Chapitre 3

Relations Binaires

Sommaire

3.1 Généralités

Définition 3.1.1. *Etant donné deux ensembles E et F. Une relation de E vers F est toute assertion reliant un élément de E à un élément de F pouvant être vérifiée ou non. On note une relation par $\mathcal{R}$.*
L'ensemble E s'appelle l'ensemble de départ de $\mathcal{R}$, F l'ensemble d'arrivée de $\mathcal{R}$.
Pour tout élément $x \in E$ et tout élément $y \in F$ vérifiant $\mathcal{R}$, on dit que x de E est en relation par $\mathcal{R}$ avec y, ce que l'on note $x\mathcal{R}y$, sinon on écrit $x \not\mathcal{R} y$.
Si E=F, la relation $\mathcal{R}$ est dite relation binaire dans E.

Exemples 3.1.1. *Voici quelques exemples simples de relations binaires :*

- *On considère les ensembles $E = \{1, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 17\}$ $F = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et la relation $\mathcal{R}$ définie de E dans F*

par « ... est le double de ... »
- l'élément 4 de E est le double de l'élément 2 de F alors $4\mathcal{R}2$.
- l'élément 11 de E n'est pas le double de l'élément 5 de F alors $11 \not\mathcal{R} 5$.

- $\mathcal{P}(E)$ *l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble E. On définit la relation* $\mathcal{R}$ *dans* $\mathcal{P}(E)$ *par :*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ A\mathcal{R}B \Longleftrightarrow A \subset B$$

$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \varnothing \subset A,$ *alors* $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ \varnothing\mathcal{R}A$

- *Soit* $\mathcal{P}$ *le plan. On définit la relation* $\mathcal{R}$ *dans* $\mathcal{P}$ *par :*
Pour toutes droites $(D), (\Delta)$, $(D)\mathcal{R}(\Delta) \Longleftrightarrow (D)//(\Delta)$

3.1.1 Propriétés des relations binaires dans un ensemble

Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation définie dans E.

1. **Réflexivité** : $\mathcal{R}$ est dite rexive si

$$\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$$

2. **Symétrie** : $\mathcal{R}$ est dite symétrique si

$$\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$$

3. **Transitivité** : $\mathcal{R}$ est dite transitive si

$$\forall x, y, z \in E,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z$$

4. **Antisymétrie** : $\mathcal{R}$ est dite antisymétrique si

$$\forall x, y \in E,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}x) \Longrightarrow x = y$$

Exemples 3.1.2.

- *L'égalité dans un ensemble quelconque est réflexive, symétrique et transitive.*

- *L'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, non symétrique, antisymétrique et transitive.*
- *Dans $\mathbb{R}$, la relation « ...$\leq$... » est réflexive, non symétrique, antisymétrique et transitive.*
- *Dans le plan $\mathcal{P}$, la relation « ... est parallèle... » est réflexive, symétrique, non antisymétrique et transitive.*

3.2 Relation d'équivalence

Définition 3.2.1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.*

Exemples 3.2.1. *On montre facilement que les relations suivantes sont des relations d'équivalence.*

- *La relation d'égalité dans un ensemble quelconque est une relation d'équivalence.*
- *Dans le plan $\mathcal{P}$, la relation « ... est parallèle... » est une relation d'équivalence.*

Étant donnée une relation d'équivalence, on identifie les éléments qui sont en relation en introduisant les classes d'équivalence.

Définition 3.2.2. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E. Pour chaque x de E, on appelle classe d'équivalence de x le sous-ensemble de E défini par :*

$$\dot{x} = \{y \in E,\ x\mathcal{R}y\}$$

Si $y \in \dot{x}$, on dit que y est un représentant de $\dot{x}$. L'ensemble des classes d'équivalence se nomme ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ et se note $E_{/\mathcal{R}}$

Proposition 3.2.1. *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. On a les propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in E,\ \dot{x} = \dot{y} \Longleftrightarrow x\mathcal{R}y$

2. $\forall x, y \in E,\ \dot{x} = \dot{y} \vee \dot{x} \cap \dot{y} = \varnothing$

3. *Les classes d'équivalence forment une partition de E :*

$$E = \bigcup_{x \in E} \dot{x}$$

Exemple 3.2.1. *Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer l'ensemble $\mathbb{R}_{/\mathcal{R}}$.

1. *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence*

   a)- *$\mathcal{R}$ est réflexive car d'après la réflexivité de l'égalité, on a*

   $$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = x^2 - 1$$

   donc

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}x$$

   ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.

   b)- *$\mathcal{R}$ est symétrique car d'après la symétrie de l'égalité, on a*

   $$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Longleftrightarrow y^2 - 1 = x^2 - 1 \\ &\Longleftrightarrow y\mathcal{R}x \end{aligned}$$

   donc

   $$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y\mathcal{R}x$$

   ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation symétrique.

   c)- *$\mathcal{R}$ est transitive car on a*

   $$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) &\Longrightarrow (x^2 - 1 = y^2 - 1) \wedge (y^2 - 1 = z^2 - 1) \\ &\Longrightarrow x^2 - 1 = z^2 - 1 \text{ car l'égalité est transitive} \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z \end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow (x\mathcal{R}z)$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est une relation transitive.
De a), b) et c), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. *Déterminons l'ensemble quotient $\mathbb{R}_{/\mathcal{R}}$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}$, cherchons $y \in \mathbb{R}$ tel que $y\mathcal{R}x$?

$$\begin{aligned} y\mathcal{R}x &\iff y^2 - 1 = x^2 - 1 \\ &\iff (y-x)(y+x) = 0 \\ &\iff (y = x) \vee (y = -x) \end{aligned}$$

   Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \dot{x} = \{x, -x\}$, par suite

$$\mathbb{R}_{/\mathcal{R}} = \{\{x, -x\}, x \in \mathbb{R}\}$$

3.3 Relation d'ordre

Définition 3.3.1. *Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Une relation d'ordre est souvent notée $\leq$ ou encore $\preceq$. Le couple $(E, \leq)$, où E est un ensemble et $\leq$ une relation d'ordre, est appelé ensemble ordonné. La relation $x \leq y \wedge x \neq y$ est notée $x < y$.

Définition 3.3.2. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. La relation $\leq$ est dite relation d'ordre total si deux éléments quelconques de E sont comparables :*

$$\forall x, y \in E,\ (x \leq y \vee y \leq x)$$

Dans le cas contraire, l'ordre est dit partiel.

Exemples 3.3.1. *Voici quelques exemples de relations d'ordre.*

- *La relation « ...$\leq$... »usuelle sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre total.*

- *Si E est un ensemble ayant au moins deux éléments, l'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre partiel.*
- *Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ par*

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x,y)\mathcal{R}(x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq x' \\ \wedge \\ y \leq y' \end{cases}$$

Il est facile de montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre. l'ordre n'est pas total.
En effet, pour $(x,y) = (1,2)$ et $(x',y') = (3,1)$, on a

$$1 \leq 3 \wedge 2 \not\leq 1$$

donc

$$(1,2) \not\mathcal{R}(3,1)$$

On a aussi

$$3 \not\leq 1 \wedge 1 \leq 2$$

donc

$$(3,1) \not\mathcal{R}(1,2)$$

ce qui montre que l'ordre n'est pas total mais partiel.

3.4 Exercices

Exercice 3.4.1. *On définit dans $\mathbb{R}^*$, la relation binaire $\mathcal{R}$ par*

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^*, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x.y > 0$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}^*_{/\mathcal{R}}$.*

Exercice 3.4.2. *Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie dans $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, \; x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2$$

1. *Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

2. *Déterminer la classe d'équivalence de 0, en déduire celle de 1.*

3. *Déterminer la classe d'équivalence d'un élément quelconque* $a \in \mathbb{R}$

Exercice 3.4.3. *On munit* $\mathbb{R}^2$ *de la relation notée* $\prec$ *définie par :*

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \prec (x',y') \Longleftrightarrow (x - x' \geq 0 \wedge y = y')$$

Montrer que $\prec$ *est une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?*

Exercice 3.4.4. $\mathcal{R}$ *une relation binaire définie dans* $\mathbb{N}^*$ *par*

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*,\ a\mathcal{R}b \Longleftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*,\ a = b^p$$

1. *Montrer que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre dans* $\mathbb{N}^*$.

2. *L'ordre est-il total ou partiel ?*

3. *Déterminer* $a \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $(2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a)$.

Corrigés

Corrigé 3.4.1.

1. $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

   a)- $\mathcal{R}$ *est réflexive car*

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 0,$$

   donc

   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}x,$$

   ce qui montre que $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

   b)- $\mathcal{R}$ *est symétrique car on a*

   $$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow x.y > 0 \\ &\Longleftrightarrow y.x > 0 \text{ (le produit est commutatif dans } \mathbb{R}) \\ &\Longleftrightarrow y\mathcal{R}x, \end{aligned}$$

   donc

   $$\forall x, y \in \mathbb{R}^*,\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y\mathcal{R}x,$$

   ce qui montre que $\mathcal{R}$ *est symétrique.*

c)- $\mathcal{R}$ *est transitive car on a*

$$\begin{aligned}\forall x,y,z \in \mathbb{R}^*,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) &\iff \begin{cases} x.y > 0 \\ \wedge \\ y.z > 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow x.y^2.z > 0 \\ &\Longrightarrow x.z > 0\ (y^2 > 0) \\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z,\end{aligned}$$

donc

$$\forall x,y,z \in \mathbb{R}^*,\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ *est transitive.*

De a), b) et c), on déduit que $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

2. *L'ensemble* $\mathbb{R}^*_{/\mathcal{R}}$
   Soit $a \in \mathbb{R}^*$,
   $$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}a\},$$
   or
   $$x\mathcal{R}a \iff x.a > 0.$$
   Deux cas se présentent :
   Si $a > 0$ *alors* $x > 0$, *par suite* $\dot{a} = \mathbb{R}^*_+$
   Si $a < 0$ *alors* $x < 0$, *par suite* $\dot{a} = \mathbb{R}^*_-$
   On déduit alors
   $$\mathbb{R}_{/\mathcal{R}} = \left\{\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R}^{*-}\right\}$$

Corrigé 3.4.2.

1. $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

   a)- $\mathcal{R}$ *est réflexive car par la réflexivité de l'égalité on a*

   $$\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 = x^4 - x^2,$$

   donc

   $$\forall x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}x,$$

   ce qui montre que $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

b)- *$\mathcal{R}$ est symétrique car par la symétrie de l'égalité on a*

$$\begin{aligned}\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow x^4 - x^2 = y^4 - y^2\\ &\Longleftrightarrow y^4 - y^2 = x^4 - x^2\\ &\Longleftrightarrow y\mathcal{R}x,\end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y\mathcal{R}x,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est symétrique.

c)- *$\mathcal{R}$ est transitive car par la transitivité de l'égalité on a*

$$\begin{aligned}\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) &\Longleftrightarrow \begin{cases} x^4 - x^2 = y^4 - y^2\\ y^4 - y^2 = z^4 - z^2\end{cases}\\ &\Longrightarrow x^4 - x^2 = z^4 - z^2\\ &\Longrightarrow x\mathcal{R}z,\end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x\mathcal{R}y) \wedge (y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z,$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive.

De a), b) et c), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2.

$$\dot{0} = \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}0\}$$

On a alors

$$\begin{aligned}x\mathcal{R}0 &\Longleftrightarrow x^4 - x^2 = 0\\ &\Longleftrightarrow x^2(x^2 - 1) = 0\\ &\Longleftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\dot{0} = \{0, 1, -1\}$$

Comme $1 \in \dot{0}$ alors $1\mathcal{R}0$, par suite $\dot{0} = \dot{1}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}a\}$$

$$x\mathcal{R}a \Longleftrightarrow x^4 - x^2 = a^4 - a^2 \tag{E}$$

En posant $y = x^2$*, on doit alors résoudre l'équation*

$$y^2 - y - (a^4 - a^2) = 0 \tag{E'}$$

avec $y \geq 0$*. Le calcul du discriminant donne*

$$\Delta = 4a^4 - 4a^2 + 1 = (2a^2 - 1)^2 \geq 0.$$

Deux cas se présentent,
- Si $a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$*, on a* $\Delta = 0$*, on obtient* $y = \frac{1}{2}$ *et par suite* $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$*.*
D'où

$$\dot{a} = \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

- Si $a \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$*, on a* $\Delta > 0$*. L'équation* (E') *admet deux solutions distinctes*

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}, \;\; y_2 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$$

Pour $|a| > \frac{1}{\sqrt{2}}$*,* $|2a^2 - 1| = 2a^2 - 1$*. On obtient alors,*

$$y_1 = \frac{1+|2a^2-1|}{2} = a^2 \geq 0, \;\; y_2 = \frac{1-|2a^2-1|}{2} = 1 - a^2$$

Si $a \in \,]-\infty, -1\,[\, \cup \,]\,1, +\infty\,[\,, y_2 < 0$*. Ainsi les solutions de* (E) *sont* $x = \pm a$*. D'où*

$$\dot{a} = \{a, -a\}\,.$$

Si $a \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\,[\, \cup \,]\,\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\,\right], y_2 \geq 0$*. Ainsi les solutions de* (E) *sont*

$$x = \pm a, \;\; x = \pm\sqrt{1-a^2},$$

d'où

$$\dot{a} = \left\{a, -a, -\sqrt{1-a^2}, +\sqrt{1-a^2}\right\}.$$

Pour $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$*,* $|2a^2 - 1| = -2a^2 + 1$*. On obtient alors*

$$y_1 = \frac{1+|2a^2-1|}{2} = 1 - a^2 \geq 0, \;\; y_2 = a^2 \geq 0$$

Ainsi les solutions de (E) *sont*

$$x = \pm\sqrt{1-a^2},\ x = \pm a,$$

d'où

$$\dot{a} = \left\{a, -a, -\sqrt{1-a^2}, +\sqrt{1-a^2}\right\}.$$

Voici une méthode plus simple pour résoudre l'équation (E).
L'équation (E') *peut s'écrire*

$$(y^2 - a^2)(y^2 + a^2 - 1) = 0.$$

Les solutions sont $y_1 = a^2$ *et* $y_2 = 1 - a^2$. *Les solutions de* (E) *s'obtiennent en résolvant les deux équations* $x^2 = y_1$ *et* $x^2 = y_2$.
Pour $x^2 = a^2$, *on obtient* $x = \pm a$.
Pour $x^2 = 1 - a^2$, *deux cas se présentent :*
Si $a \in \,]-\infty, -1\,[\, \cup \,]\,1, +\infty\,]$, $1 - a^2 < 0$.
Les solutions de (E) *sont alors* $x = \pm a$. *Ainsi,*

$$\dot{a} = \{+a, -a\}.$$

Si $a \in [-1, 1]$, $1 - a^2 \geq 0$. *Les solutions de* (E) *sont alors*

$$x = \pm a, x = \pm\sqrt{1-a^2}.$$

Ainsi,

$$\dot{a} = \left\{+a, -a, +\sqrt{1-a^2}, -\sqrt{1-a^2}\right\}.$$

Corrigé 3.4.3.

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \prec (x',y') \iff (x - x' \geq)0 \wedge (y = y')$$

1. *La relation* $\prec$ *est une relation d'ordre.*

   a)- *La relation* $\prec$ *est réflexive car on a*

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x \geq 0 \wedge y = y)$$

   donc

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \prec (x,y)$$

   ce qui montre que $\prec$ *est réflexive.*

b)- *La relation* $\prec$ *est antisymètrique car on a*
$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned}
((x,y) \prec (x',y')) \wedge ((x',y') \prec (x,y)) &\iff \begin{cases} x - x' \geq 0 \wedge y = y' \\ x' - x \geq 0 \wedge y' = y \end{cases} \\
&\Longrightarrow x - x' = 0 \wedge y = y' \\
&\Longrightarrow (x,y) = (x',y')
\end{aligned}$$

donc

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2,\ ((x,y) \prec (x',y')) \wedge ((x',y') \prec (x,y)) \Longrightarrow (x,y) = (x',y')$$

ce qui montre que $\prec$ *est antisymètrique.*

c)- *La relation* $\prec$ *est transitive car on a*
$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2,$

$$\begin{aligned}
((x,y) \prec (x',y')) \wedge ((x',y') \prec (x'',y'')) &\iff \begin{cases} x - x' \geq 0 \wedge y = y' \\ x' - x'' \geq 0 \wedge y' = y'' \end{cases} \\
&\Longrightarrow x - x'' \geq 0 \wedge y = y'' \\
&\Longrightarrow (x,y) \prec (x'',y'')
\end{aligned}$$

donc

$$\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{R}^2,\ ((x,y) \prec (x',y')) \wedge ((x',y') \prec (x'',y'')) \Longrightarrow (x,y) \prec (x$$

ce qui montre que $\prec$ *est transitive.*
De a), b) et c), on déduit que $\prec$ *est une relation d'ordre.*

2. *La relation* $\prec$ *est une relation d'ordre partiel dans* $\mathbb{R}^2$ *car pour*
$(x,y) = (5,4)$ *et* $(x',y') = (3,2)$ *on a*
$5 - 3 \geq 0 \wedge 4 \neq 2$ *alors* $(5,4) \not\prec (3,2)$
on a aussi $3 - 5 \ngeq 0 \wedge 2 \neq 4$ *alors*$(3,2) \not\prec (5,4)$.
ce qui montre que l'ordre n'est pas total mais partiel.

Corrigé 3.4.4.

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*,\ a\mathcal{R}b \iff \exists p \in \mathbb{N}^*,\ a = b^p$$

1. *La relation* $\mathcal{R}$ *est une relation d'ordre.*

a)- *La relation $\mathcal{R}$ est réflexive car on a*

$$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ a = a^1$$

donc

$$\forall a \in \mathbb{N}^*,\ a\mathcal{R}a$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est réflexive.

b)- *La relation $\mathcal{R}$ est antisymétrique car on a $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$*

$$\begin{array}{rcl} (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists p \in \mathbb{N}^*,\ a = b^p \\ \exists q \in \mathbb{N}^*,\ b = a^q \end{array} \right. \\ & \Longrightarrow & a = a^{pq} \\ & \Longrightarrow & \ln a = pq \ln a \\ & \Longrightarrow & \ln a(1 - pq) = 0 \end{array}$$

si $a = 1$ alors $b = a^q = 1 = a$
si $a \neq 1$ alors $\ln a \neq 0$ puis $pq = 1$. Or $p, q \in \mathbb{N}^*$ donc $p = q = 1$ par suite $a = b$. donc

$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*,\ (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}a) \Longrightarrow a = b$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est antisymètrique.

c)- *La relation $\mathcal{R}$ est transitive car on a*
$\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcl} (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \exists p \in \mathbb{N}^*,\ a = b^p \\ \exists q \in \mathbb{N}^*,\ b = c^q \end{array} \right. \\ & \Longrightarrow & a = c^{pq}, pq \in \mathbb{N}^* \\ & \Longrightarrow & a\mathcal{R}c \end{array}$$

donc

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*,\ (a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Longrightarrow a\mathcal{R}c$$

ce qui montre que $\mathcal{R}$ est transitive.
De a), b) et c), on déduit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

2. *La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{N}^*$ car pour $a = 2$ et $b = 3$*
   $\nexists p \in \mathbb{N}^*, 2 = 3^p$ *alors* $2 \not\mathcal{R} 3$
   et $\nexists q \in \mathbb{N}^*, 3 = 2^q$ *alors* $3 \not\mathcal{R} 2$ *ce qui montre que l'ordre n'est pas total mais partiel.*

3. *Déterminer $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $(2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a)$.*

$$(2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a) \iff \left\{ \begin{array}{l} \exists p \in \mathbb{N}^*,\ 2 = a^p \\ \exists q \in \mathbb{N}^*,\ 3 = a^q \end{array} \right.$$

donc a divise 2 et 3. Or 2 et 3 sont premiers entre eux, ainsi a=1. On obtient alors 2=1=3 ce qui est absurde.
On déduit

$$\nexists a \in \mathbb{N}^*, (2\mathcal{R}a) \wedge (3\mathcal{R}a)$$

Bibliographie

1. E. Azoulay, J. Avignant, G. Auliac, Problèmes corrigés de Mathématiques, DEUG MIAS/SM, Ediscience (Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.

2. C. Baba-Hamed, K. Benhabib, AlgèbreI Rappels de Cours et Exercices avec Solutions, Office des publications universitaires, Alger, 1988.

3. A. Denmat, F. Héaulme, Algèbre générale, série : TD, Dunod 2000.

4. J-P. Escofier, Toute l'Algèbre du 1^{er} cycle, Dunod 2002.

5. A. Kostrikin, Introduction à l'Algèbre, Editons mir, Moscou, 1986.

6. M. Zitouni, Algèbre cours de $1^{\text{ière}}$ Année des Universités, Office des publications universitaires, Alger, 1986.