$$\text{Min } Z = 3x_1 + 10x_2$$

$$\text{S/c} \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - e_1 + A_1 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 - e_2 = A_2 = 14 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad e_1 \geq 0 \quad e_2 \geq 0 \quad A_1 \geq 0 \quad A_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } Z = 3x_1 + 10x_2 + 0e_1 + 0e_2 + M(A_1 + A_2)$$

(A متغيرة اصطناعية)

تقوم بحساب مجموع المتغيرات الاصطناعية ونعوضها في دالة الهدف

$$A_1 = 10 - 5x_1 - 6x_2 + e_1$$

$$A_2 = 14 - 2x_1 - 7x_2 + e_2$$

$$A_1 + A_2 = 24 - 7x_1 - 13x_2 + e_1 + e_2$$

$$Z = 3x_1 + 10x_2 + M(24 - 7x_1 - 13x_2 + e_1 + e_2)$$

بالنشر والتبسيط نجد:

$$Z = 3x_1 + 10x_2 + 24M - 7Mx_1 - 13Mx_2 + Me_1 + Me_2$$

$$Z = (3 - 7M)x_1 + (10 - 13M)x_2 + Me_1 + Me_2 + 24M$$

$$Z - c_j = (-3 + 7M)x_1 + (-10 + 13M)x_2 - Me_1 - Me_2 = 24M$$

تشكيل جدول الحل الاساسي الاول: نقوم بترتيب معطيات النموذج في جدول نبرز من خلاله الحل والوصول الى الحل الامثل:

pivot

VHB / VB	x_1	x_2	e_1	e_2	A_1	A_2	bi	bi / aij
A_1	5	6	-1	0	1	0	10	$10/6 = \frac{5}{3}$
A_2	2	7	0	-1	0	1	14	$14/7 = 2$
$Z - c_j$	$(-3+7M)$	$(-10+13M)$	$-M$	$-M$	0	0	$24M$	

تحسين الحل:

1- تحديد المتغيرة الداخلة: في هذه الحالة هي التي تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر $(Z - c_j)$ وتقابل المتغيرة x_2 لقيمة $(-10+13M)$ (x_2 هي المتغيرة الداخلة).

2- تحديد المتغيرة الخارجة: هي أقل قيمة موجبة بين النتائج المحصل عليها من حاصل قسمة bi على (a_{ij}) للمتغيرة الداخلة وهي المقابلة للمتغيرة (A_1) إن تقاطع سطر المتغيرة الخارجة مع عمود المتغيرة الداخلة ينتج عنه عنصر الارتكاز أو العنصر المحوري (pivot) وهو يقابل القيمة pivot: $6 = a_{12}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نعيد تحديد المتغيرة الداخلة والمتغيرة الخارجة وعنصر الارتكاز تابي الى تحسين الحل في الجدول الموالي ويتم التوقف عن تحسين الحل والوصول الى تحقق شرط الأمثلية عندما تكون جميع قيم $z_j - c_j$ سالبة أو معدومة ($z_j - c_j \leq 0$)

جدول الحل الأساسي التالي :

VB \ VHB	X_1	X_2	e_1	e_2	A_2	bi	bi / aij
X_2	5/6	1	-1/6	0	0	5/3	$\frac{5/3}{-1/6} = -10$
A_2	-23/6	0	7/6	-1	1	7/3	$\frac{7/3}{7/6} = 2$
	$39/6 - \frac{23}{6}M$	0	$\frac{-10}{6} + \frac{7}{6}M$	-M	0	$\frac{50}{3} + \frac{7}{3}M$	

لما نعيد تحسين المتغيرة الداخلة و المتغيرة الخارجة في جدول الحل الأساسي الأول وتحديد عنصر الارتكاز (Pivot) تابي لملأ جدول الحل الأساسي التالي بالطريقة التالية :

- نقوم بحساب قيم السطر x_2 الجديد وذلك بقسمة جميع قيم سطر المحور القديم على قيمة العنصر المحوري أي :

معادلة المحور x_2 الجديد = $\frac{\text{سطر عنصر الارتكاز القديم}}{\text{عنصر الارتكاز}}$

$= \frac{(5 \quad 6 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 10)}{6}$

$= (5/6 \quad 1 \quad -1/6 \quad 0 \quad 0 \quad 10/6)$

أما باقي قيم الجدول فيمكن تحديدها بالعلاقة التالية :

قيمة العنصر الجديد = قيمة العنصر القديم - $\frac{(\text{قيمة العنصر المقابل في عمود الارتكاز}) \times (\text{قيمة العنصر المقابل في سطر المحور})}{\text{قيمة العنصر المحوري}}$

أو بالعلاقة التالية :

السطر الجديد : السطر القديم - (معامل العنصر الداخل في هذا السطر) × (معادلة المحور الجديد)

وبنفس الطريقة يتم تحسين الحل مرة أخرى أي ايجاد المتغيرة الداخلة الجديدة والمتغيرة الخارجة . وعنصر الارتكاز ثم ملأ الجدول الموالي وفق طرق الحساب السابقة والنتيجة في جدول الحل الموالي :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

جدول الحل الأساسي الثالثة

	x_1	x_2	e_1	e_2	bi
x_2	$2/7$	1	0	$-1/7$	2
e_1	$-23/7$	0	1	$-6/7$	2
$z-c_j$	$-1/7$	0	0	$-6/7$	20

"نلاحظ من خلال الجدول أن هذا أفضل حل ولا يمكن تحسينه لأن قيم سطر $(z-c_j)$ كلها سالبة أو معدومة ومنه تحقق شرط الأمثلية وبالتالي هذا الجدول يمثل الحل الأمثل

$$x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = 2 \qquad e_1^* = 2 \quad , \quad e_2^* = 0$$

$$z^* = 20$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل السلسلة (04): طريقة big M

لنحسن له بنا النموذج الرياضي التالي :

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 14x_2$$

$$\text{s/c} \begin{cases} 2x_1 \geq 40 \\ 2x_1 + 4x_2 = 100 \\ 2x_2 \leq 40 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - e_1 + A_1 = 40 \\ 2x_1 + 4x_2 + A_2 = 100 \\ 2x_2 + e_2 = 40 \\ x_1 \geq 0 \; x_2 \geq 0 \; e_1 \geq 0 \; e_2 \geq 0 \; A_1 \geq 0 \; A_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Min } Z = 10x_1 + 14x_2 + 0e_1 + 0e_2 + M(A_1 + A_2)$$

تقوم بحساب مجموع المتغيرات الاصطناعية ونعوضها في دالة الهدف

$$A_1 = 40 - 2x_1 + e_1$$

$$A_2 = 100 - 2x_1 - 4x_2$$

$$A_1 + A_2 = 140 - 4x_1 - 4x_2 + e_1$$

$$Z = 10x_1 + 14x_2 + M(140 - 4x_1 - 4x_2 + e_1)$$

$$= 10x_1 + 14x_2 + 140M - 4Mx_1 - 4Mx_2 + Me_1$$

$$= (10 - 4M)x_1 + (14 - 4M)x_2 + Me_1 + 140M$$

$$Z - c_j = (-10 + 4M)x_1 + (-14 + 4M)x_2 - Me_1 = 140M$$

تسجيل جدول الحل الاساسي الأول : نقوم بترتيب معطيات النموذج في جدول بغرض تحسين الحل والوصول الى الحل الامثل

	x_1	x_2	e_1	e_2	A_1	A_2	b_i	b_i/a_{ij}
A_1	2	0	-1	0	1	0	40	$40/2 = 20$
A_2	2	4	0	0	0	1	100	$100/2 = 50$
e_2	0	2	0	1	0	0	40	$40/0 = \infty$
$Z - c_j$	$(-10+4M)$	$-14+4M$	$-M$	0	0	0	$140M$	

تحسين الحل :

1- تحديد المتغيرة الداخلة : في هذه الحالة هي التي تقابل أكبر قيمة موجبة في سطر $(Z - c_j)$ وتقابل المتغيرة x_1 بقيمة $(-10+4M)$ (x_1 هي المتغيرة الداخلة)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2- تحديد المتغيرة الخارجة: هي أقل قيمة موجبة بين النتائج المحصل عليها من حاصل قسمة bi على (a_{ij}) للمتغيرة الداخلة وهي المقابلة للمتغيرة (A_1).

ان تقاطع سطر المتغيرة الخارجة مع عمود المتغيرة الداخلة ينتج عنه عنصر الارتكاز أو العنصر المحوري (pivot) وهو يقابل القيمة a_{11} : pivot = 2

بعد تحديد المتغيرة الداخلة والمتغيرة الخارجة وعنصر الارتكاز نأتي الى تحسين الحل في الجدول الموالي ويتم التوقف عن تحسين الحل والوصول الى تحقق شرط الأمثلية عندما تكون جميع قيم $z-c_j$ سالبة أو معدومة ($z-c_j \leq 0$).

جدول الحل الأساسي الثاني:

	x_1	x_2	e_1	e_2	A_2	bi	bi / aij
x_1	1	0	$-1/2$	0	0	20	$20/0 = /$
A_2	0	4	1	0	1	60	$60/4 = 15$
e_2	0	2	0	1	0	40	$40/2 = 20$
$z-c_j$	0	$(-14+4M)$	$(-5+M)$	0	0	$(800+60M)$	/

جدول الحل الاساسي الثالث:

	x_1	x_2	e_1	e_2	bi
x_1	1	0	$-1/2$	0	20
x_2	0	1	$1/4$	0	15
e_2	0	0	$-1/2$	01	10
$z-c_j$	0	0	$-3/2$	0	410

نلاحظ من خلال الجدول أن هذا الحل الأمثل ولكن يمكن تحسينه لأن قيم سطر ($z-c_j$) كلها سالبة أو معدومة ومنه تحقق شرط الامثلية وبالتالي:

$$x_1^* = 20 \quad x_2^* = 15 \quad e_1^* = 0 \quad e_2^* = 10$$
$$z^* = 20$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner