السلسلة الأولى للسداسي الأول

التمرين الأول : لنفرض أن لديك جدول يبين بيانات المنفعة الكلية لسلعة ما والتي نرمز إليها بالرمز التالي UTx

Q_x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
UT_X	0	7	13	18	22	25	27	28	28	27

المطلوب

1. أوجد المنفعة الحدية في هذا الجدول؟
2. أرسم الشكل البياني لكل من المنفعة الكلية و الحدية في نفس المعلم، وحدد فيه نقطة الإشباع ، ماذا تلاحظ؟

التمرين الثاني: لنفترض أن لديك الجدول التالي:

Qx	0	1	2	3	4	5	6	7
UTx	0	10		24		30		28
Umx	-		8		4		0	

1. أكمل الجدول أعلاه
2. ماذا تستنتج؟

التمرين الثالث : لنفرض أن مستهلك ينفق دخله اليومي 110ون على شراء سلعتين x ، y وكانت المنفعة الكلية مبينة في الجدول التالي :

Qx,Qy	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
UTx	0	44	84	120	152	180	204	224	240	252	260
UTy	0	35	67	92	114	134	150	162	172	180	184

المطلوب : إذا كان سعر السلعتين على التوالي : Px=10 و Py =5 وكانت المنفعة الحدية للنقود تساوي 2.

1. ماهو توازن المستهلك؟
2. أحسب المنفعة الكلية؟

التمرين الرابع: لنفرض أن مستهلك ما يستهلك سلعتين هما x و y بحيث ينفق كل دخله R =12 عليهما ، وكانت أسعارهما في السوق على التوالي Px =1 و Py = 2 وكانت المنفعة الحدية مبينة في الجدول التالي :

Qx	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Umx	38	34	31	28	27	25	23	20	18
Umy	60	54	50	46	42	38	33	28	26

المطلوب:

1. أوجد المنافع الكلية للسلعتين؟
2. ما هي الكمية التي تحقق التوازن لهذا المستهلك؟ وما هي المنفعة الكلية (أكبر إشباع) المتحصل عليها منه ؟
3. إذا إنخفض السعر Py من 2 ون إلى 1 ون وبقيت العوامل الأخرى ثابتة ما هو التوازن الجديد؟ وما هي المنفعة الكلية المتحصل عليها في هذه الحالة؟

التمرين الخامس : مستهلك دخله 100 ون يخصصه لإستهلاك سلعتين X و Y وكانت الأسعار كالآتي : Px = 2 و Py = 5 ، وكانت المنفعة الكلية بالشكل التالي: UTx = XY.

المطلوب :

1. أوجد بطريقتين مختلفتين أفضل توليفة تمنح للمستهلك أقصى إشباع (توازن المستهلك) ممكن في حدود دخله؟
2. أحسب المنفعة الكلية المتحصل عليها؟
3. أوجد توازن المستهلك بيانيا؟

التمرين السادس :

لتكن لدينا دالة الإشباع التالية : $UTx = x^2y + 4$ ، وقيد الميزانية $24 = x + 4y$

المطلوب

1. أوجد الكميات من x و y التي تعظم المنفعة لهذا المستهلك؟
2. إذا أصبح Px =4 مع ثبات سعر Py ، ماقيمة الدخل الذي يسمح بالمحافظة على مستوى الإشباع السابق ؟
3. ما مدلول المعدل الحدي للإحلال التقنيTSMxy عند التوازن؟

التمرين السابع :

لتكن دالة منفعة مستهلك ما معرفة بالعلاقة التالية : $UT = x^{\frac{1}{3}} \quad y^{2/3}$

وقيد الميزانية : R= xPx + yPy

المطلوب

1. أوجد دوال الطلب العقلانية على السلعتين x و y ؟
2. أدرس شكل هاتين الدالتين؟
3. أحسب قيمة المعدل الإحلال التقني TSMxy ، إذا علمت أن R=20 وسعر السلعتين x , y هما على التوالي 2 و 4 ون؟
4. إذا إرتفعت قيمت الدخل من 20 إلى 30 إلى 40 مع ثبات الأسعار
   أ. أوجد نقاط التوازن الجديدة عند كل نقطة؟
   ب. إذا قمنا بإيصال بين نقاط التوازن ماذا يسمى هذا المنحنى؟ وعرفه؟
   ت. إستنتج منحنى إنجل؟

5. إذا إرتفع سعر السلعة x من 2 إلى 4 ون مع ثبات الدخل وسعر السلعة y ،
   أ. أوجد نقطة التوازن الجديدة؟
   ب. إذا قمنا بإيصال بين نقاط التوازن ماذا يسمى هذا المنحنى؟ وعرفه؟
   ت. أرسم منحنى الطلب على السلعة x ؟

حل التمرين الأول :

1) حساب المنفعة الحدية $\boldsymbol{Um_x}$:

$$\boldsymbol{Um_x = \frac{\Delta UT_x}{\Delta Q_x} = \frac{UT_n - UT_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}}}$$

Q_x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
UT_X	0	7	13	18	22	25	27	28	28	27
Um_x	-	7	6	5	4	3	2	1	0	-1

$$Um_{x=1} = \frac{\Delta UT_x}{\Delta Q_x} = \frac{UT_1 - UT_0}{Q_1 - Q_0} = \frac{7-0}{1-0} = 7$$

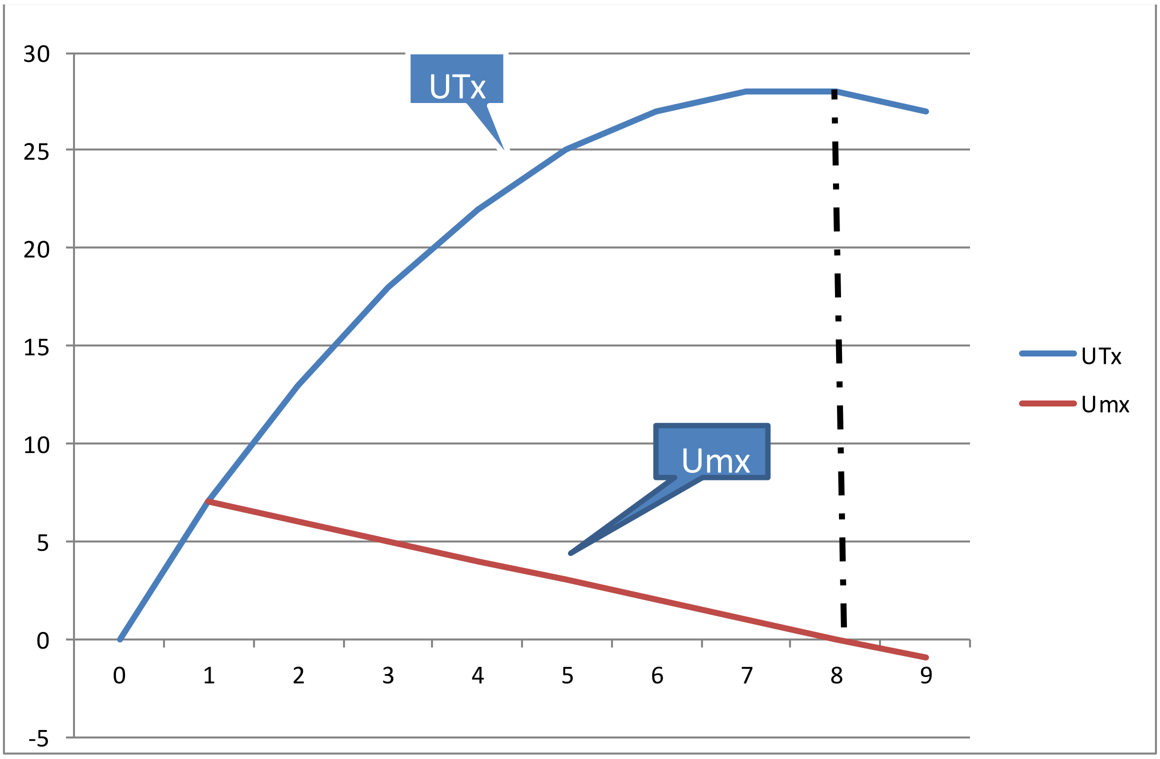
$$Um_{x=2} = \frac{\Delta UT_x}{\Delta Q_x} = \frac{UT_2 - UT_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{13-7}{2-1} = 6$$

.

.

.

2) رسم منحنى المنفعة الكلية UT_X والحدية Um_x :



نلاحظ من خلال الرسم البياني ما يلي:

- ✓ إن منحنى المنفعة الكلية UT_X ينطلق من المبدأ (0،0) ثم يتزايد بمعدل متناقص، أي أنّ المنفعة الكلية تتزايد بكميات متناقصة من جراء استهلاك وحدات متتالية، فعند استهلاك الوحدة الأولى زادت المنفعة الكلية من 0 إلى 7 وحدات، وعند استهلاك الوحدة الثانية زادت المنفعة الكلية ب 6 وحدات أي انتقلت من 7 إلى 13 وحدة ، وهكذا إلى غاية استهلاك الوحدة الأخيرة.

- ✓ إن منحنى المنفعة الحدية Um_{x} متناقص، وهذا يدل على أن منفعة الوحدات المستهلكة المتتالية تتناقص باستمرار، فالوحدة الأولى حققت للمستهلك منفعة قدرها 7 وحدات، والثانية حققت منفعة إضافية قدرها 6 وحدات أما الثالثة فقد حققت 5 وحدات إلى غاية الوحدة التاسعة التي حققت له منفعة قدرها (‎−1)، وهذا ما يسمى بتناقص المنفعة الحدية ، وهو يفسر على أساس أن المستهلك يكون متشوقا لاستهلاك الوحدات الأولى وبالتالي تعطيه إشباعا أكبر، وكلما زاد الإستهلاك كلما اقترب إلى حد التشبع وكلما قل تشوقه لإستهلاك المزيد، وبالتالي الوحدات الأخيرة تعطيه إشباعا أقل.

- ✓ يكون المستهلك في حالة تشبع عندما تكون المنفعة الحدية تساوي الصفر($Um_{\mathrm{x}} = 0$)

حل التمرين الثاني:

1. إكمال الجدول:

$$Um_{\mathrm{x=1}} = \frac{\Delta \mathrm{UT_x}}{\Delta \mathrm{Q_x}} = \frac{\mathrm{UT_1 - UT_0}}{\mathrm{Q_1 - Q_0}} = \frac{10-0}{1-0} = \mathbf{10} = \boldsymbol{Um_{\mathrm{x=1}}}$$

$$UT_{\mathrm{x=2}} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{i=2}} Um_{\mathrm{x}} = \mathrm{Um_{x=1}} + \mathrm{Um_{x=2}} = 10 + 8 = \mathbf{18} = \boldsymbol{UT_{\mathrm{x=2}}}$$

$$Um_{\mathrm{x=3}} = \frac{\Delta \mathrm{UT_x}}{\Delta \mathrm{Q_x}} = \frac{\mathrm{UT_3 - UT_2}}{\mathrm{Q_3 - Q_2}} = \frac{24-18}{3-2} = \mathbf{6} = \boldsymbol{Um_{\mathrm{x=3}}}$$

$$UT_{\mathrm{x=4}} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{i=4}} Um_{\mathrm{x}} = \mathrm{Um_{x=1}} + \mathrm{Um_{x=2}} + \mathrm{Um_{x=3}} + \mathrm{Um_{x=4}} = 10 + 8 + 6 + 4 \Rightarrow \mathbf{28} = \boldsymbol{UT_{\mathrm{x=4}}}$$

$$Um_{x=5} = \frac{\Delta UT_x}{\Delta Q_x} = \frac{UT_5 - UT_4}{Q_5 - Q_4} = \frac{30 - 28}{5 - 4} = \mathbf{2} = \boldsymbol{Um}_{x=5}$$

$$UT_{x=6} = \sum_{i=1}^{i=6} Um_x = Um_{x=1} + Um_{x=2} + Um_{x=3} + Um_{x=4} + Um_{x=5} + Um_{x=6}$$

$$= 10 + 8 + 6 + 4 + 2 + 0 \Rightarrow \mathbf{30} = \boldsymbol{UT}_{x=6}$$

$$Um_{x=7} = \frac{\Delta UT_x}{\Delta Q_x} = \frac{UT_7 - UT_6}{Q_7 - Q_6} = \frac{28 - 30}{7 - 6} = \mathbf{-2} = \boldsymbol{Um}_{x=7}$$

Q_x	0	1	2	3	4	5	6	7
UT_X	0	10	**18**	24	**28**	30	**30**	28
Um_x	-	**10**	8	**6**	4	**2**	0	**2-**

2. مما سبق يمكن إستنتاج ما يلي:

- ✓ المنفعة الحدية غير معرفة عند الصفر $(Q_x = 0)$ لأن المنفعة الحدية ما هي إلا المنفعة الإضافية الناتجة عن إستهلاك وحدة إضافية؛
- ✓ من الجدول أعلاه نستنتج أن المنفعة الكلية UT_X هي مجموع المنافع الحدية $UT_x = \sum_{i=1}^{i=n} Um_x$؛
- ✓ بما أن التغير في الكمية يساوي الواحد $(\Delta Q_x = 1)$ فيمكن حساب المنفعة الحدية Um_xعن طريق الفرق بين منفعتين كليتين متتاليتين.

حل التمرين الثالث

1- إيجاد **توازن المستهلك** : يكون المستهلك في حالة توازن عندما يصل إلى أقصى إشباع ممكن من جراء استهلاكه للسلع في حدود دخله والأسعار السائدة في السوق أي:

يكون المستهلك في حالة توازن إذا تحقق الشرطين ⇐ :

$$\begin{cases} \boldsymbol{MAX : UT = f(x,y)} \\ \boldsymbol{s/c} \\ \boldsymbol{R = xp_x + yp_y} \end{cases}$$

ويمكن حساب كمية توازن التي تحقق الإشباع بالطريقة التالية:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{Um_x}}{\mathbf{p_x}} = \dfrac{\mathbf{Um_y}}{\mathbf{p_y}} = \text{المنفعة الحدية للنقود} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 1\text{الشرط} \\ \qquad\qquad\qquad s/c \\ \boldsymbol{R = xp_x + yp_y} \Rightarrow 110 = 10x + 5y \ldots\ldots 2\text{الشرط} \end{cases}$$

الخطوة الأولى نحسب كل من Um_x و Um_y ثم $\frac{Um_y}{p_y}$ و $\frac{Um_x}{p_x}$.

$Q_{x,y}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
UT_x	0	44	84	120	152	180	204	224	240	252	260
UT_Y	0	35	67	92	114	134	150	162	172	180	184
Um_x	-	44	40	36	32	28	24	20	16	12	8
Um_y	-	35	32	25	22	20	16	12	10	8	4
Um_x/P_x	-	4.4	4	3.6	3.2	2.8	2.4	2	1.6	1.2	0.8
Um_y/P_y	-	7	6.4	5	4.4	4	3.2	2.4	2	1.6	0.8

الشرط 1.............. $\frac{Um_y}{p_y} = \frac{Um_x}{p_x} = 2$ هذا يعني أن $\frac{Um_x}{p_x} = 2$ و $\frac{Um_y}{p_y} = 2$ عند هذه

النقطة تكون $\boxed{x = 7, y = 8}$

الشرط 2 .... $R = xp_x + yp_y \Rightarrow R = 10x + 5y = 10(7) + 5(8) = 110 = R$

بما أن الشرطين تحققا فإن الكمية التي تحقق التوازن لهذا المستهلك هي : $x = 7, y = 8$

2- حساب **المنفعة الكلية** :

$$UT = UT_{x=7} + UT_{y=8} = 224 + 172 = \boxed{\mathbf{396 = UT}}$$

حل التمرين الرابع:

1. إيجاد المنافع الكلية: نعلم أن المنفعة الكلية هي مجموع المنافع الحدية أي $UT_x = \sum_{i=1}^{i=n} Um_x$

$Q_{x,y}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Um_x	38	34	31	28	27	25	23	20	18
Um_y	60	54	50	46	42	38	33	28	26
UT_x	38	72	103	131	158	183	206	226	244
UT_Y	60	114	164	210	252	290	323	351	377

2. حساب الكمية التي تحقق التوازن لهذا المستهلك : مع العلم أن $P_y = 2$ ، $P_x = 1$ ، $R = 12$.

نعلم أن شرطي التوازن في حالة إختلاف الأسعار. $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Um_x}{p_x} = \dfrac{Um_y}{p_y} \ldots\ldots\ldots\ldots 1\text{الشرط} \\ s/c \\ R = xp_x + yp_y \ldots\ldots\ldots 2\text{الشرط} \end{cases}$

$Q_{x,y}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Um_x/P_x	38	34	31	28	***<u>27</u>***	***<u>25</u>***	***<u>23</u>***	20	18
Um_y/P_y	30	***<u>27</u>***	***<u>25</u>***	***<u>23</u>***	21	19	16.5	14	13

$$\frac{Um_x}{p_x} = \frac{Um_y}{p_y} \ldots\ldots\ 1\ \text{الشرط} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 ، y = 2 \\ x = 6 ، y = 3 \\ x = 7 ، y = 4 \end{cases}$$

$$2\ \text{الشرط} \Rightarrow R = xp_x + yp_y \begin{cases} x = 5 ، y = 2 \Rightarrow R = 5.1 + 2.2 = 9 < R\ \text{مرفوضة} \\ \mathbf{x = 6 ، y = 3} \Rightarrow R = 6.1 + 3.2 = 12 = R\ \text{مقبولة} \\ x = 7 ، y = 4 \Rightarrow R = 7.1 + 4.2 = 15\ \text{مرفوضة} \end{cases}$$

إذن الكمية التي **تحقق التوازن لهذا المستهلك** هي $\mathbf{x = 6 ، y = 3}$

حساب المنفعة الكلية :

$$UT = UT_{x=6} + UT_{y=3} = 183 + 164 = 347$$

3. حساب التوازن الجديد إذا انخفض P_y من 2 إلى 1 و.ن وبقيت العوامل الأخرى ثابتة :

ملاحظة هامة: إذا انخفض P_y من 2 إلى 1

هذا يعني أن $P_y = P_x$ في هذه الحالة

نطبق شرطي التوازن التاليين :

$$\begin{cases} Um_x = Um_y \ldots\ldots\ldots 1 \text{الشرط} \\ s/c \\ R = xp_x + yp_y \ldots\ldots 2 \text{الشرط} \end{cases}$$

إنطلاقا من الملاحظة السابقة نجد أن الشرط 1 هناك حلين:

$$\frac{\mathbf{Um_x}}{\mathbf{p_x}} = \frac{\mathbf{Um_y}}{\mathbf{p_y}} \Rightarrow \begin{cases} x = 1، y = 6 \Rightarrow R = 1.1 + 6.1 = 7 < R \text{ مرفوضة} \\ x = 4، y = 8 \Rightarrow R = 4.1 + 8.1 = 12 = R \text{ مقبولة} \end{cases}$$

إذن الكمية التي تحقق التوازن في هذه الحالة هي : $x = 4، y = 8$.

حساب المنفعة الكلية: $UT = UT_{x=4} + UT_{y=8} = 131 + 351 = 482$

<u>حل التمرين الخامس:</u>

لدينا $R = 100$ ، $P_y = 5$ ، $P_x = 2$ ، $UT_x = xy$

1. إيجاد توازن المستهلك بطريقتين مختلفتين:

- ✓ طريقة التعويض: لدينا لدينا $UT_x = xy$ دالة المنفعة

  $R = 2x + 5y$ قيد الدخل

- نقوم باستخراج y بدلالة x من قيد الدخل ثم نقوم بتعويضها في دالة المنفعة.
- نقوم بتطبيق الشرطين
  - **الشرط اللازم** هو المشتق الأول يساوي الصفر.
  - **الشرط الكافي** هو المشتق الثاني يجب أن يكون أقل من الصفر.

استخراج y بدلالة x من قيد الدخل:

لدينا $R = 2x + 5y \Rightarrow 100 = 2x + 5y \Rightarrow 5y = 100 - 2x \Rightarrow$

$$y = \frac{100-2x}{5} \Rightarrow y = 20 - \frac{2x}{5} \ldots\ldots.(1)$$

نعوض (1) في UT نجد :

$$UT = x\left[20 - \frac{2}{5}x\right] = \boxed{20x - \frac{2}{5}x^2 = UT}$$

- **الشرط اللازم** $UT` = 0 \Rightarrow 20 - \frac{4}{5}x = 0 \Rightarrow 20 = \frac{4}{5}x \Rightarrow x = 20\frac{5}{4} \Rightarrow \boldsymbol{x = 25}$
  نعلم أن $y = 20 - \frac{2x}{5} \Rightarrow y = 20 - \frac{2}{5}25 \Rightarrow \boldsymbol{y = 10}$
- **الشرط الكافي** $UT`` < 0 \Rightarrow \left(20x - \frac{2}{5}x^2\right)`` < 0 \Rightarrow \left(20 - \frac{4}{5}x\right)` < 0$

$$\Rightarrow -\frac{4}{5} < 0$$

بما أن $UT`` < 0$ فإن $\boldsymbol{x = 25}$ و $\boldsymbol{y = 10}$ هي الكمية التي تحقق التوازن لهذا المستهلك.

✓ الطريقة لاغرانج **Lagrange** : صيغة لاغرانج هي:

$$L = f(x, y) + \lambda(R - xP_x - yP_y)$$

- الشرط اللازم : المشتقات الجزئية ل $(\lambda, x, y,)$ =0 أي $\frac{\boldsymbol{dL}}{\mathbf{d_{x,y,\lambda}}} = \mathbf{0}$
- الشرط الكافي: المحدد أكبر من الصفر **det**>0

$$L = f(x,y) + \lambda\left(R - xP_x - yP_y\right) \Rightarrow \boldsymbol{L = xy + \lambda(R - xP_x - yP_y)}$$

$$\begin{cases} \frac{dL}{dx} = 0 \Rightarrow y - 2\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots.(1) \Rightarrow y = 2\lambda \\ \frac{dL}{dy} = 0 \Rightarrow x - 5\lambda = 0 \ldots\ldots\ldots.(2) \Rightarrow x = 5\lambda \\ \frac{dL}{d\lambda} = 0 \Rightarrow 100 - 2x - 5y = 0 \ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

بقسمة المعادلة رقم $\frac{(1)}{(2)}$ نجد:

$$\frac{y}{\mathrm{x}} = \frac{2\lambda}{5\lambda} \Longrightarrow 2x = 5y \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{y} \ldots\ldots (4)$$

بتعويض المعادلة (4) في (3) نجد:

$$100 - 2\frac{5}{2}y - 5y = 0 \Rightarrow 100 - 5y - 5y = 0 \Rightarrow 10y = 100$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{10}$$

نعلم أن $x = \frac{5}{2}y \Rightarrow x = \frac{5}{2}10 = \mathbf{25} = \boldsymbol{x}$

الشرط الكافي المحدد أكبر من الصفر **det >0**

$$\begin{array}{cccc} & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} & \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{Det} = & \multicolumn{3}{c}{\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{0} \end{vmatrix}} \end{array} = 0\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$Det = 0[0.0—5)(-5) - 1[1.0—5)(-2) - 2[1(-5) - 0(-2)]$$

$$= 0 - 1[0 - 10] - 2[(-5) - 0] \Rightarrow \boldsymbol{det} = \mathbf{20} > 0$$

بما أن المحدد أكبر من الصفر فإن $\boldsymbol{x} = \mathbf{25}$ و $\boldsymbol{y} = \mathbf{10}$ هي الكمية التي تحقق التوازن لهذا المستهلك.

2. حساب المنفعة الكلية UT_{x}: بما أن $x = 25$ و $y = 10$ فإن: $UT = 25.10 \Rightarrow \boldsymbol{UT} = \mathbf{250}$

3. إيجاد توازن المستهلك بيانيا: (توازن المستهلك بيانيا هو نقطة تقاطع منحنى السواء مع خط الميزانية).

✓ كيفية استخراج معادلة منحنى السواء: نعلم أن $UT = xy$ كما نعلم أن $UT = 250$ أي

معادلة منحنى السواء $250 = xy \Rightarrow \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{250}}{\boldsymbol{x}}$

x	5	10	20	25	50
y	50	25	12.5	10	5

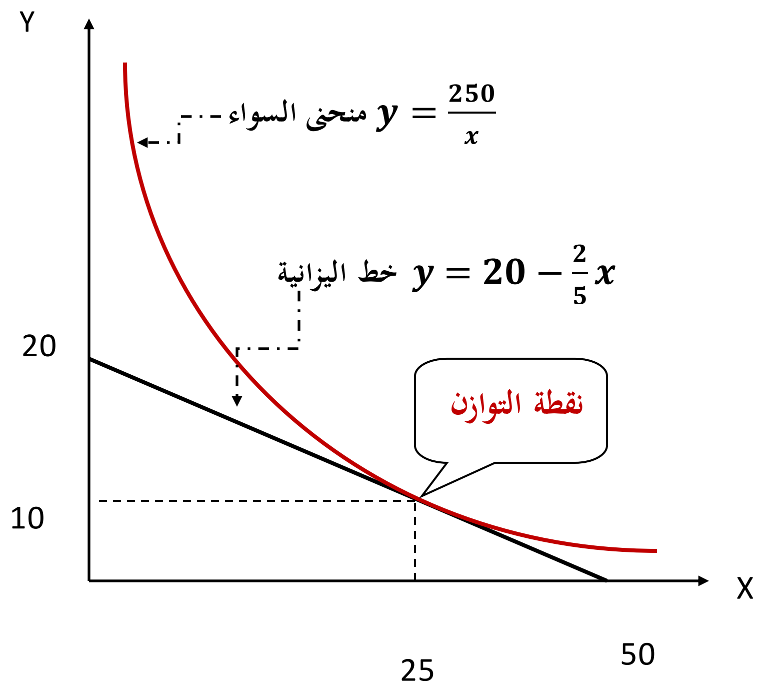
✓ كيفية استخراج معادلة خط(قيد) الميزانية : نعلم أن : $100 = 2x + 5y$

نستخرج y بدلالة x من خلال قيد الميزانية:

$$100 = 2x + 5y \Rightarrow 5y = 100 - 2x \Rightarrow y = \frac{100 - 2x}{5}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y = 20 - \frac{2}{5}x}$$ ***معادلة خط الميزانية***

X	0	5	10	25	50
y	20	18	16	10	0



حل التمرين السادس:

لدينا: $UT = x^2y + 4$ ، $24 = x + 4y$

1. إيجاد الكمية من x و y التي تعظم المنفعة باستخدام طريقة التعويض:

$$24 = x + 4y \Rightarrow 4y = 24 - x \Rightarrow y = \frac{24 - x}{4} \Rightarrow y = 6 - \frac{1}{4}x \dots (1)$$

نقوم بتعويض المعادلة (1) في دالة المنفعة $\boldsymbol{UT}$ نجد:

$$UT = x^2\left[6 - \frac{1}{4}x\right] + 4 \Rightarrow UT = 6x^2 - \frac{1}{4}x^3 + 4$$

- ✓ شرط اللازم: $UT' = 0$

$$UT' = 0 \Rightarrow 12x - \frac{3}{4}x^2 = 0 \Rightarrow x\left[12 - \frac{3}{4}x\right] = 0$$

إما $\begin{cases} x=0 \\ \text{أو} \end{cases}$

$$12 - \frac{3}{4}x = 0 \Rightarrow 12 = \frac{3}{4}x \Rightarrow x = 12.\frac{4}{3} = \mathbf{16} = \boldsymbol{x}$$

$$\Rightarrow y = 6 - \frac{1}{4}16 \Rightarrow \boldsymbol{y} = \mathbf{2}$$

- ✓ الشرط الكافي: $\boldsymbol{UT''} < 0$

$$UT'' < 0 \Rightarrow \left(6x^2 - \frac{1}{4}x^3 + 4\right)'' < 0 \Rightarrow \left(12x - \frac{3}{4}x^2\right)' = 12 - \frac{6}{4}x < 0$$

بما أن $x = 16 \Rightarrow 12 - \frac{6}{4}16 = -12 < 0$

بما أن $UT'' < 0$ فإن $\boldsymbol{x} = \mathbf{16}$ و $\boldsymbol{y} = \mathbf{2}$ هي الكمية التي تعظم المنفعة

2. حساب قيمة الدخل R الذي يسمح بالمحافظة على نفس مستوى الإشباع السابق إذا أصبح $P_x = 4$:

نعلم أن المستهلك حتى يبقى على نفس الإشباع يجب أن يستهلك $\boldsymbol{x} = \mathbf{16}$ و $\boldsymbol{y} = 2$ وبالتالي فإن الدخل في هذه الحالة يجب أن يكون **72** و.ن

$$R = 16.4 + 2.4 = \mathbf{72} = \boldsymbol{R}$$

3. مدلول **المعدل الحدي للإحلال** $TMS_{x,y}$: **الإحلال** هو يمكن لسلعة ما أن تحل محل سلعة أخرى وتحقق نفس مستوى الإشباع، و المعدل الحدي للإحلال $TMS_{x,y}$ هو ذلك **المعدل** الذي يستطيع من خلاله المستهلك أن يتنازل عن بعض الوحدات من $\boldsymbol{y}$ لأجل الحصول على وحدة واحدة من $\boldsymbol{x}$ ويبقى على نفس مستوى الإشباع.

حل التمرين السابع:

لدينا : $UT = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ ، $R = xP_x + yP_y$

1. إيجاد دوال الطلب العقلانية على السلعتين x , y : يمكن استخراج هذه الدوال باستعمال شرطي التوازن:

$$\begin{cases} \dfrac{Um_x}{P_x} = \dfrac{Um_y}{P_y} \dots\dots..(1) \\ \qquad\qquad s/c \\ R = xP_x + yP_y \dots\dots.(2) \end{cases}$$

$$Um_x = \frac{dUT_x}{dx} = \frac{1}{3}y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{-2}{3}} = Um_x$$

$$Um_y = \frac{dUT_y}{dy} = \frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}x^{\frac{1}{3}} = Um_y$$

$$\frac{Um_x}{P_x} = \frac{Um_y}{P_y} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{-2}{3}}}{P_x} = \frac{\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}x^{\frac{1}{3}}}{P_y} \Longrightarrow \frac{\frac{1}{3}y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{-2}{3}}}{\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}x^{\frac{1}{3}}} = \frac{P_x}{P_y} \Longrightarrow \frac{y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{-2}{3}}}{2y^{\frac{-1}{3}}x^{\frac{1}{3}}} = \frac{P_x}{P_y}$$

$$\Longrightarrow \frac{y}{2x} = \frac{P_x}{P_y} \Longrightarrow \boxed{yP_y = 2xP_x\dots\dots(3)}$$

بتعويض (3) في (2) نجد:

$$R = x\,P_x + yp_y \Longrightarrow R = xP_x + 2xP_x \Longrightarrow R = 3xP_x \Longrightarrow \boxed{x = \frac{R}{3P_x} \longleftarrow \text{دالة الطلب على } \mathbf{x}}$$

$$\text{نعلم أن } yP_y = 2xP_x \Longrightarrow yP_y = 2\frac{R}{3P_x}P_x \Longrightarrow yP_y = \frac{2R}{3} \Longrightarrow \boxed{y = \frac{2R}{3P_y} \longleftarrow \text{دالة الطلب على } \mathbf{y}}$$

2. دراسة شكل هاتين الدالتين:

- ✓ من المفروض أن دالة الطلب على السلعة x تعبر عن العلاقة بين السعر(P_x) والكمية المطلوبة ل (x) ، وقد وجدنا أن دالة الطلب بدلالة عدة متغيرات منها الدخل R والسعر، لذا يكفي فقط أن نثبت R (نعطيه قيمة) حتى نتحصل على دالة الطلب للسلعة x (الكمية المطلوبة x) بدلالة السعر (P_x) فقط.
- ✓ من خلال دالة الطلب على السلعة x نلاحظ أنه كلما ارتفع الدخل ترتفع الكمية المطلوبة من السلعة (x) هذا يعني أن السلعة (x) هي سلعة عادية.
- ✓ كما نلاحظ أن السلعة x، y هما سلعتان مستقلتان عن بعضهما البعض.

3. حساب قيمة المعدل الحدي للإحلال $TMS_{x,y}$ إذا علمت أن $P_x = 2, P_y = 4, \quad R = 20$

نعلم أن $TMS_{x,y} = \left|\frac{-P_x}{P_y}\right| = \left|\frac{dy}{dx}\right|$

الطريقة الأولى: مباشرة من المعطيات : $TMS_{x,y} = \left|\frac{-P_x}{P_y}\right| = \left|\frac{-2}{4}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

الطريقة الثانية: من خلال قيد الميزانية نستطيع تطبيق القانون الثاني.

نعلم أن $R = xP_x + yP_y \Rightarrow 20 = 2x + 4y \Rightarrow 4y = 20 - 2x \Rightarrow$

$$y = \frac{20 - 2x}{4} \Rightarrow \boxed{y = 5 - \frac{1}{2}x}$$

$$TMS_{x,y} = \left|\frac{dy}{dx}\right| = \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

4. إذا ارتفعت قيمة الدخل من 20 إلى 40 مع ثبات الأسعار:

أ. إيجاد نقاط التوازن الجديدة عند كل نقطة:

ملاحظة هامة : بما أننا وجدنا دوال الطلب في السؤال الأول فيمكننا استعمالها لحساب كميات التوازن ، عوض استعمال Lagrange أو طريقة التعويض.

- الحالة الأولى R=20 :

نعلم أن $x = \frac{R}{3P_x} \Longrightarrow \frac{20}{3.2} = \frac{10}{3} \Longrightarrow \boldsymbol{x = 3.33}$

نعلم أن $y = \frac{2R}{3P_y} \Longrightarrow y = \frac{2.20}{3.4} \Longrightarrow y = \frac{10}{3} \Longrightarrow \boldsymbol{y = 3.33}$

- الحالة الثانية R=30:

$$x = \frac{R}{3P_x} \Longrightarrow \frac{30}{3.2} \Longrightarrow \boldsymbol{x = 5}$$
$$y = \frac{2R}{3P_y} \Longrightarrow y = \frac{2.30}{3.4} \Longrightarrow \boldsymbol{y = 5}$$

- الحالة الثالثة R=40:

- $x = \frac{R}{3P_x} \Longrightarrow \frac{40}{3.2} \Longrightarrow \boldsymbol{x = 6.66}$
- $y = \frac{2R}{3P_y} \Longrightarrow y = \frac{2.40}{3.4} \Longrightarrow \boldsymbol{y = 6.66}$

ب. إذا قمنا بإيصال بين نقاط التوازن فإن هذا المنحنى يسمى بمنحنى **استهلاك – الدخل**.

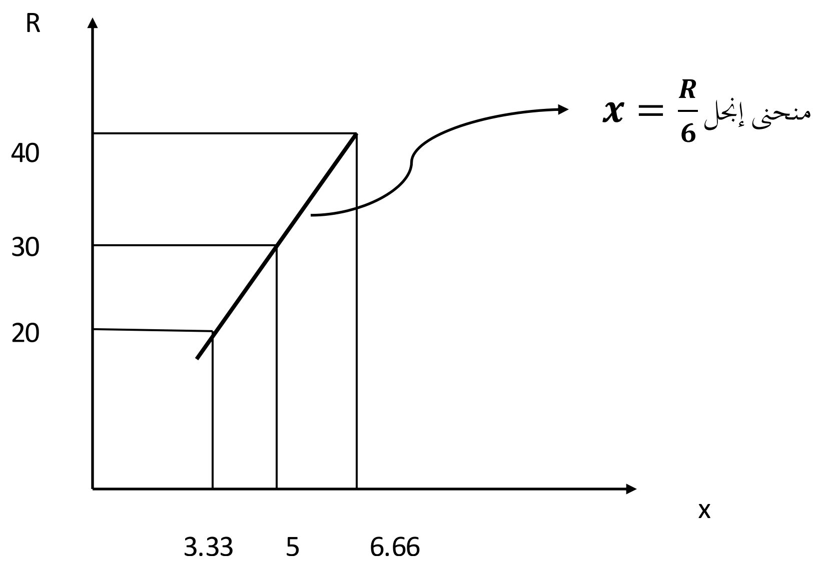
يمكن **تعريفه** : بأنه ذلك الرسم البياني الذي يربط بين نقاط التوازن في حالة تغير الخل مع بقاء الأسعار ثابتة.

ت. إستنتاج منحنى إنجل Engel : منحنى إنجل هو عبارة عن العلاقة بين الدخل R والكمية المطلوبة، فيمكن أن نعطي قيمة ل P_x في دالة الطلب حتى نتحصل على معادلة منحنى إنجل.

نعلم أن $x = \frac{R}{3P_x} \Longrightarrow x = \frac{R}{3.2} \Longrightarrow \boldsymbol{x = \frac{R}{6}}$ .... معادلة منحنى إنجل

يمكن رسمه من خلال إستعمال الجدول المساعد

R	20	30	40
x	3.33	5	6.66



5. إذا ارتفع P_x من 2 إلى 4 مع بقاء الدخل وسعر السلعة y ثابتين:

أ. **إيجاد نقطة التوازن الجديدة:**

- **حالة** $P_x = 2$

$$x = \frac{R}{3P_x} \Longrightarrow \frac{20}{3.2} \Longrightarrow \boldsymbol{x = 3.33}$$

$$y = \frac{2R}{3P_y} \Longrightarrow y = \frac{2.20}{3.4} \Longrightarrow \boldsymbol{y = 3.33}$$

- **حالة** $P_x = 4$:
  - $x = \frac{R}{3P_x} \Longrightarrow \frac{20}{3.4} \Longrightarrow \boldsymbol{x = 1.16}$
  - $y = \frac{2R}{3P_y} \Longrightarrow y = \frac{2.20}{3.4} \Longrightarrow \boldsymbol{y = 3.33}$

ب.إذا قمنا بإيصال بين **نقاط التوازن** يسمى هذا المنحنى **بمنحنى استهلاك –السعر**.

منحنى استهلاك – السعر: هو ذلك الرسم البياني الذي يربط بين نقاط التوازن في حالة تغير أحد الأسعار مع بقاء الدخل وأسعار السلع الأخرى ثابتة.

ب. رسم منحنى الطلب على السلعة x: نعلم أن دالة الطلب تبين العلاقة بين الكمية المطلوبة والسعر ، أي تصبح دالة الطلب على x بالشكل التالي: $x = \frac{R}{3P_x} \Longrightarrow \boldsymbol{x = \frac{20}{3P_x}}$

$\boldsymbol{P_x}$	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{x}$	6.6	3.3	2.2	1.6	1.3