وزارة التعليــــم العـــالي والبحـــث العلمـــــي

جامعـــة الجيلالي بونعامة خميــــس مليانـــة

كليـــة العلوم الاقتصادية، التجاريـة وعلــوم التسيير

قسـم العلــوم التجاريــة

سنـة ثانيـة شعبة العلوم التجاريـــة   محاضــــرة مقياس: إحصـــاء 3

محاضـــرة 3

حول

نظريــــة التقـديــــر

Estimation Theory

الفهــــــرس حول نظريـــة التقدير

نظريـــــة التقـديــــر

Estimation Theory

ذكرنا في المحور السابق بأن العينة ***sample*** هي جزء من المجتمع ***Population*** وطريقة اختيار هذا الجزء يسمي طريقة المعاينة ***sampling method*** والغاية الرئيسية من دراسة العينات هوللاستدلال منها على خواص المجتمع الذي تعود اليه هذه العينات.

فإذا كان لدينا المتغير العشوائي X فان توزيعه الاحتمالي (أو كثافة احتماله) تعتمد على ثابت θ واحد أو أكثر لا تعرف قيمتها، وهذه الثوابت تسمى معالم ***Parameters*** وفي هذا المحور سندرس طرق تقدير معالم المجتمع من مقاييس الاحصائيات التي تحسب من العينة حيث اننا نحتاج لحساب قيمة أو إحصائية ***Statistic*** من العينة لكل معلمة من معالم المجتمع (أو دالة كثافة الاحتمال).

هذا وكل قيمة تحسب من العينة تسمى تقديرا ***Estimate*** أما الطريقة التي استخدمت في التقدير فتسمي مقدرة ***Estimator*** فالتقدير غير ثابت من عينة إلى أخرى عند استخدام نفس الطريقة بينما المقدر يكون ثابتا إلا إذا تغيرت طريقته، هذا والتقدير إما أن يكون : تقدير المعلمة بنقطة ***Point Estimation*** أو تقدير المعلمة بفترة ***Interval Estimation***

1- التقديـــر بنقطـــة Point Estimation

إذا حسبت قيمة مفردة من العينة كتقدير لمعلمة من المجتمع فالطريقة تسمى تقدير النقطة لأن نقطة واحدة فقط من فضاء العينة قد استخدم تقدير للمعلمة.

مثـــال: إن قيمة الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ هوتقدير نقطة للمعلمة μ_X الوسط الحسابي للمجتمع الذي تعود إليه هذه العينة ، كما أن التباين S_X^2 للعينة هو تقدير نقطة لتباين المجتمع σ_X^2، كذلك النسبة P' هوتقدير لنسبة المجتمع P .

خصائص المقدر الجيد هي :

عدم التحيز Unbiasedness : التحيز هو ذلك الفرق بين مقدرة ما ووسط توزيعها، فإذا كان هذا الفرق يختلف عن الصفر نقول عن ذلك المقدر بأنه متحيز.

إن المقدر $\hat{\theta}$ يعتبر مقدرا غير متحيز اذا كان توقعه يساوي قيمة المعلمة θ أي $E\left(\hat{\theta}\right)=\theta$

مثال

الاتســاق Consistency : يكون المقدر متسقا اذا كانت قيمته لا تختلف اختلاف جوهرية عن قيمة المعلمة الحقيقية للمجتمع بزيادة حجم العينة أي أن $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right| \prec \varepsilon\right)=1$ ،

حيث أن ε هوالفرق بين المقدر والمعلمة .

الكفــاءة Efficiency : إن كفاءة المقدر غير المتحيزة $\hat{\theta}_1$ إلى المقدر غير المتحيز $\hat{\theta}_2$ هونسبة تباين المقدر $\hat{\theta}_2$ إلى تباين المقدرة $\hat{\theta}_1$ أي $e\left(\hat{\theta}_1\right)=V\left(\hat{\theta}_2\right)/V\left(\hat{\theta}_1\right)$

ومن التعريف أعلاه يتضح بأن المقدر الأقل تباينا هوالأعلى كفاءة.

مثــال:

الوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ هومقدر غير متحيز ل μ_X وكذلك الوسيط للعينة هومقدر غير متحيز لـ μ_X

ولكن تباين $\bar{X}$ هو $\frac{\delta_X^2}{n}$ بينما تباين الوسيط هو $\frac{\pi}{2}\frac{\delta_x^2}{n}$ ، لذا فان كفاءة الوسط الحسابي هو

$$eff\left(\bar{X}\right)=\frac{V\left(M_e\right)}{V\left(\bar{X}\right)}=\frac{(\pi/2)\times\left(\sigma_X^2/n\right)}{\left(\sigma_X^2/n\right)}=\frac{\pi}{2}$$

أي أن الوسط الحسابي $\bar{X}$ هوأكفأ تقديرا من الوسيط.

الكفايــة Sufficiency :

يكون المقدر $\hat{\theta}$ مقدرا كافيا للمعلمة θ اذا كان قد شمل كل المعلومات ذات العلاقة به θ المتوافرة في العينة.

فعند سحب عينة عشوائية في مجتمع يتوزع توزعا طبيعيا فأن $\bar{X}$ هو مقدر كاف لـ μ_X لأنه لا يمكن إضافة أي شيء على $\bar{X}$ لجعله مقدرا أحسن لـ μ_X لأن $\bar{X}$ يحوي على جميع المعلومات المتعلقة ب μ_X من العينة.

هذا وهناك عدة طرق مهمة لايجاد تقدير المعلمة بنقطة وهي :

1-1- طريقة الإمكـان الأكبـر Maximum Likelihood Method

تعتبر هذه الطريقة من أهم طرق التقدير النقطي وخاصة في حالة العينات الكبيرة وتعزى هذه الطريقة لرونالد فيشر، وهي تعطي مقدرات كافية إن وجدت، إلا أنها قد تكون متحيزة أحيانا، ولكن في الحالة عندما تؤول n إلى ما لا نهاية (حيث n حجم العينة) فإنها تعطي مقدرات غير متحيزة ولها أقل تباين ومتسقة دوما، كما يؤول توزيعها إلى التوزيع الطبيعي مع زيادة حجم العينة.

بفرض أن المجتمع الإحصائي $\{A, X, f(x,\theta)\}$ حيث θ الوسيط المراد تقديره، ولنفرض أن متغيرات القيم الملاحظة في العينة من الشكل: $X_1, X_1, \ldots\ldots, X_n \sim I.I.D$، نقصد بـ $I.I.D$ أي مستقلة ومتماثلة التوزيع ، عندئذ تابع الكثافة المشترك للعينة ولنرمز له بالرمز $L(\theta)$ هو:

$$L(\theta) = f(x_1,\theta).f(x_2,\theta).\ldots\ldots f(x_n,\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

وفي طريقة الإمكانية العظمى يتم اختيار قيمة θ التي تجعل تابع الكثافة المشترك والذي يسمى بتابع الامكانية العظمى أو تابع الإمكان أكبر ما يمكن، ويسمى المقدر في هذه الحالة بالمقدر المبني على التوقع الأعظمي أو مقدر الإمكان الأكبر.

فإذا كانت $T = T(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ هي قيمة θ التي تعظم الدالة $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$، أي إذا كان $L(\theta) = \max_{\theta} L(\theta)$ عندئذ نقول عن T إنه مقدر مبني على التوقع الأعظمي للوسيط θ وبما أن T يجب أن يحقق النهاية العظمى لتابع الامكانية العظمى فإنه يمكن الحصول على هذه النهاية عادة عن طريق الاشتقاق بالنسبة للوسيط θ ثم مساواة الناتج بالصفر.

بمعنى آخر: إذاكان $L(\theta)$ تابعا قابلا للمفاضلة بالنسبة θ فإن الشرط اللازم لكي يبلغ $L(\theta)$ نهايته العظمى هو: $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$.

ولما كان $L(\theta)$ هو إما جداء توابع احتمال أو جداء توابع كثافة، فإنه موجب دوما وبالتالي يكون $\log L(\theta)$ معرفا دوما، وهو تابع متزايد باضطراد.

وبالحالة العامة يكون الوصول إلى أعظمية $\log L(\theta)$ أسهل من الوصول إلى أعظمية $L(\theta)$ لأنه بأخذ اللوغاريتم تحول الدالة إلى حاصل جمع وهذا يسهل العمليات الرياضية في حين أن $L(\theta)$ عبارة عن جداء دوال.

وبشكل مكافئ إن تغيرات التابع $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

تماثل تغيرات التابع: $\log L(\theta) = \log \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

وقيمة θ التي تجعل هذا التابع في نهايته العظمى تعطى من حل المعادلة

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\sum_{i=1}^{n} \log f(x_i,\theta)\right] = 0$$

والمقدر T المحسوب بهذه الطريقة يسمى: المقدر المبني على التوقع الأعظمي.

2-1- طريقــة العــزوم Method of Moments

تعتبر طريقة العزوم أقدم طرق التقدير وكان أول من أشار إليها كارل بيرسون، تقوم فكرة هذه الطريقة في:

* تقدير معالم المجتمع على حساب العزوم من دالة كثافة الاحتمال للمجتمع (قد تكون العزوم حول الصفر أو التوقع الرياضي أو قد نختار العزوم k الأولى).
* حساب العزوم المقابلة لها من بيانات العينة العشوائية التي يتم سحبها من المجتمع محل الدراسة.
* مساواة العزوم النظرية بما يقابلها من العزوم الفعلية

في المجتمع الاحصائي $\{A, X, f(x,\theta)\}$ نعلم أن العزوم من الرتبة i حول الصفر تعطى بالشكل:

$$\alpha_i = E\left(X^i\right) = \sum_i x_i p_i \quad or \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^i f(x)dx$$

والعزوم حول التوقع الرياضي ومن ذات الرتبة هي:

$$\mu_i = E\left[(X-m)^i\right] = \sum_i (x_i - m)^i p_i \quad ; \quad m = E(X) \quad or \quad = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^i f(x)dx$$

تعريــف:

بفرض أن $i=\overline{1.n}$, X_i متغيرات القيم الملاحظة لعينة عشوائية حجمها n ، عندئذ نعرف العزم الابتدائي حول الصفر ومن الرتبة s ، لهذه العينة بالشكل: $\alpha_i^s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^s \quad ; s = \overline{1,k}$

ومنه ينتج: $\hat{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^1$ ، $\hat{\alpha}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ ، $\hat{\alpha}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$ ،... إلخ.

وكل منها يعتبر متغيرا إحصائيا وتعتبر مقدرا غير متحيز ومعقول للوسيط θ بالاستناد على النظرية التالية

نظريــة:

عزوم العينة $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots\ldots, \hat{\alpha}_s$ هي مقدرات غير متحيزة ومعقولة لعزوم المجتمع $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_s$ على الترتيب، وذلك من أجل قيمة محددة لـ s وبشرط وجود $\hat{\alpha}_s$ حيث لدينا

$$E\left(\hat{\alpha}_S\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i^s\right) = \frac{1}{n}\sum_i E\left(X_i^s\right) = \frac{1}{n}.n\,E\left(X^s\right) = E\left(X^s\right) = \alpha_s$$

وهذا يؤكد صفة عدم التحيز.

$$V\left(\hat{\alpha}_S\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_i X_i^s\right) = \frac{1}{n^2}\sum_i V\left(X_i^s\right) = \frac{1}{n^2}.nV\left(X^s\right) = \frac{V\left(X^s\right)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

وهذا يؤكد صفة الإتساق.

-3-1- طريقـة المربعــات الصغـرى Method of Least Square

يمكن نمذجة العلاقة بين المتغيرين Y_i و X_i على الشكل : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1.........n$

حيث : Y_i يسمى بالمتغير المفَسَّر أو التابع و X_i بالمتغير المفَسِّر أو المستقل، β_0 و β_1 هما معلمتا النموذج.

أما ε_i فيمثل الخطأ في تفسير Y_i، ومنه يمكن كتابته انطلاقا من العلاقة: $\varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$

ويرجع وجود حد الخطأ إلى إهمال بعض المتغيرات المستقلة التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع في النموذج وحدوث خطأ في كل من تجميع البيانات وقياس المتغيرات الاقتصادية ويرجع ذلك أيضا إلى الصياغة الرياضية غير السليمة للنموذج.

فرضيات النموذج:

* $E(\varepsilon_i) = 0 \qquad , \forall i = 1.....n$
* $Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^{\,2} \qquad , \forall i = 1.....n$
* $\varepsilon_i \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^{\,2}\right) \qquad , \forall i = 1.....n$
* $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \qquad , \forall i \neq j \qquad i, j = 1.....n$
* $Cov(X_i, \varepsilon_i) = 0 \qquad , \forall i = 1......n$

إن طريقة المربعات الصغرى تحاول إيجاد أحسن تصحيح خطي بتدنئة مربعات الانحراف (بين المشاهدات الفعلية والمقدرة) $\sum^n \hat{\varepsilon}_i^2$، حيث: $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$، وهذا ما يمكن كتابته رياضيا بـ :

$$Min \sum^n \hat{\varepsilon}_i^2 = \underset{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1}{Min} \sum^n \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2$$

والشرط اللازم لتدنئة هذه العلاقة هو أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ معدومة أي :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_0} \displaystyle\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} \displaystyle\sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 = 0 \end{cases}$$

بعد حل جملة المعادلتين السابقة نتحصل على تقدير معلمتي النموذج:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \dfrac{n\sum_i X_i Y_i - \sum_i X_i \sum_i Y_i}{n\sum_i X_i^2 - \left(\sum_i X_i\right)^2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} \\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \end{cases}$$

ويكون النموذج المقدر بطريقة المربعات الصغرى (OLS) كما يلي: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$

خصائـص مقـدرات المربعات الصغـرى

إن المقدرات المتحصل عليها لكل من β_1, β_0 بطريقة المربعات الصغرى هي تقديرات نقطية $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ حيث توزيع المعاينة لهذه المقدرات هو:

- متوسطات هذه المقدرات هي:

* $E\left(\hat{\beta}_0\right) = \beta_0$ ومنه نقول أن $\hat{\beta}_0$ مقدرة لـ β_0.

* $E\left(\hat{\beta}_1\right) = \beta_1$ ومنه نقول أن $\hat{\beta}_1$ مقدرة لـ β_1.

- وتباينات هذه المقدرات هي:

* تبايـن $\hat{\beta}_0$:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0) = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right)\sigma_\varepsilon^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right)\sigma_\varepsilon^2$$

* تبايـن $\hat{\beta}_1$:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} + \bar{X}^2 \operatorname{var}(\hat{\beta}_1)$$

نلاحظ أن تباين كل مقدر غير معروف لأنه يرتبط بتباين الأخطاء النظري σ_ε^2، فينبغي في هذه الحالة تقدير تباين الأخطاء للحصول على تباين البواقي :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}$$

من النتائج التي توصلنا إليها عن مقدرات المربعات الصغرى يمكن أن نقول أن شـــكل التوزيع الاحتمالي الخاص بالمقدرات $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ هو:

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left[\beta_0, \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right)\sigma_\varepsilon^2\right], \qquad \hat{\beta}_1 \sim N\left[\beta_1, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\right]$$

من المعادلتين يتبين أنه كلما زاد التباين σ_{ε}^{2} كلما زاد تباين المقدرات $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ ، وكلما كان انتشار قيم X أكبر كلما قل تباين $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$

ومن خواص مقدرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ ، لدينا:

أ- خاصية عدم التحيز:

$E\left(\hat{\beta}_0\right)=\beta_0$ ومنه نقول أن $\hat{\beta}_0$ مقدرة غير متحيزة لـ β_0 .

$E\left(\hat{\beta}_1\right)=\beta_1$ ومنه نقول أن $\hat{\beta}_1$ مقدرة غير متحيزة لـ β_1 .

ب- أفضل مقدر خطي غير متحيز *BLUE*: تنطلق هذه الفكرة من نظرية *Gauss–Markov* والتي تقول" من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرتا المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ أفضل مقدرتين خطيتين وغير متحيزتين، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى".

ج- خاصية الاتساق: نقول عن $\hat{\beta}_1$ بأنه مقدر متسق إذا كان:

- توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}_1$ يقترب من القيمة الحقيقية β_1 كلما كانت $n \to \infty$ ، ونقول أن النهاية الاحتمالية للمقدر $\hat{\beta}_1$ هي β_1 ونكتب :

$$p\lim(\hat{\beta}_1)=\beta_1$$

- يجب أن تكون قيمتا التحيز والتباين تقتربان أو تساويان الصفر كلما اقترب n مما لا نهاية أي:

$$1.\lim_{n\to\infty} E(\hat{\beta}_1)=\underset{n\to\infty}{p\lim}(\hat{\beta}_1)=\beta_1$$

$$2.\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}(\hat{\beta}_1)=\underset{n\to\infty}{p\lim}\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)=0$$

وبتحقق هذين الشرطين، نقول عن المقدر $\hat{\beta}_1$ بأنه مقدر متسق للمعلمة الحقيقية β_1 .

2- التقديـــر بمجـــال *Interval Estimation*

يفضل أحيانا إعطاء تقدير للمعلمة المجهولة θ بحيث لا تكون بعيدة عن الحقيقة و الواقع و باحتمال معين و الوسيلة المستخدمة في البحث عن تقديرات موثوقة باحتمال معين ضمن مجال محدد ، و يطلق على هذا المجال الذي يحتوي فيه التقدير إسم مجال التقدير

فمن أجل الحصول على مجال التقدير للمعلمة المجهولة θ علينا أن نشكل مجالا من الشكل $\hat{\theta}\pm k$ حيث تتعلق $\hat{\theta}$ بالعينة الخاصة المختارة و يتحدد العدد k بواسطة توزيع المعاينة بالإحصاء $\hat{\theta}$

إن قولنا أن التقدير $\hat{\theta}$ مساو تماما للمعلمة θ يعني أن:

$$\hat{\theta}-k \prec \theta \prec \hat{\theta}+k$$

و يمكن و بواسطة توزيع المعاينة للإحصاء θ أن نحدد قيمة k بحيث يكون الإحتمال :

$$P\left(\hat{\theta}-k \prec \theta \prec \hat{\theta}+k\right)$$

مساويا لقيمة معينة تهم الباحث و لتكن $1-\alpha$ و عليه يمكن أن نعبر عن هذا المجال بما يلي :

$$prob\left(T_1 \prec \theta \prec T_2\right)=1-\alpha \quad \text{أي} \quad prob\left[\theta \in \left(T_1,T_2\right)\right]=1-\alpha$$

حيث أن: θ المعلمة المراد تقديرها، $\left(T_1,T_2\right)$ يسمى مجال ثقة ، T_1 حد الثقة الأدنى، T_2 حد الثقة الأعلى، $1-\alpha$ معامل الثقة حيث $0 \prec \alpha \prec 1$ ويحدد مسبقا، $(1-\alpha)\times 100\%$ درجة الثقة للمعلمة θ.

1-2 مجـال الثقـة للمتوسـط الحسابي للمجتمـــع μ_X

1-1-2 مجـال الثقـة للمتوسـط الحسابي في حالـة توزيع المجتمـع طبيعـــي

نفرض أن $x_n \quad ......x_1, x_2$ تمثل قياسات عينة مسحوبة من مجتمع طبيعي $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ و أن $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي لقياسات هذه العينة لايجاد فترة الثقة للمعلمة μ

2–1–1–1 حالـة تبايـــن المجتمع معلوما (σ_X^2 معلومة)

لنفرض أن المطلوب هو إنشاء مجال ثقة للمتوسط الحسابي μ_X للتوزيع الطبيعي إذا كانت σ_X^2 معلومة بما أن المتوسط الحسابي للعينة $\bar{X}$ كمقدر للمعلمة μ_X للتوزيع الطبيعي (التباين معلوم) له خصائص جيدة مثل الكفاءة و الكفاية وعدم التحيز فإننا سوف نستخدمه لإنشاء مجال ثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ_X ضمن مجال محدد بمستوى ثقة $1-\alpha$ من خلال العلاقة :

$$prob\left[\mu_X \in \left(T_1,T_2\right)\right]=P\left(T_1 \le \mu_X \le T_2\right)=1-\alpha$$

نسمي:

T_1: حـد الثقـة الأدنى ، T_2: حـد الثقـة الأعلى ، $1-\alpha$: مستوى الثقـة

$\left[T_1,T_2\right]$: مجـال الثقـة لمعلمة متوسط المجتمع μ_X

رأينا سابقا ، أن المتوسط الحسابي لعينة عشوائية حجمها n من توزيع طبيعي أو أن حجم العينة كبير و ذلك بغض النظر عن نوع المجتمع المدروس وسطه الحسابي μ_X و تباينه σ_X^2 يتبع أيضا التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي $\mu_{\bar{X}}$ ولكن بتباين $\sigma_{\bar{X}}^2=\sigma_X^2/n$

و بالتالي فإن الكمية المحورية المناسبة هي: $Z = \left(\bar{X}-\mu_{\bar{X}}\right)/\left(\sigma_{\bar{X}}\right)$

$\mu_X = \mu_{\bar{X}}$ *avec et sans remise*

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \begin{cases} \dfrac{\sigma_X^2}{n} & avec\ \ remise \\ \dfrac{\sigma_X^2}{n} \times \dfrac{N-n}{N-1} & sans\ \ remise \\ \dfrac{n}{N} \le 0.05 \Rightarrow \dfrac{N-n}{N-1} \simeq 1 \Rightarrow \dfrac{\sigma_X^2}{n} \times \dfrac{N-n}{N-1} \cong \dfrac{\sigma_X^2}{n} \end{cases}$$

$$Z = \left(\bar{X} - \mu_{\bar{X}}\right)/\left(\sigma_{\bar{X}}\right) \Rightarrow Z = \left(\bar{X} - \mu_X\right)/\left(\sigma_X / \sqrt{n}\right)$$

وهي دالة في المقدر $\bar{X}$ و المعلمة μ_X و توزيعهما هو التوزيع الطبيعي المعياري الذي لا يعتمد على المعلمة μ_X

و من ثم فإن احتمال أن تقع هذه القيمة بين القيمتين: $Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ و $-Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$ يساوي $1-\alpha$

$$p\left(-Z_{(1-(\alpha/2))} \prec Z \prec Z_{(1-(\alpha/2))}\right) = 1-\alpha$$

وبالتعويض عن Z نحصل على :

$$p\left(-Z_{(1-(\alpha/2))} \prec \left(\bar{X} - \mu_{\bar{X}}\right)/\left(\sigma_{\bar{X}}\right) \prec Z_{(1-(\alpha/2))}\right) = 1-\alpha$$

وبعد ضرب كل طرف من أطراف هذه المتباينة بالانحراف المعياري $\sigma_{\bar{X}}$ نجد:

$$p\left(-Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}} \prec \bar{X} - \mu_X \prec Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

ثم نطرح من جميع الأطراف المقدار $\bar{X}$

$$p\left(-\bar{X} - Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}} \prec -\mu_X \prec -\bar{X} + Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

وبعد ضرب كل أطراف هذه المتباينة بإشارة ناقص وترتيبها نجد:

$$p\left(\bar{X} - Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}} \prec \mu_X \prec \bar{X} + Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}\right) = 1-\alpha$$

وهذا ما أشرنا إليه سابقا في الصورة العامة كما يلي:

$$p\left(T_1 \prec \mu_X \prec T_2\right) = 1-\alpha$$

حيث أن:

T_1: حـد الثقـة الأدنى هو: $T_1 = \bar{X} - Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}$

T_2: حـد الثقـة الأعلى هو: $T_2 = \bar{X} + Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}$

$[T_1,T_2]$: مجـال الثقـة لمعلمة متوسط المجتمع μ_X هو: $\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}\right]_{1-\alpha}$

$$\mu_X \in \left[\bar{X} - Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}} \quad , \quad \bar{X} + Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}\right]_{1-\alpha}$$

والمعلمة θ محل التقدير هنا تمثل المتوسط الحسابي للمجتمع μ_X ، ومن مجال الثقة السابق لـ μ_X نقول أننا واثقون بنسبة $\%(1-\alpha)$ بأن متوسط المجتمع μ_X ينتمي إلى المجال

$$\left[\bar{X} - Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}} \quad , \quad \bar{X} + Z_{(1-(\alpha/2))}\sigma_{\bar{X}}\right]$$

2-1-1-2 حالـة تبايـن المجتمع غير معلـوم (σ_X^2 مجهولـة)

في هذه الحالة فإننا نواجه معلمتين إثنتين مجهولتين μ_X و σ_X^2 ، إذ غالبا ما نفكر في إيجاد تقدير للمتوسط في مجتمع إحصائي تباينه σ_X^2 مجهول، و يختلف الآن الموضوع عن الحالة السابقة إذ يجب تقدير تباين هذا المجتمع σ_X^2 من خلال تباين العينة المسحوبة S_X^2 لكي نتمكن من تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع μ_X

الحالـة الأولى: العينـــات الصغيــرة

إذا كان تبايـن المجتمـع مجهـول والمجتمـع طبيعـي وحجـم العينـة صغيـر $n \prec 30$ ففي هذه الحالة نعتمد في تحديد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ_X على توزيع ستيودنت وليس على التوزيع الطبيعي بالرغم من أن توزيع المجتمع الأصلي هو التوزيع الطبيعي وهذا نظرا لكون تباين المجتمع مجهولا σ_X^2 وسوف نقوم بتقديره من خلال تباين العينة المسحوبة S_X^2 حيث: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$$S_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{و} \quad \hat{S}_x{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad : \text{حيث} \quad \hat{S}_x{}^2 = \frac{n}{n-1}S_X^2$$

تقديـر σ_X^2 باستعمـال تبايـن العينـة S_X^2:

من النظريات السابقة التي تطرقنا لها في محور نظرية المعاينة نعلم أن:

- **إذا كـان السحـب بإرجـاع:**

$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$ و $E\left(S_X^2\right) = \sigma_X^2 \frac{n-1}{n}$ ، ومنه فإن تقدير تباين المجتمع σ_X^2 من خلال تباين العينة المسحوبة S_X^2 يكون كالتالي: $\hat{\sigma}_X^2 = \hat{S}_X^2 = S_X^2 \frac{n}{n-1}$

أي أن: $$\sigma_{\bar X}^2=\frac{\sigma_X^2}{n}=\frac{\hat\sigma_X^2}{n}=\frac{S_X^2\ n/n-1}{n}=\frac{S_X^2}{n-1}\Rightarrow\sigma_{\bar X}=\frac{S_X}{\sqrt{n-1}}$$

– إذا كـان السحـب بدون إرجـاع:

$\sigma_{\bar X}^2=\frac{\sigma_X^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$ و $E\left(S_X^2\right)=\sigma_X^2.\frac{n-1}{n}.\frac{N}{N-1}$ ، ومنه فإن تقدير تباين المجتمع σ_X^2 من خلال

تباين العينة المسحوبة S_X^2 يكون كالتالي: $\hat\sigma_X^2=S_X^2\frac{n}{n-1}\frac{N-1}{N}$ أي أن:

$$\sigma_{\bar X}^2=\frac{\sigma_X^2}{n}.\frac{N-n}{N-1}=\frac{\hat\sigma_X^2}{n}.\frac{N-n}{N-1}=\frac{S_X^2\,(n/n-1)(N-1/N)}{n}.\frac{N-n}{N-1}$$
$$=S_X^2.\frac{n}{n-1}.\frac{N-1}{N}.\frac{N-n}{n.(N-1)}=\frac{S_X^2}{n-1}\frac{N-n}{N}\Rightarrow\sigma_{\bar X}=\frac{S_X}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt N}$$

$$\sigma_{\bar X}^2=\begin{cases}\dfrac{\sigma_X^2}{n}=\dfrac{\hat\sigma_X^2}{n}=\dfrac{s_x^{\ 2}}{n-1} & avec\ remise\\[2ex] \dfrac{\sigma_X^2}{n}.\dfrac{N-n}{N-1}=\dfrac{\hat\sigma_X^2}{n}.\dfrac{N-n}{N-1}=\dfrac{s_x^{\ 2}}{n-1}.\dfrac{N-n}{N}= & sans\ remise\\[2ex] \dfrac{n}{N}\le 0.05\Rightarrow\dfrac{N-n}{N}\simeq 1\ \Rightarrow\ \dfrac{s_x^2}{n-1}.\dfrac{N-n}{N}\cong\dfrac{s_x^2}{n-1}\end{cases}$$

تحديـد الكميــة المحوريــة المناسبــة T :

توزيع t هو توزيع لمتغير يمثل حاصل قسمة متغير يتبع التوزيع الطبيعي المعياري على الجذر التربيعي لمتغير مستقل منه يتبع توزيع χ^2 مقسوما على درجات حريته فإن: $T=\dfrac{Z}{\sqrt{\chi^2/n-1}}$ يتبع توزيع t بدرجات حرية $n-1$ حيث: $Z=\left(\dfrac{\bar X-\mu_X}{\sigma_{\bar X}}\right)\sim N\,(0,1)$ و $\dfrac{nS_X^2}{\sigma_X^2}\sim\chi^2_{(n-1)}$ ، إذن:

$$T=\frac{Z}{\sqrt{\chi^2/n-1}}=\left(\left(\frac{\bar X-\mu_X}{\sigma_{\bar X}}\right)\Big/\left(\left(\frac{\sqrt n\,S_x}{\sigma_X}\right)\Big/\sqrt{n-1}\right)\right)$$

$$T=\begin{cases}\left[\left(\bar X-\mu_X\big/\left(\sigma_X/\sqrt n\right)\right)\Big/\left(\left(\dfrac{\sqrt n\,S_x}{\sigma_X}\right)\Big/\sqrt{n-1}\right)\right] & avec\ remise\\[2ex] \left[\left(\bar X-\mu_X\Big/\left(\left(\sigma_X/\sqrt n\right).\left(\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\right)\right)\right)\Big/\left(\left(\dfrac{\sqrt n\,S_x}{\sigma_X}\right)\Big/\sqrt{n-1}\right)\right] & sans\ remise\end{cases}$$

$$T=\begin{cases}\bar{X}-\mu_X\Big/\left(S_x/\sqrt{n-1}\right) & \sim t_{(n-1)} \quad avec\ remise\\ \bar{X}-\mu_X\Big/\left(\left(S_x/\sqrt{n-1}\right).\left(\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}\right)\right) & \sim t_{(n-1)} \quad sans\ remise\end{cases}$$

تحديد مجال الثقة لمتوسط المجتمع باستعمال توزيع ستيودنت:

الكمية المحورية المناسبة T لها توزيع t بدرجات حرية $n-1$ و هي المناسبة في حالة تباين المجتمع مجهول والتوزيع طبيعي وحجم العينة صغير، وعليه فإن:

$$P\left(-t_{(1-(\alpha/2),n-1)} \prec T \prec t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\right)=1-\alpha$$

حيث أن $t_{(1-(\alpha/2),n-1)}$ هي قيمة t المجدولة و بالتعويض عن T نحصل على ما يلي:

-إذا كــان السحــب بإرجــاع:

$$P\left(-t_{(1-(\alpha/2),n-1)} \prec \bar{X}-\mu_X\Big/\left(S_x/\sqrt{n-1}\right) \prec t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\right)=1-\alpha$$

وبعد ضرب كل طرف من أطراف هذه المتباينة $\left(S_x/\sqrt{n-1}\right)$ نجد:

$$P\left(-t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1} \prec \bar{X}-\mu_X \prec t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1}\right)=1-\alpha$$

ثم نطرح من جميع الأطراف المقدار $\bar{X}$ و بعد ضربها (-1) وترتيب المتباينة نجد :

$$P\left(\bar{X}-t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1} \prec \mu_X \prec \bar{X}+t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1}\right)=1-\alpha$$

حيث أن:

حـد الثقـة الأدنى هو: $\bar{X}-t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1}$

حـد الثقـة الأعلى هو: $\bar{X}+t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1}$

مجـال الثقـة لمعلمة متوسط المجتمع μ_X هو: $\mu_X \in \left[\bar{X}\pm t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1}\right]_{1-\alpha}$

$$\mu_X \in \left[\bar{X}-t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1} \quad , \quad \bar{X}+t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1}\right]_{1-\alpha}$$

من مجال الثقة لـ μ_X نقول أننا واثقون بنسبة $\%(1-\alpha)$ بأن متوسط المجتمع μ_X ينتمي إلى المجال

$$\left[\bar{X}-t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1} \quad , \quad \bar{X}+t_{(1-(\alpha/2),n-1)}.S_x/\sqrt{n-1}\right]$$

-إذا كــان السحــب بدون إرجــاع:

$$P\left(-t_{(1-(\alpha/2),n-1)} \prec \bar{X}-\mu_X\Big/\left(S_x/\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{N-n/N-1}\right) \prec t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\right)=1-\alpha$$

وبعد ضرب كل طرف من أطراف هذه المتباينة $\left(\sqrt{N-n/N-1}\right)\left(S_x/\sqrt{n-1}\right)$ نجد:

$$P\left(-t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\prec \bar{X}-\mu_X \prec t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\right)=1-\alpha$$

ثم نطرح من جميع الأطراف المقدار $\bar{X}$ و بعد ضربها (-1) وترتيب المتباينة نجد :

$$P\left(\bar{X}-t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\prec \mu_X \prec \bar{X}+t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\right)=1-\alpha$$

حيث أن:

حـد الثقـة الأدنى هو: $\bar{X}-t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}$

حـد الثقـة الأعلى هو: $\bar{X}+t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}$

مجــال الثقــة لمعلمة متوسط المجتمع μ_X هو: $\mu_X\in\left[\bar{X}\pm t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\right]_{1-\alpha}$

$$\mu_X\in\left[\bar{X}-t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\ ,\ \bar{X}+t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\right]_{1-\alpha}$$

من مجال الثقة لـ μ_X نقول أننا واثقون بنسبة $\%(1-\alpha)$ بأن متوسط المجتمع μ_X ينتمي إلى المجال

$$\left[\bar{X}-t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\ ,\ \bar{X}+t_{(1-(\alpha/2),n-1)}\cdot\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\right]$$

الحالـة الثانيـة: العينـــات الكبيــرة

إذا كان تباين المجتمـع مجهــول والمجتمـع طبيعـي وحجـم العينـة كبير $n\geq 30$ ففي هذه الحالة من المفروض نعتمد في تحديد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ_X على توزيع ستيودنت وليس على التوزيع الطبيعي بالرغم من أن توزيع المجتمع الأصلي هو التوزيع الطبيعي وهذا نظرا لكون تباين المجتمع مجهولا σ_X^2 وسوف نقوم بتقديره من خلال تباين العينة المسحوبة S_X^2 ولكن وطبقا لنظرية النهاية المركزية فإن توزيع ستيودنت يؤول إلى التوزيع الطبيعي بشرط أن يكون حجم العينة n كبيرا، فعندما تزداد n فإن S_X^2 تقترب من $\sigma_X{}^2$ و يقترب التوزيع الجديد من التوزيع الطبيعي المعياري.

مجــال الثقــة لمعلمة متوسط المجتمع μ_X هو:

* إذا كان السحب بإرجاع: $\mu_X\in\left[\bar{X}\pm Z_{(1-(\alpha/2))}\frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\right]_{1-\alpha}$

* إذا كان السحب بدون إرجاع:

$$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{(1-(\alpha/2))} \frac{S_x}{\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}} \right]_{1-\alpha}$$

2-1-2 مجـال الثقـة للمتوسـط الحسابي في حالـة توزيع المجتمــع غير طبيعـــي أو مجهــول التوزيــع

نفرض أن $x_1, x_2 ..... \quad x_n$ تمثل قياسات عينة مسحوبة من مجتمع غير طبيعي أو مجهول التوزيع و أن $\bar{X}$ يمثل الوسط الحسابي لقياسات هذه العينة لايجاد فترة الثقة لمعلمة المجتمع μ_X :

1-2-1-2 حالــة تبايــن المجتمع معلوما (σ_X^2 معلومة)

الحالة الأولى: العينــــات الصغيــرة

إذا كان تبايـن المجتمـع معلوم والمجتمـع غير طبيعـي وحجـم العينـة صغيـر $n \prec 30$ ففي هذه الحالة لا نستطيع الاعتماد في تحديد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ_X على توزيع ستيودنت لأن المجتمع ليس طبيعي ولا يمكن استخدام نظرية النهاية المركزية لأن حجم العينة صغير و لكن و نظرا لكون تباين المجتمع معلوما σ_X^2 سوف نقوم بتقدير مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ_X باستخدام نظرية تشيبيشيـف كما يلي:

نظريــة تشيبيشيـف

في كثير من الظروف العملية عندما يكون التوزيع الاحتمالي مجهولا يكون الحد الاعلى المحسوب من متباينة تشيبيشف مفيداً جداً بالرغم من أنه ربما يكون غير دقيق.

نفرض أن X متغير عشوائي بدالة احتمالية $f(x)$ بوسط وتباين محدودين هما على التوالي μ و σ_X^2

ولنفرض أن k عدد موجب، عندئذ

$$P\left[(X-\mu) \prec k\sigma\right] \geq 1-\frac{1}{k^2} \quad or \quad P\left[(X-\mu) \geq k\sigma\right] \leq \frac{1}{k^2}$$

$$\sigma^2 = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (X-\mu)^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (X-\mu)^2.f(x)dx + \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} (X-\mu)^2.f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} (X-\mu)^2.f(x)dx$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (X-\mu)^2.f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} (X-\mu)^2.f(x)dx \quad ...(*)$$

- واضح في التكامل الأول من (*) أن $x \leq \mu - k\sigma$ وذلك يعني $\mu - x \geq k\sigma$
- وأنه في التكامل الثاني من (*) أن $x \geq \mu + k\sigma$ وذلك يعني $x - \mu \geq k\sigma$

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} (k\sigma)^2 . f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} (k\sigma)^2 . f(x)dx$$

$$= k^2\sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} f(x)dx \right]$$

$$= k^2\sigma^2 \left[P(X \leq \mu - k\sigma) + P(X - \mu \geq k\sigma) \right]$$

$$= k^2\sigma^2 \left[P(X - \mu \leq -k\sigma) + P(X - \mu \geq k\sigma) \right]$$

$$= k^2\sigma^2 P\left[|X - \mu| \geq k\sigma \right]$$

$$\sigma^2 \geq k^2\sigma^2 P\left[|X - \mu| \geq k\sigma \right] \quad \cdots (**)$$

وبقسمة طرفي $(**)$ على $k^2\sigma^2$ نحصل على:

$$P\left[|X - \mu| \geq k\sigma \right] \leq \frac{1}{k^2} \Rightarrow 1 - P\left[|X - \mu| \geq k\sigma \right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

أي أن: $P\left[|X - \mu| \prec k\sigma \right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ وبفرض أن أي أن $c = k\sigma \succ 0$ عندئذ فإن هذه المتباينة ستكون

كالتالي: $P\left[|X - \mu| \prec c \right] \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} \Rightarrow P\left[|X - \mu| \geq c \right] \leq \frac{\sigma^2}{c^2}$

من المتباينة: $P\left[|X - \mu| \prec k\sigma \right] \geq 1 - \frac{1}{k^2}$ نستطيع إيجاد مجال الثقة لمتوسط المجتمع كما يلي:

$$\mu_X \in \left[\bar{X} - k.\sigma_{\bar{X}} \quad , \quad \bar{X} + k.\sigma_{\bar{X}} \right]_{1-\alpha}$$

$$\mu_X \in \left[\bar{X} - k.\sigma_{\bar{X}} \quad , \quad \bar{X} + k.\sigma_{\bar{X}} \right]_{1-\frac{1}{k^2}}$$

إذن، مجــال الثقــة لمعلمة متوسط المجتمع μ_X هو:

* إذا كان السحب بإرجاع:

$$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm k . \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \right]_{1-(1/k^2)}$$

* إذا كان السحب بدون إرجاع:

$$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm k . \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}} \right]_{1-(1/k^2)}$$

الحالـة الثانيـة: العينـــات الكبيـــرة

إذا كان تبايـن المجتمـع معلوم والمجتمـع غير طبيعـي وحجـم العينـة كبير $n \geq 30$ ففي هذه الحالة نعتمد في تحديد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ_X على نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المجتمع المجهول يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري.

مجــال الثقــة لمعلمة متوسط المجتمع μ_X هو:

* إذا كان السحب بإرجاع: $\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{(1-(\alpha/2))} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]_{1-\alpha}$

* إذا كان السحب بدون إرجاع: $\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{(1-(\alpha/2))} \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\right]_{1-\alpha}$

2-2-1-2 حالــة تبايـــن المجتمع غير معلـــوم (σ_X^2 مجهولـة)

إذا كان تبايـن المجتمـع غير معلوم والمجتمـع غير طبيعـي وحجـم العينـة كبير $n \geq 30$ ففي هذه الحالة يجب إيجاد تقدير للمتوسط في مجتمع إحصائي تباينه مجهول، بالتالي يجب تقدير تباين هذا المجتمع من خلال تباين العينة المسحوبة لكي نتمكن من تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع

نعتمد في تحديد مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ_X على نظرية النهاية المركزية فإن توزيع المجتمع المجهول يؤول إلى التوزيع الطبيعي المعياري و مجـال الثقـة لمعلمة متوسطة المجتمع μ_X هو:

* إذا كان السحب بإرجاع: $\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{(1-(\alpha/2))} \frac{S_x}{\sqrt{n-1}}\right]_{1-\alpha}$

* إذا كان السحب بدون إرجاع: $\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{(1-(\alpha/2))} \frac{S_x}{\sqrt{n-1}} \frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\right]_{1-\alpha}$

جـــدول يلخـص مجـالات الثقـة لمتوسط المجتمع μ_X

توزيـع المجتمـع	تبايـن المجتمـع	حجـم العينـة	نـوع السحـب	مجـال الثقـة
المجتمـع طبيعـي	معلـوم	لا يهـم	بإرجـاع	$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{(1-(\alpha/2))} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]_{1-\alpha}$
			بدون إرجـاع	$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]_{1-\alpha}$
	غيـر معلـوم	$n < 30$	بإرجـاع	$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{1-\alpha}$
			بدون إرجـاع	$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm t_{\left(1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right)} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]_{1-\alpha}$

$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{1-\alpha}$	بإرجــاع	$n \geq 30$		
$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]_{1-\alpha}$	بدون إرجــاع			
$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm k \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]_{1-\left(1/k^2\right)}$	بإرجــاع	$n < 30$	معلــوم	المجتمـــع غيـــر طبيعـــي
$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm k \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}}\right]_{1-\left(1/k^2\right)}$	بدون إرجــاع			
$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}\right]_{1-\alpha}$	بإرجــاع	$n \geq 30$		
$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]_{1-\alpha}$	بدون إرجــاع			
$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]_{1-\alpha}$	بإرجــاع	$n \geq 30$	غير معلــوم	
$\mu_X \in \left[\bar{X} \pm Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right]_{1-\alpha}$	بدون إرجــاع			

2-2 مجــال الثقــة لتبايــن المجتمــع σ_X^2 :

نفرض أن $x_1, x_2 \ldots\ldots \; x_n$ تمثل قياسات عينة مسحوبة من مجتمع طبيعي $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ و نرغب في إيجاد مجال الثقة لتباين المجتمع σ_X^2 وهنا لدينا حالتين

1-2-2 متوســط المجتمــع معلومــا (μ_X معلــوم)

إذا كان متوسط المجتمــع معلوما فإن : $S_x{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_X\right)^2$ يمثل تباين العينة على أساس متوسط المجتمع μ_X .

كما هو معلوم فإن المقدار: $\chi^2 = \frac{n \cdot S_X^2}{\sigma_X^2}$ سوف يتوزع توزيع مربع كاي بدرجة حرية n

$$\chi^2=\frac{n.S_X^2}{\sigma_X^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\sim\chi^2_{(n)}$$

لذلك يمكننا أن نكتب:

$$P\left(\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n\right)}\prec\frac{n.S_X^2}{\sigma_X^2}\prec\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n\right)}\right)=1-\alpha$$

و بتقسيم كافة أطراف المتباينة السابقة عل $n.S_X^2$ ثم نأخذ مقلوب هذه المتباينة المزدوجة ، نصل إلى مجـال الثقـة لمعلمة تباين المجتمع σ_X^2 هو:

$$P\left(\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n\right)}}\prec\sigma_X^2\prec\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n\right)}}\right)=1-\alpha$$

وهذا يعني أنه بالنسبة إلى مجال الثقة لتباين المجتمع المجهول σ_X^2 في مجتمع إحصائي فإن مستوى الثقـة هو: $1-\alpha$

، حـد الثقـة الأدنى هو: $\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n\right)}}$ ، و حـد الثقـة الأعلى هو: $\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n\right)}}$.

مجـال الثقـة لمعلمة تباين المجتمع σ_X^2 هو:

$$\left[\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n\right)}}\ ,\ \frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n\right)}}\right]_{1-\alpha}$$

ومنه فإن مجال الثقة للإنحراف المعياري هو :

$$P\left(\sqrt{n.S_X^2/\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n\right)}}\prec\sigma_X\prec\sqrt{n.S_X^2/\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n\right)}}\right)=1-\alpha$$

2-2-2 إذا كان متوسـط المجتمـع مجهـولا (μ_X مجهول)

إذا كان متوسط المجتمـع μ_X مجهولا فإن : $S_x^{\,2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ يمثل تباين العينة على أساس متوسط العينة $\bar{x}$ ، و $\hat{S}_x^{\,2}=\frac{n}{n-1}S_X^2$ حيث:

$$\hat{S}_x^{\,2}=\frac{n}{n-1}S_X^2=\frac{n}{n-1}.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

كما هو معلوم فإن المقدار: $\chi^2=\frac{n.S_X^2}{\sigma_X^2}$ سوف يتوزع توزيع مربع كاي بدرجة حرية $n-1$

$$\chi^2=\frac{n.S_X^2}{\sigma_X^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma_X}\right)^2\sim\chi^2_{(n-1)}$$

لذلك يمكننا أن نكتب:

$$P\left(\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}\prec\frac{n.S_x^2}{\sigma_X^2}\prec\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}\right)=1-\alpha$$

حـد الثقـة الأدنى هو: $\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}$ ، و حـد الثقـة الأعلى هو: $\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}$ ،

مجـال الثقـة لمعلمة تباين المجتمع σ_X^2 هو: $\left[\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}},\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}\right]_{1-\alpha}$

ومنه فإن مجال الثقة للإنحراف المعياري هو :

$$P\left(\sqrt{\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(1-\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}}\prec\sigma_X\prec\sqrt{\frac{n.S_X^2}{\chi^2_{\left(\frac{\alpha}{2},n-1\right)}}}\right)=1-\alpha$$

3-2 مجـال الثقـة للنسبـة

إذا كان المطلوب هو تقدير النسبة p فإننا نفترض أن المجتمع له التوزيع الثنائي و المشكلة هي تقدير معلمة هذا التوزيع p باعتماد p' و الذي يمثل النسبة في العينة المسحوبة من المجتمع محل الدراسة و الخاضع للتوزيع الثنائي و ذلك ضمن مجال محدد بمعامل الثقة $1-\alpha$ أي احتمال وقوع تلك القيمة p ضمن المجال (T_1,T_2) أي: $P\left[p\in(T_1,T_2)\right]=1-\alpha$

نعلم أنه و في حالة العينات الكبيرة يمكن تقريب التوزيع الثنائي بالتوزيع الطبيعي، فإذا كان المتغير العشوائي (عدد مرات النجاح في العينة) هو X و كانت العينة كبيرة و حجمها n فإن:

$$E(X)=\mu_X=n.p \quad \text{ومنه} \quad E\left(\frac{X}{n}\right)=E(\hat{p})=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}.n.p=p$$

كذلك $V(X)=n.p.q$ ومنه $V\left(\frac{X}{n}\right)=V(\hat{p})=\frac{1}{n^2}V(X)=\frac{1}{n^2}.n.p.q=\frac{p.q}{n}$

و إذا كانت n كبيرة و و فقا لنظرية النهاية المركزية فإن التوزيع التقريبي ل X هو: $Z=\frac{(X-n.p)}{\sqrt{n.p.q}}$

له تقريبا توزيع طبيعي معياري و بالتالي فإن: $P\left(-Z_{(1-(\alpha/2))} \prec Z \prec Z_{(1-(\alpha/2))}\right)=1-\alpha$

و بالتعويض بقيمة Z نحصل على $P\left(-Z_{(1-(\alpha/2))} \prec \frac{(X-n.p)}{\sqrt{n.p.q}} \prec Z_{(1-(\alpha/2))}\right)=1-\alpha$

و بالتالي فإن: $P\left(p'-Z_{(1-(\alpha/2))}\sqrt{p.q/n} \prec p \prec p'+Z_{(1-(\alpha/2))}\sqrt{p.q/n}\right)=1-\alpha$

رغم توفر المعلومات عن p' و n فإنه لا يمكن إيجاد قيمتي المجال و ذلك لعدم معرفتنا القيمة p و q (وهما مجهولان) الموجودة في الإنحراف المعياري $\sigma_p^2=\frac{p.q}{n}$ و لهذا يجب البحث عن قيمة p هذه .

في حقيقة الأمر هناك عدة طرق تستخدم من أجل إزالة هذه الصعوبة نذكر أبسط طريقة و هي طريقة تقريب p بواسطة p'

نحن نعلم بأن p' يمكن أن تستعمل كمقدر فعال و بدون تحيز ل p و هذه الخواص هي التي تقودنا إلى تقدير p (نسبة المجتمع) ضمن المجال المذكور أعلاه و بناءا على ذلك فإنه من المنطقي أن نستعمل p' أيضا من أجل تقدير p و من ثم q الموجودة تحت الجذر أي في عبارة

الإنحراف المعياري $\sqrt{\frac{p.q}{n}}$ فإن الخطأ المرتكب سيكون صغيرا جدا من أجل قيمة كبيرة ل n

و يجدر الإنتباه إلى أن تغير $\sqrt{p.q}$ طفيف جدا من أجل قيم p قريبة من 0.5 لذلك فإنه وبإحلال التقدير النقطي $p'=\frac{X}{n}$ مكان p و إدخال p' داخل الجذر التربيعي يمكننا من الوصول إلى مجال الثقة للنسبة p كما يلي:

$$P\left(p'-Z_{(1-(\alpha/2))}\sqrt{p'(1-p')/n} \prec p \prec p'+Z_{(1-(\alpha/2))}\sqrt{p'(1-p')/n}\right)=1-\alpha$$

و بالتالي فإن :

حـد الثقـة الأدنى هو: $\left(p'-Z_{(1-(\alpha/2))}\sqrt{p'(1-p')/n}\right)$ ،

و حـد الثقـة الأعلى هو: $\left(p'+Z_{(1-(\alpha/2))}\sqrt{p'(1-p')/n}\right)$ ،

مجـال الثقـة لمعلمة النسبة في المجتمع p هو:

$$\left[p' - Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \quad , \quad p' + Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \right]_{1-\alpha}$$

إن المجال السابق و هو $(1-\alpha)\times 100\%$ مجال الثقة ل p محسوبا من عينة عشوائية حجمها n حيث $(n \geq 30)$ تم سحبها من مجتمع ثنائي .

ملاحظــة :

بفرض أن عملية السحب كانت تتم بدون إرجاع و من مجتمع صغير (منته) ففي هذه الحالة يجب أن نأخذ مؤشر عدم الإعادة بعين الإعتبار $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ و عندها فإن العلاقة السابقة تصبح كما يلي

$$prob\left(P' - Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{P'(1-P')}{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \prec p \prec P' - Z_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{P'(1-P')}{n}} \sqrt{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)} \right) = 1-\alpha$$