale est conservée:

$$\vec{P} = \overrightarrow{P'} \Longrightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \overrightarrow{P'}_1 + \overrightarrow{P'}_2 \Longrightarrow \overrightarrow{P'}_1 - \vec{P}_1 = \vec{P}_2 - \overrightarrow{P'}_2$$

$$\boxed{\Longrightarrow \overrightarrow{\Delta \boldsymbol{P}_1} = -\overrightarrow{\Delta \boldsymbol{P}_2}}$$

- **Pour un système isolé de « n » particules en interaction :**

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}_T} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\boldsymbol{P}_i} = \boldsymbol{Cte}$$

Exemple:

Un fusil de masse **0,8 kg** tire une balle de masse **0,016 kg** animée d'une vitesse de **700 m/s**.

Calculer la vitesse de recule du fusil.

Solution:

Le système est composé de deux corps : Fusil + Balle

Principe de conservation de la quantité de mouvement : $\overrightarrow{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{avant\ le\ tir}} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{après\ le\ tir}}$

Avant le tir: la quantité de mouvement totale est nulle

Après le tir: la quantité de mouvement totale : $\overrightarrow{\boldsymbol{P}}_{\boldsymbol{après\ le\ tir}}=\vec{P}_F + \vec{P}_B$

$$\vec{P}_F + \vec{P}_B = \vec{0} \Longrightarrow m_F\vec{V}_F + m_B\vec{V}_B = \vec{0}$$

Par projection : $$m_F(-V_F)0 + m_B V_B = 0 \Longrightarrow V_F = \frac{m_B}{m_F} V_B$$

A.N: $$V_F = \frac{0{,}016}{0{,}8} 700 = 14\mathrm{m/s}$$

II.5. <u>Définition Newtonienne de la force</u>:

- Toute cause capable de modifier le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel, dans un référentiel galiléen, est appelée « ***FORCE ».***

- Donc, la force est une notion mathématique qui, par définition, égale à la dérivé de la quantité de mouvement par rapport au temps.

- On défini ***la force moyenne***, pendant un intervalle de temps Δt par:

$$\vec{F}_{moy} = \frac{\overrightarrow{\Delta P}}{\Delta t}$$

- La force instantanée est donnée donc par: $\vec{F}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta P}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dP}}{dt}$

II.5.1. Première loi de Newton:

Si $\vec{F} = \vec{0}\ \vec{V} = Cte$ On obtient la formulation, en terme de force, du principe d'inertie

II.5.1. Principe fondamental de la dynamique (PFD) (2éme loi):

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a} \qquad \textbf{(m=cts)}$$

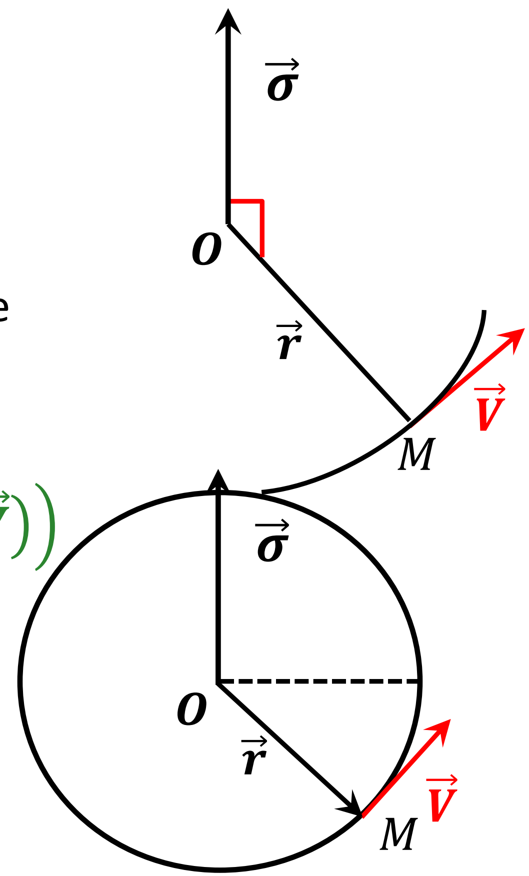
Théorème du moment cinétique:

Le moment cinétique d'un point M ayant une masse « m » et se déplaçant avec une vitesse $\vec{V}$ par rapport à O est donné par:

$$\boldsymbol{\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \quad = \vec{r} \wedge m\vec{V} \quad = m\vec{r} \wedge \vec{V}} \qquad \left(\vec{\sigma} \perp (\vec{r}, \vec{V})\right)$$

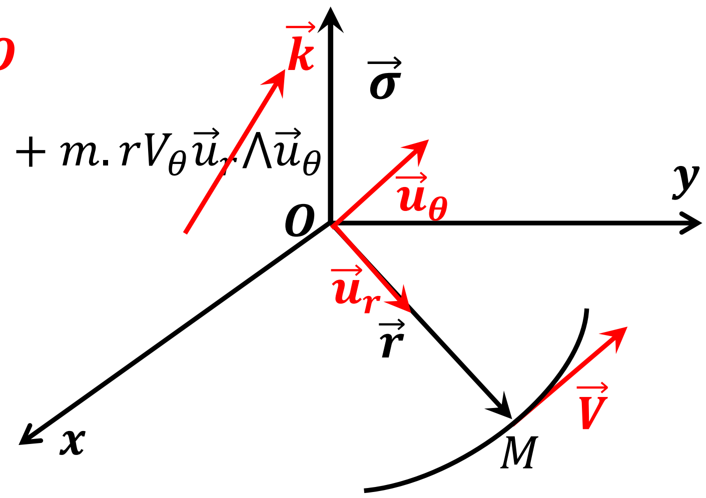
❖ ***Dans le cas d'un mouvement circulaire***, on a :

$\vec{r} \perp \vec{V}$ et $V = r\omega \qquad \Longrightarrow \boldsymbol{\vec{\sigma} = mr\omega^2}$



❖ ***Dans le cas d'un mouvement curviligne plan***:

$$\overrightarrow{OM} = \vec r = r\vec u_r \quad \underline{\textbf{et}} \quad \vec V = V_r\vec u_r + V_\theta \vec u_\theta$$



$$\vec\sigma = m.\vec r\wedge\vec V = m.r\vec u_r\wedge(V_r\vec u_r + V_\theta\vec u_\theta) = m.rV_r\overbrace{\cancel{\vec u_r\wedge\vec u_r}}^{0} + m.rV_\theta\overbrace{\vec u_r\wedge\vec u_\theta}^{\vec k}$$

$$\boxed{\Longrightarrow \boldsymbol{\vec\sigma = m.rV_\theta\vec k}}$$

$$V_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \quad \Longrightarrow \vec\sigma = mr^2\frac{d\theta}{dt}\vec k$$

❖ ***La dérivé de $\vec\sigma$ par rapport au temps est donnée par*** :

$$\frac{\overrightarrow{d\sigma}}{dt} = \frac{d\left(\vec r\wedge m\vec V\right)}{dt} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}\wedge m\vec V + \vec r\wedge m\frac{\overrightarrow{dV}}{dt} \quad = \overbrace{\cancel{\vec V\wedge m\vec V}}^{0} + \vec r\wedge\frac{\overrightarrow{dP}}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{d\sigma}}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{\boldsymbol r}\wedge\sum\vec{\boldsymbol F} = \sum\overrightarrow{\boldsymbol M}_{\vec F_i}{}^{\boldsymbol O} \qquad \textit{(Moment de la force } \vec F)$$

<u>Théorème:</u> *la dérivé, par rapport au temps, du moment cinétique d'une particule est égale au moment de la force qui lui appliqué quand les deux sont mesurés par rapport au même point,*

Exemple:

Etablir l'équation différentielle du mouvement d'un pendule simple en utilisant:

1- Le principe fondamental de la dynamique

2- le théorème du moment cinétique

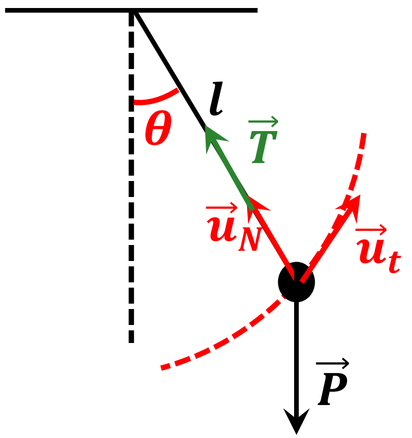
Solution:

1- En appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD):

$$\sum \vec{F}_{Ext} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Par projection:

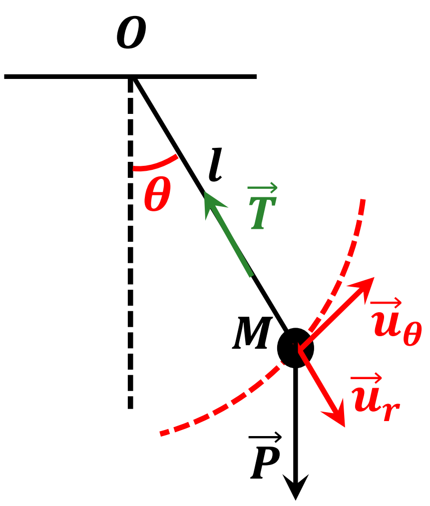
$$\begin{cases} \vec{u}_t : -P_t = ma_t \\ \vec{u}_N : T - P_N = ma_N \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -Psin\theta = ml\dfrac{d^2\theta}{dt^2}, \dots\dots\dots.(I) \\ T - Pcos\theta = ml\omega^2 \dots\dots\dots(II) \end{cases}$$



$$(I) \Leftrightarrow ml\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgsin\theta = 0$$

$$(sin\theta \approx \theta) \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

2- En appliquant le théorème de moment cinétique:



La dérivée du moment cinétique par rapport à **O** est égale à la somme des moments des forces extérieures par rapport à **O**:

$$\left.\frac{\overrightarrow{d\sigma}}{dt}\right|_O = \sum \vec{M}_{\vec{F}_i}{}^{O}$$

$$\vec{\sigma}_{/O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V} = l\vec{u}_r \wedge ml\omega\vec{u}_\theta = ml^2\omega\vec{k} = ml^2\frac{d\theta}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{M}_{\vec{T}}{}^{O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \qquad \left(car\ \theta\left(\overrightarrow{OM}, \vec{T}\right) = \pi\right)$$

$$\vec{M}_{\vec{P}}{}^{O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l.mg.sin\left(\overrightarrow{OM}, \vec{P}\right)\vec{k} = l.mg.\sin(-\theta)\,\vec{k} = -l.mg.\sin\theta\,\vec{k}$$

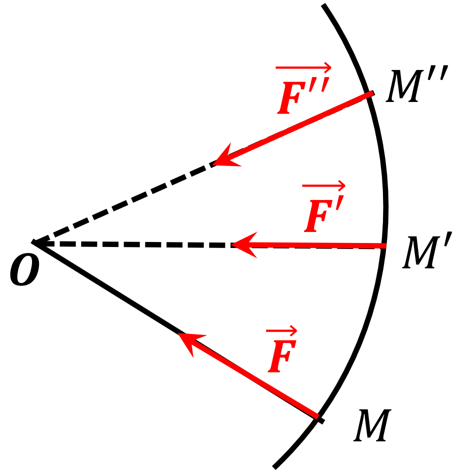
$$\left.\frac{\overrightarrow{d\sigma}}{dt}\right|_O = \sum \vec{M}_{\vec{F}_i}{}^{O} \Longrightarrow ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -lmg.sin\theta \qquad \Longrightarrow l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\theta\ ;\ (sin\theta \approx \theta)$$

$$\boxed{\Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

❖ ***Force centrale:***

Une force dont la direction passe toujours par un point fixe est appelée **force centrale**

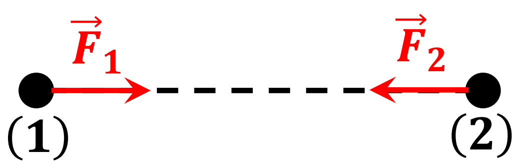
$$\vec{F} \parallel \vec{r} \Longrightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \vec{\sigma} = Cte$$



Principe de l'action et de la réaction **(3éme loi de la dynamique):**

Soient deux points matériaux (1) et (2) interagissant entre eux, l'action de (1) sur (2) $(\vec{F}_1)$ est égale et opposée à celle exercée par(2) sur (1) $(\vec{F}_2)$, soit :

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \ \left(\|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\|\right)$$

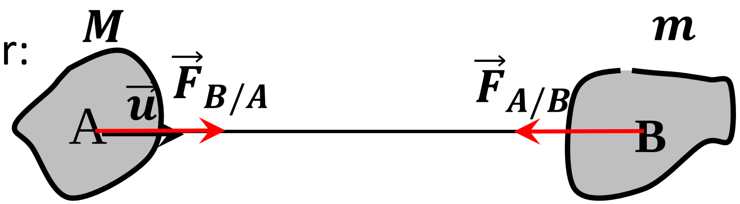


Quelques lois de forces:

1. Loi de la gravitation universelle (Par Newton en 1650):

Cette loi explique les mouvement des planètes autours du soleil.

La force d'attraction entre les M et m est donnée par:



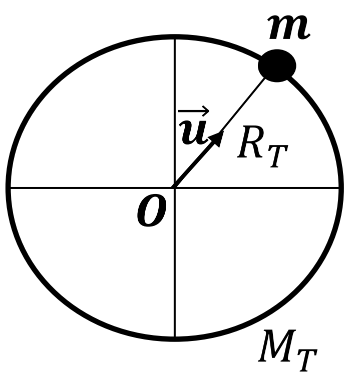
$$\vec{F}_{A/B} = -\frac{GMm}{r^2}\vec{u} \qquad \left(\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}\right)$$

Avec:

$G = 6{,}67259.\,10^{11}\ m^3Kg^{-1}s^{-1}$: Constante de gravitation universelle

$$r = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \qquad \Longrightarrow \vec{F}_{A/B} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$$

Cas particulier: *Le poids d'un objet placé sur la surface de la terre*



$$\vec{F} = -\frac{GM_Tm}{{R_T}^2}\vec{u}$$

On pose $\vec{g} = -\frac{GM_T}{{R_T}^2}\vec{u}$ $\quad \Longrightarrow \vec{F} = m\vec{g}$

$\vec{g}$: Champ de pesanteur de la terre,

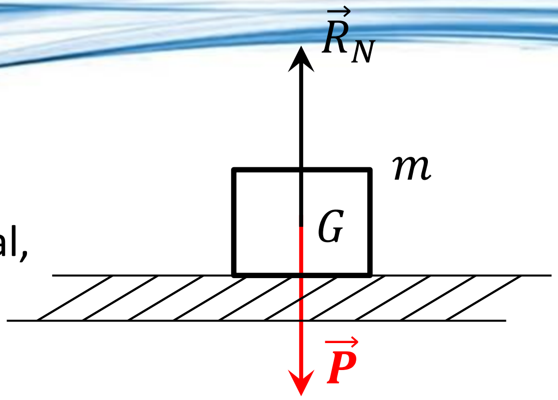
- Au niveau de surface de la terre : $g = g_0 = \frac{GM_T}{{R_T}^2}$
- A une altitude « ***h*** » de la surface de la terre : $g = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2} = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2}\frac{{R_T}^2}{{R_T}^2}$

$$\Longrightarrow g = \frac{GM_T}{{R_T}^2}\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2 = g_0\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2$$

En négligeant la vitesse de rotation de la terre sur elle-même,

2. Forces de contact :

2.1. Réaction de support :



- La force que subit une masse m, posée sur un support horizontal, en provenance de support s'appelle **« force de support »**

- La réaction de support sur m est repartie sur toute la surface de contact « Support-objet »

  $\vec{R}_N$: Représente la résultante de toutes les actions exercés sur la surface de contact

- En équilibre : $\vec{R}_N + \vec{P} = 0 \Longrightarrow \vec{R}_N = -\vec{P}$

2.2. Forces de frottement:

- Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent:

- Soit lors de mouvement d'un objet.
- Soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir de le déplacé.

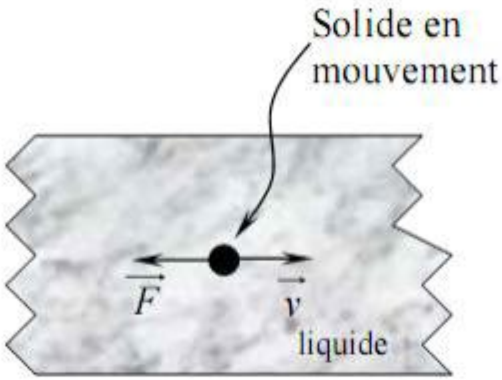
- On distingue de type de forces de frottement:

- Frottement visqueux (contact: solide – liquide).
- Frottement solide (contact: solide-solide).

2.2.1. Frottement visqueux:

Les frottements visqueux est lié au mouvement de l'objet M dans un milieu fluide (air, liquide ou autre)

Pour de faibles vitesses, le frottement est proportionnel en norme à la vitesse de déplacement de l'objet.



$$\vec{F} = -k\vec{V}$$

Force de frottement

Constante positif

Vitesse de l'objet

On donne : $k = -K\eta$

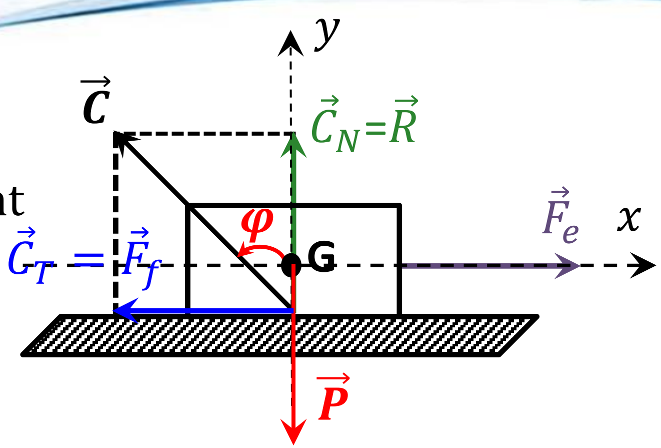
K: *dépend de la forme géométrique du corps*

η: coefficient de viscosité de fluide, dépend du frottement interne de fluide,

Remarque: Pour des vitesses plus grandes, des expériences ont montré que les forces de frottements dans ce cas sont données par:

$$\vec{F} = -kV^n\vec{u} \qquad \text{avec } n \geq 2$$

2.2.2. Frottement solide:



$\vec{F}_e$: force d'entrainemment $\vec{C}$: force de contact

$\vec{C}_N = \vec{R}$: reaction de surface $\vec{C}_T = \vec{F}_f$: foce de frottement

- Le corps est initialement au repos;
- On augmente progressivement la valeur de $\vec{F}_e$
- Chaque fois qu'on augmente $\vec{F}_e$ la valeur de la force de frottement $\vec{F}_f$ augmente jusqu'à l'arrivé à une valeur maximale $\vec{F}_{e0} = \vec{C}_{T0}$ qui correspond au début de glissement de l'objet. $\Longrightarrow$ Cette position est appelée: Etat d'équilibre limite,

Appliquant le PFD dans ce cas : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_e = \vec{0}$

Par projection sur les axes (Ox) et (Oy): $\begin{cases} F_e - C_{T0} = 0 \\ C_{N0} - P = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_{T0} = F_e \\ C_{N0} = P \end{cases}$

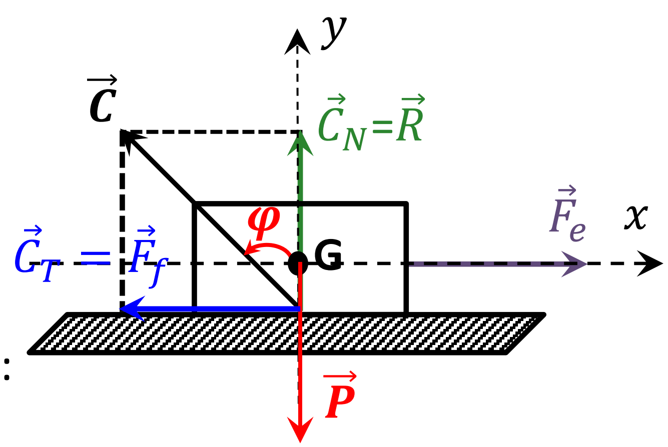
- On défini aussi le coefficient de frottement statique :

$$\boldsymbol{\mu_s = tg\varphi = \frac{C_{T0}}{C_{N0}}}$$: caractérise l'état d'équilibre limite

- Quand $\vec{F}_e > \vec{F}_{f0}$, l'objet se met à bouger de son état d'équilibre avec un mouvement uniformément accéléré
- Appliquant le PFD dans ce cas : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \vec{P} + \vec{C} + \vec{F}_e = m\vec{a}$

<u>Par projection sur les axes (Ox) et (Oy):</u>

$$\begin{cases} F_e - C_T = ma \\ C_N - P = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} C_T = F_e - ma \\ C_N = P \end{cases}$$



- On défini alors le coefficient de frottement dynamique :

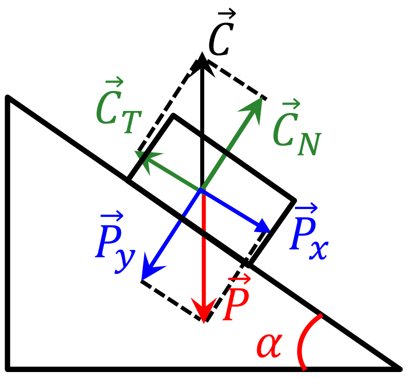
$$\mu_d = tg\varphi = \frac{C_T}{C_N} = \frac{F_e - ma}{mg}$$

<u>Remarques:</u>

- ❑ μ_s et μ_d dépendent de la nature des surfaces en contact,
- ❑ μ_d est inferieur à μ_S
- ❑ μ_d est sensiblement indépendant de la vitesse
- ❑ μ_d est sensiblement indépendant de la superficie des surfaces en contact et ne dépend que de leurs natures

Application: ***Plan incliné***

- ***A l' état d 'équilibre limite :*** $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \vec{P} + \vec{C}_0 = \vec{0}$



Par projection:

$$\begin{cases} P_x - C_{T0} = 0 \\ C_{N0} - P_y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} Psin\alpha_0 = C_T \dots\dots\dots\dots (1) \\ Pcos\alpha_0 = C_N \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\boxed{(1)/(2) \Longrightarrow tg\alpha_0 = \frac{C_T}{C_N} = \mu_S}$$

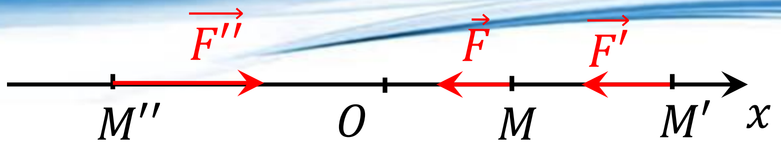
- **A l' état de mouvement:** $\alpha_0 \rightarrow \alpha \quad (\alpha = \alpha_0 + d\alpha)$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a} \quad \Longrightarrow \vec{P} + \vec{C} = m\vec{a}$$

Par projection: $\begin{cases} P_x - C_T = ma \\ C_N - P_y = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \begin{cases} Psin\alpha - ma = C_T \dots (1) \\ Pcos\alpha = C_N \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

$$\boxed{\mu_d = tg\alpha = \frac{C_T}{C_N} = \frac{Psin\alpha - ma}{Pcos\alpha} == \frac{gsin\alpha - a}{gcos\alpha}}$$

3. Force élastique:

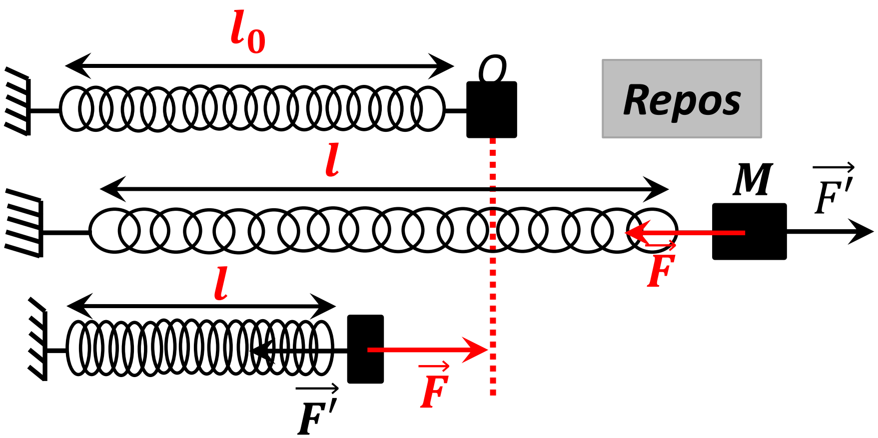


$\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} \Longrightarrow$ proportionnelle et opposée au vecteur position $\overrightarrow{OM}$

k : *constante de raideur*

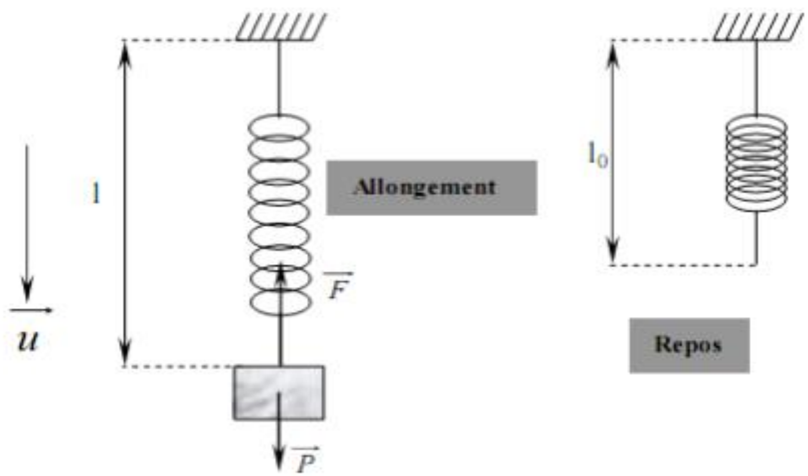
Par projection sur l'axe *(Ox):* $\vec{F} = -kx\vec{\imath}$

Exemple:



$$\vec{F} = -k\overrightarrow{OM} = -k(l - l_0)\vec{\imath}$$

Ou

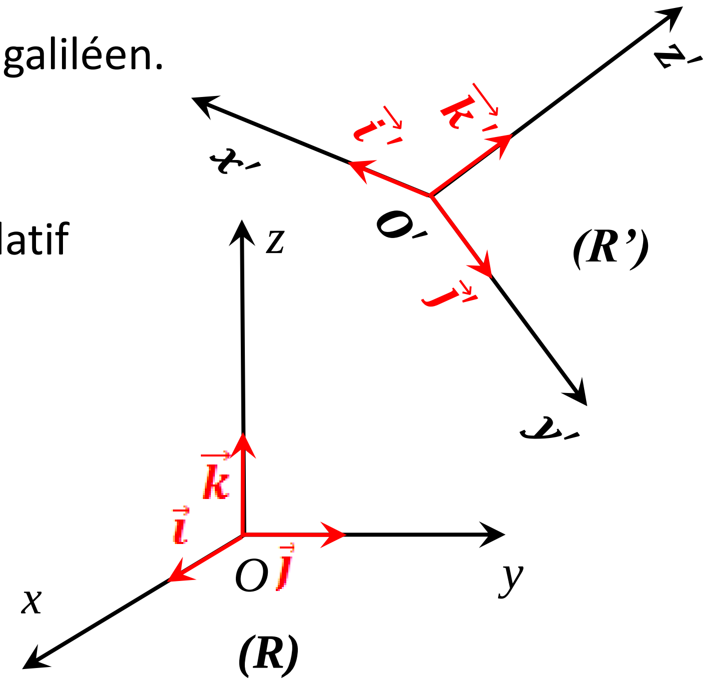


$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

II.6. Principe fondamental de la dynamique dans un repère non galiléen

- (*R*)un référentiel galiléen et (*R*‘) un référentiel non galiléen.
- *R*' est en mouvement par rapport à *R*.

$\Longrightarrow$ *R* est le référentiel absolu et *R*' est le référentiel relatif



$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C$$

$$\Longrightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_a \quad = m\vec{a}_r + m\vec{a}_e + \vec{a}_C$$

Dans le repère *R*', le PFD est:

$$m\vec{a}_r = m\vec{a}_a - m\vec{a}_e - \vec{a}_C \ = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_C$$

$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$est la force d'inertie d'entraînement,

$\vec{F}_C = -m\vec{a}_C$est la force d'inertie de Coriolis,

$\vec{F}_e$ et $\vec{F}_C$ sont des forces non réels, elles dépendent de mouvement de R’/R.