وزارة التعليـــم العـــالي والبحـــث العلمـــي
جامعـــة الجيلالي بونعامة خميـــس مليانـــة
كليــة العلوم الاقتصادية، التجاريـة وعلــوم التسيير
قسم العلــوم التجاريــة

سنـة ثانيـة شعبة العلوم التجاريـــة أعمــال موجهــة مقياس: إحصـــاء 3

تماريـن محلولـــة

حول

نظرية التقدير

Estimation Theory

التمرين الأول:

في المجتمع الطبيعي $X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ وبفرض μ هو الوسيط المجهول، أوجد المقدر الأعظمي المبني على التوقع الأعظمي للوسيط μ

حـــل التمرين الأول:

طريقـــة 1: الخطوات كما يلي:

* دالة الكثافة من الشكل $f\left(x,\mu\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

وبالتالي: $f\left(x_i,\mu\right)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

* $$\log f\left(x,\mu\right)=\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x_i-\mu\right)^2$$

* نأخذ المجموع $$\sum_{i=1}^{n}\log f\left(x,\mu\right)=\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n}\log f\left(x,\mu\right)=n\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$$

* نشتق بالنسبة للوسيط μ: $$\frac{\partial}{\partial\mu}\sum_{i=1}^{n}\log f\left(x,\mu\right)=0+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)$$

* نساوي المشتق بالصفر ونحل المعادلة الناتجة: $$\frac{\partial}{\partial\mu}\sum_{i=1}^{n}\log f\left(x,\mu\right)=0\Rightarrow\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x-\mu\right)=0$$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu=0 \qquad \Rightarrow\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

بالتالي المقدر المبني على التوقع الأعظمي للوسيط μ في المجتمع الطبيعي المذكور هو $T=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$

طريقـــة 2: الخطوات كما يلي:

$$L\left(\mu\right)=\prod_{i=1}^{n}f\left(x,\mu\right)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}$$

$$\log L\left(\mu\right)=n\log\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log L(\mu)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

و بمساواتها بالصفر يكون: $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu=0\Rightarrow\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

$T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$ هو المقدر المبني على التوقع الأعظمي للوسيط μ في المجتمع الطبيعي المذكور .

التمرين الثاني:

في المجتمع الطبيعي $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ وبفرض μ و σ^2 مجهولين.

أوجد المقدرين المبنيين على التوقع الأعظمي للوسيطين μ و σ^2

حـــل التمرين الثاني:

تابع الامكانية العظمى:

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x,\mu,\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\left(\frac{1}{\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L(\mu,\sigma^2)=\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

وبالاشتقاق الجزئي مرة بالنسبة لـ μ وأخرى بالنسبة لـ σ^2 يكون:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log L(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log L(\mu,\sigma^2)=\frac{-n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

و بمساواة المعادلتين الأخيرتين بالصفر نحصل على:

$T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\equiv\bar{X}$ هو المقدر المبني على التوقع الأعظمي للوسيط μ في المجتمع الطبيعي المذكور .

$T_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ هو المقدر المبني على التوقع الأعظمي للوسيط σ^2 في المجتمع الطبيعي وهو مقدر متحيز.

التمرين الثالث:

لتكن لدينا $x_1,x_2,\dots\dots\dots,x_n$ عينة من متغيرات عشوائية تتبع التوزيع البواسوني $x\sim P(m)$

حيث:

$$f(x,m)=P_m[X=x]=e^{-m}\frac{m^x}{x!}$$

وبفرض m هو الوسيط المجهول، أوجد المقدر الأعظمي المبني على التوقع الأعظمي للوسيط m

حـل التمرين الثالث:

الخطوات كما يلي:

$$L(m)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,m)=\prod_{i=1}^{n}e^{-m}\frac{m^x}{x!}=e^{-nm}\frac{m^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}x!}$$

$$\log L(m)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\log m-nm-\sum_{i=1}^{n}\log(x!)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial m}\log L(m)=0\\ \dfrac{\partial^2}{\partial m^2}\log L(m)\prec 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{m}-n=0\Rightarrow\hat{m}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\overline{x}\\ -\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{m^2}\prec 0\end{cases}$$

$T=\hat{m}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$ هو المقدر المبني على التوقع الأعظمي للوسيط m في المجتمع البواسوني.

التمرين الرابع:

لتكن لدينا $x_1,x_2,........,x_n$ عينة من متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الأسي حيث:

$$f(x,\lambda)=\lambda e^{-\lambda x},\qquad 0\leq x\leq\infty\quad,\lambda\succ 0$$

وبفرض λ هو الوسيط المجهول، أوجد المقدر الأعظمي المبني على التوقع الأعظمي للوسيط λ

حـل التمرين الرابع:

الخطوات باختصار كما يلي:

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda x}=\lambda^n*e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x}$$

$$\log L(\lambda)=n\log\lambda-\lambda.\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\lambda}\log L(\lambda)=0 \\ \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log L(\lambda)\prec 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n\left(\frac{1}{\lambda}\right)-\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{n}{\lambda}-n\bar{x}=0\Rightarrow\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{x}} \\ -\frac{n}{\lambda^2}\prec 0 \end{cases}$$

$T=\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{x}}$ هو المقدر المبني على التوقع الأعظمي للوسيط λ في المجتمع الأسي.

التمرين الخامس:

نعلم من الفرضيات أن الأخطاء تتوزع توزيعا طبيعيا: $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma_\varepsilon^2) \quad ,\forall i=1.....n$

و نموذج الانحدار الخطي البسيط هو: $Y_i=\beta_0+\beta_1X_i+\varepsilon_i, \quad i=1,\ ...,\ .n$

و نموذج الانحدار الخطي البسيط المقدر هو: $\hat{Y_i}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_i, \quad i=1,\ ...,\ .n$

إذن دالة كثافة الأخطاء التي تتبع التوزيع الطبيعي تكتب على الشكل التالي:

$$f(\varepsilon_i)=(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}}.e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}$$

المطلوب: أوجد المقدرات بطريقة المعقولية العظمى المبنية على التوقع الأعظمي لكل من: $\beta_1 \quad ,\beta_0 \quad ,\sigma_\varepsilon^2$

حــل التمرين الخامس:

لدينا تابع الامكانية العظمى $L(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ حيث:

$$L(\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)=\prod_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\right)^n\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2\right)$$

نعلم أن: $\varepsilon_i=Y_i-\beta_0-\beta_1X_i, \quad i=1,\ ...,\ .n$ وعليه:

$$L(\beta_0,\beta_1,\sigma_\varepsilon^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\left(\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\right)^n\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0+\beta_1X_i)^2\right)$$

$$\log L(\beta_0,\beta_1,\sigma_\varepsilon^2)=\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n-\frac{n}{2}\log\sigma_\varepsilon-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i-\beta_0+\beta_1X_i}{\sigma_\varepsilon}\right)^2$$

$$\log L(\beta_0,\beta_1,\sigma_\varepsilon^2)=\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n-\frac{n}{2}\log\sigma_\varepsilon-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i-\beta_0+\beta_1X_i}{\sigma_\varepsilon}\right)^2$$

نقوم بتقدير معالم النموذج وذلك بتعظيم لوغاريتم دالة المعقولية العظمى و هذا بالاشتقاق الجزئي مرة بالنسبة لـ β_0 وأخرى بالنسبة لـ β_1 و أخرى بالنسبة σ_ε^2 يكون:

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_0}\log L\left(\beta_0,\beta_1,\sigma_\varepsilon{}^2\right)=-\frac{2}{2\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i)(-1) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\beta}_1}\log L\left(\beta_0,\beta_1,\sigma_\varepsilon{}^2\right)=-\frac{2}{2\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i)(-X_i) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\sigma}_\varepsilon^2}\log L\left(\beta_0,\beta_1,\sigma_\varepsilon{}^2\right)=\frac{-n}{2\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2}+\frac{1}{2\hat{\sigma}_\varepsilon{}^4}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i)^2=\left(-\frac{n}{2\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2}\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i{}^2\Big/2\hat{\sigma}_\varepsilon{}^4\right) \qquad (3)$$

و بمساواة المعادلات الثلاث بالصفر نحصل على:

من المعادلة الأولى: $T_1=\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}$

$\hat{\beta}_0$ هو المقدر المبني على التوقع الأعظمي للوسيط β_0 في النموذج وهو مقدر غير متحيز.

من المعادلة الثانية: $T_2=\hat{\beta}_1=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)$

$\hat{\beta}_1$ هو المقدر المبني على التوقع الأعظمي للوسيط β_1 في النموذج وهو مقدر غير متحيز.

من المعادلة الثالثة: $T_3=\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2 \Leftrightarrow -n\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2=-\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 \Rightarrow \hat{\sigma}_\varepsilon{}^2=\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2\Big/n\right)$

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ هو المقدر المبني على التوقع الأعظمي للوسيط σ_ε^2 في النموذج.

$$\frac{\partial^2}{\partial\hat{\beta}_0}\log L\left(\beta_0,\beta_1,\sigma_\varepsilon{}^2\right)=-\frac{n}{\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2}\prec 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\hat{\beta}_1}\log L\left(\beta_0,\beta_1,\sigma_\varepsilon{}^2\right)=-\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2}\prec 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\hat{\sigma}_1{}^2}\log L\left(\beta_0,\beta_1,\sigma_\varepsilon{}^2\right)=\frac{n}{2\hat{\sigma}_\varepsilon{}^4}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i{}^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon{}^6}$$

$$P\left(Z\geq\frac{0.05}{0.06}\right)=1-P\left(Z\prec 0.833\right)=1-0.7967=0.2033$$

التمرين السادس:

لتكن لدينا $x_1,x_2,........,x_n$ **عينة من متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي** $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$

المطلوب:

1- إيجاد مقدر الوسيط المجهول μ اعتمادا على طريقة العزوم.

2- إيجاد مقدر الوسيط المجهول σ^2 اعتمادا على طريقة العزوم.

حـــل التمرين السادس:

1- بما أن μ هو التوقع الرياضي في التوزيع الطبيعي فإنه من المناسب اختيار العزم الأول حول الصفر، وكنا قد وجدنا سابقا أن العزم الأول حول الصفر هو:

- في المجتمع الطبيعي هو: $\alpha_1 = E(X_i) = \mu$
- وفي العينة هو: $\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

وبوضع $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1$ ينتج لدينا: $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$

أي المقدر المطلوب هو: $T = \bar{X}$

وهو ذات المقدر الذي حصلنا عليه بطريقة الامكانية العظمى وهو مقدر متسق وغير متحيز.

2- بما أن σ^2 يمثل التباين في التوزيع الطبيعي فإنه من المناسب اختيار العزم الثاني حول التوقع الرياضي أي:

- في المجتمع هو: $\mu_2 = E(X-\mu)^2 = \sigma^2$
- وفي العينة هو: $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

وبوضع $\hat{\mu}_2 = \mu_2$ ينتج لدينا: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

أي أن المقدر المطلوب هو: $T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

وهو مقدر التباين في التوزيع الطبيعي بطريقة العزوم وهو نفسه الذي حصلنا عليه بطريقة الامكانية العظمى وهو مقدر متسق، لكنه متحيز.

التمرين السابع:

استخدم طريقة العزوم لتقدير الوسيط θ في المجتمع الاحصائي الذي تابع كثافته من الشكل:

$$f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1} \quad ;(0 \prec x \prec 1 \quad , \quad \theta \succ 0)$$

حـــل التمرين السابع:

- العزم الأول حول الصفر للمجتمع هو:

$$\alpha_1 = E(X) = \int_0^1 x.f(x,\theta)dx$$

$$= \int_0^1 x.\theta x^{\theta-1}dx = \theta\int_0^1 x^{\theta}dx = \frac{\theta}{\theta+1}\left[x^{\theta+1}\right]_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

- العزم الأول حول الصفر للعينة هو:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i = \bar{X}$$

وبوضع : $\hat{\alpha}_1 = \alpha_1$ ينتج لدينا:

$$\frac{\theta}{\theta+1} = \bar{X} \Rightarrow \theta = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

أي أن المقدر المطلوب هو:

$$T = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$$

التمرين الثامن:

X_i	3	4	1	5	7	**20**
Y_i	2	9	5	8	16	**40**
X_i^2	9	16	1	25	49	**100**
$(X_i-\bar{X})$	1-	0	3-	1	3	**0**
$(Y_i-\bar{Y})$	6-	1	3-	0	8	**0**
X_iY_i	6	36	5	40	112	**199**
$(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})$	6	0	9	0	24	**39**
$(X_i-\bar{X})^2$	1	0	9	1	9	**20**
$\hat{Y}_i$	6.05	8	2.15	9.95	13.85	**40**
$\hat{\varepsilon}_i=(Y_i-\hat{Y}_i)$	-4.05	1	2.85	1.95-	2.15	**0**
$\hat{\varepsilon}_i^2=(Y_i-\hat{Y}_i)^2$	16.4025	1	8.1225	3.8025	4.6225	**33.95**

حـــل التمرين الثامن:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} = \frac{39}{20} = 1.95$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X} = 8-(1.95)4 = 0.2$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i = 0.2 + 1.95X_i$$

لدينا:
$$\sum_{i=1}^{5}\hat{\varepsilon}_i^{\,2}=\sum_{i=1}^{5}(Y_i-\hat{Y}_i)^2=33.95$$

إذا مقدرة التباين هي:
$$\hat{\sigma}_\varepsilon^{\,2}=\frac{\sum_{i=1}^{12}\hat{\varepsilon}_i^{\,2}}{n-2}=\frac{\sum_{i=1}^{12}(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{n-2}=\frac{33.95}{5-2}=11.31666$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right)\sigma_\varepsilon^2=\left(\frac{1}{5}+\frac{(4)^2}{20}\right)11.316=11.316$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma_\varepsilon^{\,2}}{\sum_{i=1}^{12}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}=\frac{11.316}{20}=0.5658$$

التمرين التاسع:

البيانات التالية تعبر عن السعر وكمية الفراولة الذي تم بيعها في أحد أسواق الفواكه والخضار لمدينة عين الدفلى في مدة 12يوم إذا رمزنا للسعر بـ X وللكمية ب Y

باستخدام المعادلة التالية: $Y_i=\beta_0+\beta_1X_i+\varepsilon_i\,,\quad i=1,2,3.........12$

$$\bar{X}=55,\qquad \sum_{i=1}^{12}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)=-3150$$

$$\bar{Y}=100,\qquad \sum_{i=1}^{12}\left(X_i-\bar{X}\right)^2=2625,\quad \sum_{i=1}^{12}(Y_i-\hat{Y}_i)^2=538$$

حــل التمرين التاسع:

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)\left(Y_i-\bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}=\frac{-3150}{2650}=-1.2$$

$$\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}=100-(-1.2)55=166$$

$$\hat{Y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_i=166-1.2X_i$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)=\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}\right)\sigma_\varepsilon^2=\left(\frac{1}{12}+\frac{(55)^2}{2650}\right)\sigma_\varepsilon^2=1.2248\sigma_\varepsilon^2$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{12}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2625}=0.00038\sigma_\varepsilon^2$$

لدينا: $\sum_{i=1}^{12}\hat{\varepsilon}_i^2=\sum_{i=1}^{12}(Y_i-\hat{Y}_i)^2=538$

إذا مقدرة التباين هي: $\hat{\sigma}_\varepsilon^2=\frac{\sum_{i=1}^{12}\hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}=\frac{\sum_{i=1}^{12}(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{n-2}=\frac{538}{12-2}=53.8$

ومنها يمكن الحصول على مقدرات تباين $\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_0$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)=1.2248*53.8=65.89$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)=0.00038*53.8=0.0204$$

التمرين العاشر:

أخذت العينة 3.7 ، 4.1 ، 3.2 ، 4 ، 5 من مجتمع طبيعي غير محدود حيث $X\sim N\left(\mu_X,\sigma_X^2\right)$ $\sigma_X^2=4$.

من خلال هذه العينة أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ_X عند مستوى ثقة 99% ، 95% ، 90% ؟

حـــل التمرين العاشر:

نعلم أن مجال الثقة لـ μ_X هو كالتالي: $\mu_X\in\left[\bar{X}-Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}\quad,\quad\bar{X}+Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}\right]_{1-\alpha}$

لدينا المجتمع غير محدود معناه حجم العينة مهمل أمام حجم المجتمع أي $\frac{n}{N}=\frac{5}{\infty}\approx0\le0.05$ و هذا معناه أن معامل الإرجاع يؤول إلى الواحد حيث: $\frac{N-n}{N-1}\simeq\frac{N}{N}\simeq1$

بالتالي ففي الحالتين إذا كان السحب بإرجاع أو بدون إرجاع فإن: $\sigma_{\bar{X}}=\left(\sigma_X/\sqrt{n}\right)=\left(2/\sqrt{5}\right)=0.8944$

يصبح مجال الثقة لـ μ_X كالتالي: $\mu_X\in\left[\bar{X}-Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_X/\sqrt{n}\quad,\quad\bar{X}+Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_X/\sqrt{n}\right]_{1-\alpha}$

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{3.7+4.1+3.2+4+5}{5}=\frac{20}{5}=4$$

* تحديد قيم معاملات الثقة $Z_{(1-(\alpha/2))}$ حسب قيم مستوى المعنوية $\alpha=(1,5,10)\%$

* $\alpha=0.01$ $\quad Z_{(1-(\alpha/2))}=Z_{(1-(0.01/2))}=Z_{(1-0.005)}=Z_{(0.995)}=2.58$
* $\alpha=0.05$ $\quad Z_{(1-(\alpha/2))}=Z_{(1-(0.05/2))}=Z_{(1-0.025)}=Z_{(0.975)}=1.96$
* $\alpha=0.10$ $\quad Z_{(1-(\alpha/2))}=Z_{(1-(0.1/2))}=Z_{(1-0.05)}=Z_{(0.95)}=1.645$

* تحديد مجال الثقة لـ μ_X حسب قيم مستوى الثقة $(1-\alpha)=(0.99,0.95,0.90)$

$$\mu_X \in \begin{cases} \left[4-(2.58*0.8944) \quad , \quad 4+(2.58\times0.8944)\right]_{0.99} \\ \left[4-(1.96*0.8944) \quad , \quad 4+(1.96\times0.8944)\right]_{0.95} \\ \left[4-(1.645*0.8944) \quad , \quad 4+(1.645\times0.8944)\right]_{0.90} \end{cases}$$

$$\mu_X \in \begin{cases} [1.692 \quad , \quad 6.307]_{0.99} \\ [2.246 \quad , \quad 5.753]_{0.95} \\ [2.528 \quad , \quad 5.471]_{0.90} \end{cases}$$

نلاحظ أن مجال الثقة يتسع بزيادة قيم معامل الثقة $Z_{(1-(\alpha/2))}$ أي عند تصغير مستوى المعنوية $\alpha\%$ $\Leftrightarrow$

زيادة قيم معامل الثقة $\Leftrightarrow$ توسيع مجال الثقة $\Leftrightarrow$ زيادة الدقة في التقدير.

من مجالات الثقة السابقة لـ μ_X نقول أننا:

* واثقون بنسبة 99% بأن متوسط المجتمع μ_X ينتمي إلى المجال $[1.692 \quad , \quad 6.307]$
* واثقون بنسبة 95% بأن متوسط المجتمع μ_X ينتمي إلى المجال $[2.246 \quad , \quad 5.753]$
* واثقون بنسبة 90% بأن متوسط المجتمع μ_X ينتمي إلى المجال $[2.528 \quad , \quad 5.471]$

التمرين الحادي عشر:

نفس التمرين العاشر مع σ_X^2 مجهولة (المجتمع طبيعي وتباين المجتمع مجهول وحجم العينة صغير)

أخذت العينة 3.7 ، 4.1 ، 3.2 ، 4 ، 5 من مجتمع طبيعي $X \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ حيث σ_X^2 مجهولة.

من خلال هذه العينة أوجد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ_X عند مستوى ثقة 99%، 95%، 90%؟

حل التمرين الحادي عشر:

نعلم أن مجال الثقة لـ μ_X في حالة المجتمع طبيعي وتباين المجتمع مجهول وحجم العينة صغير هو كالتالي:

$$\mu_X \in \left[\bar{X} - t_{(1-(\alpha/2)),(n-1))}\sigma_{\bar{X}} \quad , \quad \bar{X} + t_{(1-(\alpha/2)),(n-1))}\sigma_{\bar{X}}\right]_{1-\alpha}$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \begin{cases} \dfrac{\sigma_X^2}{n} = \dfrac{s_x{}^2}{n-1} \quad avec\ remise \\ \dfrac{\sigma_X^2}{n} \cdot \dfrac{N-n}{N-1} = \dfrac{s_x{}^2}{n-1} \cdot \dfrac{N-n}{N-1} = \quad sans\ remise \\ \dfrac{n}{N} \le 0.05 \Rightarrow \dfrac{N-n}{N-1} \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{s_x^2}{n-1} \cdot \dfrac{N-n}{N-1} \cong \dfrac{s_x^2}{n-1} \end{cases}$$

لدينا المجتمع غير محدود معناه حجم العينة مهمل أمام حجم المجتمع أي $\dfrac{n}{N} = \dfrac{5}{\infty} \approx 0 \le 0.05$ و هذا معناه أن معامل الإرجاع يؤول إلى الواحد حيث: $\dfrac{N-n}{N-1} \approx \dfrac{N}{N} \approx 1$، بالتالي ففي الحالتين إذا كان السحب بإرجاع أو بدون إرجاع فإن مجال الثقة لـ μ_X هو كالتالي:

$$\mu_X \in \left[\bar{X} - t_{(1-(\alpha/2),(n-1))} S_x / \sqrt{n-1} \quad , \quad \bar{X} + t_{(1-(\alpha/2),(n-1))} S_x / \sqrt{n-1}\right]_{1-\alpha}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{3.7+4.1+3.2+4+5}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{(3.7-4)^2 + (4.1-4)^2 + (3.2-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2}{4}$$

$$= \frac{0.09+0.01+0.64+0+1}{4} = \frac{1.74}{4} = 0.435$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \left(\sigma_X / \sqrt{n}\right) = \left(s_x^2 / \sqrt{n-1}\right) = \left(0.435 / \sqrt{5-1}\right) = 0.2175$$

* تحديد قيم معاملات الثقة $t_{(1-(\alpha/2),n-1)}$ حسب قيم مستوى المعنوية $\%(1,5,10) = \alpha$

* $\alpha = 0.01$ $\quad ddl\ (n-1=4)$ $\quad t_{(1-(\alpha/2),n-1)} = t_{(1-(0.01/2),5-1)} = t_{((1-0.005),5-1)} = t_{(0.995,4)} = 4.596$
* $\alpha = 0.05$ $\quad ddl\ (n-1=4)$ $\quad t_{(1-(\alpha/2),n-1)} = t_{(1-(0.05/2),5-1)} = t_{((1-0.025),5-1)} = t_{(0.975,4)} = 2.776$
* $\alpha = 0.10$ $\quad ddl\ (n-1=4)$ $\quad t_{(1-(\alpha/2),n-1)} = t_{(1-(0.1/2),5-1)} = t_{((1-0.05),5-1)} = t_{(0.950,4)} = 2.132$

* تحديد مجال الثقة لـ μ_X حسب قيم مستوى الثقة $(0.99, 0.95, 0.90) = (1-\alpha)$

$$\mu_X \in \begin{cases} \left[4-(4.596*0.2175) \quad , \quad 4+(4.596*0.2175)\right]_{0.99} \\ \left[4-(2.776*0.2175) \quad , \quad 4+(2.776*0.2175)\right]_{0.95} \\ \left[4-(2.132*0.2175) \quad , \quad 4+(2.132*0.2175)\right]_{0.90} \end{cases}$$

$$\mu_X \in \begin{cases} \left[3.00037 \quad , \quad 4.99963\right]_{0.99} \\ \left[3.39622 \quad , \quad 4.60378\right]_{0.95} \\ \left[3.53629 \quad , \quad 4.46371\right]_{0.90} \end{cases}$$

نلاحظ أن مجال الثقة يتسع بزيادة قيم معامل الثقة $t_{(1-(\alpha/2)),n-1)}$ أي عند تصغير مستوى المعنوية $\alpha\%$ $\Leftrightarrow$ زيادة قيم معامل الثقة $\Leftrightarrow$ توسيع مجال الثقة $\Leftrightarrow$ زيادة الدقة في التقدير.

من مجالات الثقة السابقة لـ μ_X نقول أننا:

* واثقون بنسبة 99% بأن متوسط المجتمع μ_X ينتمي إلى المجال $[3.00037 \quad , \quad 4.99963]$
* واثقون بنسبة 95% بأن متوسط المجتمع μ_X ينتمي إلى المجال $[3.39622 , \quad 4.60378]$
* واثقون بنسبة 90% بأن متوسط المجتمع μ_X ينتمي إلى المجال $[3.53629 \quad , \quad 4.46371]$

التمرين الثاني عشر:

في دراسة لإنتاجية فلاحي ولاية عين الدفلى لمحصول البطاطا، سحبنا من مجتمع المنتجين وعددهم 4519 منتج عينة عشوائية حجمها 100 منتج يشتغلون بمناطق مختلفة في الولاية، متوسط الإنتاجية المحصل عليها هي 385 قنطار في الهكتار.

– أوجد مجال الثقة لمتوسط إنتاجية فلاحي الولاية لمحصول البطاطا μ_X بمستوى الثقة 0.95 إذا علمت أن الانحراف المعياري لإنتاجية فلاحي الولاية ككل هو 100 قنطار/هكتار لمحصول البطاطا ؟

حل التمرين الثاني عشر:

نعلم أن مجال الثقة لـ μ_X هو كالتالي: $\mu_X \in \left[\bar{X} - Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}} \quad , \quad \bar{X} + Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}\right]_{1-\alpha}$

لدينا مجتمع محدود وحجمه 4519 و العينة حجمها 50 بالتالي كسر المعاينة يساوي إلى $\frac{n}{N} = \frac{100}{4519} = 0.022 \le 0.05$، معناه حجم العينة مهمل أمام حجم المجتمع و هذا معناه أن معامل الإرجاع يؤول إلى الواحد حيث: $\frac{N-n}{N-1} = \frac{4519-100}{4519-1} = \frac{4419}{4518} = 0.978 \approx 1$، بالتالي ففي الحالتين إذا كان السحب بإرجاع أو بدون إرجاع فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \left(\sqrt{\sigma_X^2/n}\right) = \left(\sqrt{10000/100}\right) = \left(\sqrt{100}\right) = 10$

يصبح مجال الثقة لـ μ_X كالتالي: $\mu_X \in \left[\bar{X} - Z_{(1-(\alpha/2))}\,\sigma_X/\sqrt{n} \quad , \quad \bar{X} + Z_{(1-(\alpha/2))}\,\sigma_X/\sqrt{n}\right]_{1-\alpha}$

* تحديد قيم معامل الثقة علما أن مستوى الثقة : $1-\alpha = 0.95$ هو:

$$Z_{(1-(\alpha/2))} = Z_{(0.975)} = 1.96$$

* تحديد مجال الثقة لـ μ_X

$$\mu_X \in \left[385 - (1.96*10) \quad , \quad 385 + (1.96\times 10)\right]_{0.95}$$

$$\mu_X \in [365.4 \quad , \quad 404.6]_{0.95}$$

نقول أننا واثقون بنسبة 95% بأن متوسط إنتاجية فلاحي ولاية عين الدفلى لمحصول البطاطا μ_X ينتمي إلى المجال $[365.4 \quad , \quad 404.6]$

التمرين الثالث عشر:

ليكن لدينا معطيات حول إنتاجية 1500 أرض زراعية مختلفة لمحصول الحبوب بمتوسط حسابي μ وانحراف معياري قدره 5 قنطار/هكتار، أخذنا عينة عشوائية بسيطة حجمها 20 أرض زراعية مزروعة حبوبا فكان متوسط مردوديتها هو 35 قنطار/هكتار.

المطلــوب: **إيجاد فترة الثقة لمتوسط مردودية الحبوب عند مستوى ثقة 95% ؟.**

حل التمرين الثالث عشر:

بما أن المجتمع لا يخضع للتوزيع الطبيعي وحجم العينة صغير $(n=20 \prec 30)$ إذا لا يمكننا استخدام توزيع ستيودنت وإنما نستخدم متراجحة تشيبيشيف كما يلي:

لدينا من المعطيات: $\sigma_X = 5, \quad \bar{X} = 35, \quad n = 20, \quad 1-\alpha = 0.95$

$$P\left[|X-\mu| \prec c\right] \geq 1-\frac{\sigma^2}{c^2} \Rightarrow P\left[|X-\mu| \geq c\right] \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$$

نعلم أن مجال الثقة لـ μ_X هو كالتالي: $\mu_X \in \left[\bar{X} - k.\sigma_{\bar{X}} \quad , \quad \bar{X} + k.\sigma_{\bar{X}}\right]_{1-\alpha=1-(1/k^2)}$

لدينا مجتمع حجمه 1500 و العينة حجمها 20 بالتالي كسر المعاينة يساوي إلى $\frac{n}{N} = \frac{20}{1500} = 0.013 \leq 0.05$، معناه حجم العينة مهمل أمام حجم المجتمع و هذا معناه أن معامل الإرجاع يؤول إلى الواحد حيث: $\frac{N-n}{N-1} = \frac{1500-20}{1500-1} = \frac{1480}{1499} = 0.987 \approx 1$، بالتالي ففي الحالتين إذا كان السحب بإرجاع أو بدون إرجاع فإن: $\sigma_{\bar{X}} = \left(\sqrt{\sigma_X^2/n}\right) = \left(\sqrt{25/20}\right) = \left(\sqrt{1.25}\right) = 1.118$

يصبح مجال الثقة لـ μ_X كالتالي: $\mu_X \in \left[\bar{X} \pm k.\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]_{1-(1/k^2)}$

* تحديد قيم معامل الثقة علما أن مستوى الثقة: $1-\alpha = 0.95$ هو:

$$1-\alpha = 1-\frac{1}{k^2} \Rightarrow 0.95 = 1-\frac{1}{k^2} \Rightarrow k = \sqrt{20} = 4.472$$

* تحديد مجال الثقة لـــ μ_X

$$P\left(\bar{X}-k\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{X}+k\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha=1-\frac{1}{k^2}$$

$$P\left(35-\sqrt{20}\frac{5}{\sqrt{20}}\leq\mu_X\leq35+\sqrt{20}\frac{5}{\sqrt{20}}\right)=0.95$$

$$\mu_X\in[30\quad,\quad40]_{0.95}$$

نقول أننا واثقون بنسبة 95% بأن متوسط إنتاجية فلاحي ولاية عين الدفلى لمحصول البطاطا μ_X ينتمي إلى المجال $[30\quad,\quad40]$

التمرين الرابع عشر:

في دراسة لأوزان خرفان التسمين الموجه للاستهلاك في عيد الأضحى المبارك، سحبنا عينة عشوائية حجمها 250 خروف متوسط الوزن المحصل عليه هو 34.2 كغ.

– أوجد مجال الثقة لمتوسط وزن الخرفان μ_X بمستوى الثقة 0.88 إذا علمت أن الانحراف المعياري لوزن الخرفان للمجتمع ككل هو 6.25 كغ ؟

حل التمرين الرابع عشر:

لدينا مجتمع حجمه غير معروف بالتالي ففي الحالتين إذا كان السحب بإرجاع أو بدون إرجاع فإن:

$$\sigma_{\bar{X}}=\left(\sqrt{\sigma_X^2/n}\right)=\left(\sqrt{39.0625/250}\right)=\left(\sqrt{0.15625}\right)=0.39528$$

نعلم أن مجال الثقة لـ μ_X هو كالتالي: $\mu_X\in\left[\bar{X}-Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_X/\sqrt{n}\quad,\quad\bar{X}+Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_X/\sqrt{n}\right]_{1-\alpha}$

* تحديد قيم معامل الثقة علما أن مستوى الثقة : $1-\alpha=0.88$ هو:

$$Z_{(1-(\alpha/2))}=Z_{(0.94)}=1.555$$

* تحديد مجال الثقة لـ μ_X

$$\mu_X\in[34.2-(1.555*0.395)\quad,\quad34.2+(1.555\times0.395)]_{0.88}$$

$$\mu_X\in[33.585\quad,\quad34.814]_{0.88}$$

نقول أننا واثقون بنسبة 88% بأن متوسط وزن خرفان التسمين الموجه للاستهلاك في عيد الأضحى μ_X ينتمي إلى المجال $[33.585\quad,\quad34.814]$

التمرين الخامس عشر:

أوجد حدي الثقة الأدنى و الأعلى بمستوى ثقة 95% لمجتمع حجمه 1500 مجهول التوزيع والتباين، إذا علمت أنه تم سحب عينة من هذا المجتمع بدون إرجاع حجمها $n=150$ فكان متوسطها الحسابي هو $\bar{x}=12$ و انحرافها المعياري $S_x=2$

حل التمرين الخامس عشر:

لدينا مجتمع حجمه 1500 وهو مجهول التباين والتوزيع والسحب بدون إرجاع بالتالي كسر المعاينة يساوي إلى $\frac{n}{N}=\frac{150}{1500}=0.1\succ 0.05$، و هذا معناه أن معامل الإرجاع لا يؤول إلى الواحد فإن مجال الثقة لـ μ_X هو كالتالي:

$$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{(1-(\alpha/2))}\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\right]_{1-\alpha}$$

* تحديد قيم معامل الثقة: $Z_{(1-(\alpha/2))}=Z_{(0.975)}=1.96$

* تحديد مجال الثقة لـ μ_X : $\mu_X \in \left[12 \pm \left(1.96 * \frac{2}{\sqrt{150-1}}\sqrt{\frac{1500-150}{1500-1}}\right)\right]_{0.95}$

نقول أننا واثقون بنسبة 95% بأن μ_X ينتمي إلى هذا المجال.

التمرين السادس عشر:

إذا علمت أن تباين عينة عشوائية ذات حجم $n=20$ مسحوبة من مجتمع طبيعي $N\left(15,\sigma_X^2\right)$ هو

$$S_x{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i-15)^2=16$$

المطلـوب: أوجد مجال الثقة لتباين المجتمع بمستوى ثقة 0.95؟

حل التمرين السادس عشر:

لدينا: $1-\frac{\alpha}{2}=0.975$ and $\frac{\alpha}{2}=0.025 \Leftarrow \alpha=0.05 \Leftarrow 1-\alpha=0.95$

من جدول توزيع مربع كاي بدرجة حرية $n=20$ لدينا:

$$\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n\right)}=\chi^2_{\left(1-\frac{0.05}{2},20\right)}=\chi^2_{(0.975,20)}=34.1696$$

$$\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n\right)}=\chi^2_{\left(\frac{0.05}{2},20\right)}=\chi^2_{(0.025,20)}=9.59078$$

وعليه فإن:

حـد الثقـة الأدنى هو:
$$\frac{n\,.S_X^{2}}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n\right)}}=\frac{20\times 16}{34.1696}=9.365$$

و حـد الثقـة الأعلى هو:
$$\frac{n\,.S_X^{2}}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n\right)}}=\frac{20\times 16}{9.59078}=33.365$$

مجـال الثقـة لمعلمة تباين المجتمع σ_X^2 هو:
$$P\left(\frac{n\,.S_X^{2}}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n\right)}}\prec\sigma_X^2\prec\frac{n\,.S_X^{2}}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n\right)}}\right)=1-\alpha$$

وهذا يعني أن: $P\left(9.365\prec\sigma_X^2\prec 33.365\right)=1-\alpha$ معناه: $\sigma_X^2\in[9.365\ ,\ 33.365]_{0.95}$

أي أننا واثقون بنسبة 95 % من أن معلمة تباين المجتمع σ_X^2 تنتمي إلى هذا المجال.

التمرين السابع عشر:

إذا علمت أن تباين عينة عشوائية ذات حجم $n=17$ مسحوبة من مجتمع طبيعي متوسطه مجهول
$$S_x{}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{17}\sum_{i=1}^{17}(x_i-\bar{x})^2=12$$ **هو** $X\sim N\left(\mu_X,\sigma_X^2\right)$

المطلــوب: أوجد مجال الثقة لتباين المجتمع بمستوى ثقة 0.90؟

حل التمرين السابع عشر:

لدينا: $1-\alpha=0.90\ \Rightarrow\ \alpha=0.10\ \Rightarrow\ \frac{\alpha}{2}=0.05\ \text{and}\ 1-\frac{\alpha}{2}=0.95$

من جدول توزيع مربع كاي بدرجة حرية $n-1=17-1=16$ لدينا:
$$\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}=\chi^2_{\left(1-\frac{0.10}{2},16\right)}=\chi^2_{(0.95,16)}=26.2962$$
$$\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}=\chi^2_{\left(\frac{0.10}{2},17-1\right)}=\chi^2_{(0.05,16)}=7.96165$$

وعليه فإن:

حـد الثقـة الأدنى هو:
$$\frac{n\,.S_X^{2}}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}=\frac{17\times 12}{26.2962}=7.757$$

و حـد الثقـة الأعلى هو: $\dfrac{n\,.S_X^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}=\dfrac{17\times 12}{7.96165}=25.6228$

مجـال الثقــة لمعلمة تباين المجتمع σ_X^2 هو: $P\left(\dfrac{n\,.S_X^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}\prec\sigma_X^2\prec\dfrac{n\,.S_X^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}\right)=1-\alpha$

وهذا يعني أن: $P\left(7.75\prec\sigma_X^2\prec 25.62\right)=1-\alpha$ معناه: $\sigma_X^2\in[7.757\quad,\quad 25.6228]_{0.90}$

أي أننا واثقون بنسبة 90 % من أن معلمة تباين المجتمع σ_X^2 تنتمي إلى هذا المجال.