Université Djilali BOUNAÂMA - Khemis Miliana
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques-Informatique.

Algèbre 1
2020-2021

# Série 01
# Logique mathématique

**Exercice 1:** $P$ , $Q$ et $L$ trois propositions logiques.
Construire les tables de vérité des formules suivantes
$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow L$, $(P \vee Q) \Longrightarrow (L \vee Q)$,$\left(\left(\overline{P} \vee Q\right) \wedge L\right) \Longrightarrow \left(\overline{P} \wedge Q\right) \vee (Q \wedge L)$.

**Exercice 2:** $P$ et $Q$ deux propositions logiques.
1) La proposition $(P \wedge Q) \Longrightarrow \left(\overline{P} \vee Q\right)$ est-elle vraie ?.
2) Donner la négation de $P \Longrightarrow Q$ et la négation de $(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow Q$.

**Exercice 3:**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en termes de quantificateurs les expressions suivantes :
1. $f$ est majorée , bornée, paire, impaire.
2. $f$ ne s'annule jamais.
3. $f$ est périodique.
4. $f$ est croissante, strictement décroissante.
5. $f$ n'est pas la fonction nulle
6. $f$ n'a jamais les mêmes valeurs en deux points distincts.
7. $f$ atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
8. $f$ est inférieure à $g$, $f$ n'est pas inférieure à $g$.

**Exercice 4:**
Soient les assertions suivantes:
1) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ \ x + y > 0$. 2) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ \ x + y > 0$.
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ \ x + y > 0$. 4) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ \ y^2 > x$.
5) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \ |x| < \alpha \Longrightarrow \left|x^2\right| < \varepsilon$.
Les assertions sont-elles vraies ou fausses ? Donner leurs négations.

**Exercice 5:** Soient $P$ et $Q$ deux polynômes, les Propositions suivants sont-elles équivalentes ?
1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(P(x) = 0$ et $Q(x) = 0)$ et $[(\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0)$ et $(\ \forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = 0)]$.
2)$\forall x \in \mathbb{R}$, $(P(x) = 0$ ou $Q(x) = 0)$ et $[(\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 0)$ ou $(\ \forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = 0)]$.

**Exercice 6:**
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
Soit $P$ la proposition "Pour tout réel $x$ dans $A$, $x^2 \geq 12$ ". Nier $P$.
On suppose maintenant que $A = \emptyset$. La négation de $P$ est-elle vraie ou fausse ? $P$ est-elle vraie ou fausse.

**Exercice 7:**
1) Montrer par contraposée que pour tout entier naturel $n$, si $n^2$ est pair alors $n$ est pair.
2) Soit $x$ un réel positif ou nul.
Montrer que si pour tout réel $y$ strictement positif, $x \leq y$, alors $x = 0$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer par l'absurde que $n^2 + 1$ n'est pas le carré d'un entier.

**Exercice 8:**
Montrer que
$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq N) \Longrightarrow \left(2 - \varepsilon < \frac{2n+1}{n+2} < 2 + \varepsilon\right)$.

**Exercice 9:**
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit deux propriétés
$P_n$ : 3 divise $4^n - 1$ et $Q_n$ : 3 divise $4^n + 1$.
1) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Longrightarrow Q_{n+1}$.
2) Montrer que $P_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Que penser, alors, de l'assertion: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq n \Longrightarrow Q_n$ ?