Correction de l'exercice 1 ▲

Remarquons d'abord que pour $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$ est un nombre réel, ce qui fait qu'en multipliant le dénominateur par son conjugué nous obtenons un nombre réel.

$$\frac{3+6i}{3-4i} = \frac{(3+6i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-24+12i+18i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25} = -\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i.$$

Calculons

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{1+3i}{5},$$

et

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 = \left(\frac{1+3i}{5}\right)^2 = \frac{-8+6i}{25} = -\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i.$$

Donc

$$\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = -\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i = -\frac{23}{25}+\frac{36}{25}i.$$

Soit $z = \frac{2+5i}{1-i}$. Calculons $z+\bar{z}$, nous savons déjà que c'est un nombre réel, plus précisément : $z = -\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$ et donc $z+\bar{z} = -3$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1+i\sqrt{3}$.
2. $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{8}} = 3\cos\frac{\pi}{8} - 3i\sin\frac{\pi}{8} = \frac{3\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{3i\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
   Il nous reste à expliquer comment nous avons calculé $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$: posons $\theta = \frac{\pi}{8}$, alors $2\theta = \frac{\pi}{4}$ et donc $\cos(2\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(2\theta)$. Mais $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. Donc $\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta)+1}{2} = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$. Et ensuite $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$. Comme $0 \leqslant \theta = \frac{\pi}{8} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sont des nombres positifs. Donc
   $$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Nous avons

$$u = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

puis

$$v = 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer le quotient :

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6}+i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

D'après la formule de Moivre pour $e^{i\alpha}$ nous avons :

$$e^{e^{i\alpha}} = e^{\cos\alpha + i\sin\alpha} = e^{\cos\alpha}e^{i\sin\alpha}.$$

Or $e^{\cos\alpha} > 0$ donc l'écriture précédente est bien de la forme "module-argument".

De façon générale pour calculer un somme du type $e^{iu}+e^{iv}$ il est souvent utile de factoriser par $e^{i\frac{u+v}{2}}$. En effet

$$\begin{aligned} e^{iu}+e^{iv} &= e^{i\frac{u+v}{2}}\left(e^{i\frac{u-v}{2}}+e^{-i\frac{u-v}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{u+v}{2}} 2\cos\frac{u-v}{2} \\ &= 2\cos\frac{u-v}{2} e^{i\frac{u+v}{2}}. \end{aligned}$$

Ce qui est proche de l'écriture en coordonées polaires.
Pour le cas qui nous concerne :

$$z = e^{i\theta}+e^{2i\theta} = e^{\frac{3i\theta}{2}}\left[e^{-\frac{i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}\right] = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{3i\theta}{2}}.$$

Attention le module dans une décomposion en forme polaire doit être positif ! Donc si $\cos\frac{\theta}{2} \geqslant 0$ alors $2\cos\frac{\theta}{2}$ est le module de z et $3\theta/2$ est son argument ; par contre si $\cos\frac{\theta}{2} < 0$ le module est $2|\cos\frac{\theta}{2}|$ et l'argument $3\theta/2+\pi$ (le $+\pi$ compense le changement de signe car $e^{i\pi}=-1$).

Correction de l'exercice 5 ▲

Racines carrées. Soit $z = a+ib$ un nombre complexe avec $a,b \in \mathbb{R}$; nous cherchons les complexes $\omega \in \mathbb{C}$ tels que $\omega^2 = z$. Écrivons $\omega = \alpha+i\beta$. Nous raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned} \omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha+i\beta)^2 = a+ib \\ &\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta = a+ib \end{aligned}$$

Soit en identifiant les parties réelles entre elles ainsi que les parties imaginaires :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2-\beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Sans changer l'équivalence nous rajoutons la condition $|\omega|^2 = |z|$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\beta^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ \alpha^2-\beta^2 = a \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

Par somme et différence des deux premières lignes :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ \beta^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ 2\alpha\beta = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \beta = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \\ \alpha\beta \text{ est du même signe que } b \end{cases}$$

Cela donne deux couples (α,β) de solutions et donc deux racines carrées (opposées) $\omega = \alpha+i\beta$ de z.

En pratique on répète facilement ce raisonnement, par exemple pour $z = 8-6i$,

$$\begin{aligned}
\omega^2 = z &\Leftrightarrow (\alpha + i\beta)^2 = 8-6i \\
&\Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 8-6i \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \text{ le module de } z \\ \alpha^2 - \beta^2 = 8 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha^2 = 18 \\ \beta^2 = 1 \\ 2\alpha\beta = -6 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \\ \beta = \pm 1 \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ de signes opposés} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \qquad \alpha = 3 \text{ et } \beta = -1 \\ \text{ou} \\ \qquad \alpha = -3 \text{ et } \beta = +1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les racines de $z = 8-6i$ sont donc $\omega_1 = 3-i$ et $\omega_2 = -\omega_1 = -3+i$.
Pour les autres :

- Les racines carrées de 1 sont : $+1$ et -1.
- Les racines carrées de i sont : $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
- Les racines carrées de $3+4i$ sont : $2+i$ et $-2-i$.
- Les racines carrées de $7+24i$ sont : $4+3i$ et $-4-3i$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Par la méthode usuelle nous calculons les racines carrées $\omega, -\omega$ de $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, nous obtenons

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}},$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\omega = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Mais nous remarquons que z s'écrit également

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et $e^{i\frac{\pi}{8}}$ vérifie

$$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Cela signifie que $e^{i\frac{\pi}{8}}$ est une racine carrée de z, donc $e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$ est égal à ω ou $-\omega$. Comme $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ alors $e^{i\frac{\pi}{8}} = \omega$ et donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Correction de l'exercice 6

Équations du second degré. La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2+bz+c=0$ (avec $a,b,c\in\mathbb{C}$ et $a\neq 0$) est la suivante : soit $\Delta=b^2-4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2=\Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.
Exemple : pour $z^2-\sqrt{3}z-i=0$, $\Delta=3+4i$, dont une racine carrée est $\delta=2+i$, les solutions sont donc :

$$z_1=\frac{\sqrt{3}+2+i}{2} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}.$$

Les solutions des autres équations sont :
- L'équation $z^2+z+1=0$ a pour solutions : $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$.
- L'équation $z^2-(1+2i)z+i-1=0$ a pour solutions : $1+i$, i.
- L'équation $z^2-\sqrt{3}z-i=0$ a pour solutions : $\frac{1}{2}(2-\sqrt{3}+i)$, $\frac{1}{2}(-2-\sqrt{3}-i)$

Correction de l'exercice 7

Calcul de racine n-ième. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $z^n=1$, déjà $|z|^n=1$ et donc $|z|=1$. Écrivons $z=e^{i\theta}$. L'équation devient

$$e^{in\theta}=e^0=1 \Leftrightarrow n\theta=0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta=\frac{2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Les solution sont donc

$$\mathscr{S}=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Comme le polynôme z^n-1 est de degré n il a au plus n racines. Nous choisissons pour représentants :

$$\mathscr{S}=\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k=0,\dots,n-1\right\}.$$

De plus si $\varepsilon=e^{\frac{2i\pi}{n}}$ alors $\mathscr{S}=\left\{\varepsilon^k,\ k=0,\dots,n-1\right\}$. Ces racines sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Soit $P(z)=\sum_{k=0}^{n-1}z^k=\frac{1-z^n}{1-z}$ pour $z\neq 1$. Donc quelque soit $z\in\mathscr{S}\setminus\{1\}$ $P(z)=0$, nous avons ainsi trouver $n-1$ racines pour P de degré $n-1$, donc l'ensemble des racines de P est exactement $\mathscr{S}\setminus\{1\}$.
Pour conclure soit $Q_p(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{kp}$.
Si $p=0+\ell n$, $\ell\in\mathbb{Z}$ alors $\varepsilon^{kp}=\varepsilon^{k\ell n}=(\varepsilon^n)^{k\ell}=1^{k\ell}=1$. Donc $Q_p(z)=\sum_{k=0}^{n-1}1=n$.
Sinon $Q_p(z)$ est la somme d'une suite géométrique de raison ε^p :

$$Q_p(z)=\frac{1-(\varepsilon^p)^n}{1-\varepsilon^p}=\frac{1-(\varepsilon^n)^p}{1-\varepsilon^p}=\frac{1-1}{1-\varepsilon^p}=0.$$

Correction de l'exercice 8

1. Les trois racines cubiques ont même module $\sqrt{2}$, et leurs arguments sont $-\pi/12$, $7\pi/12$ et $5\pi/4$. Des valeurs approchées sont $1{,}36603 - 0{,}36603i$, $-0{,}36603 + 1{,}36603i$ et $-1 - i$.
2. $-1-2i$, $(-1-2i)j$ et $(-1-2i)j^2$ où $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (racine cubique de 1).