Université Djilai Bounaama
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département MI
2021-2022

$1^{\ddot{e}re}$ année MI
Module: Analyse 1

Série N°02: Les nombres complexes

Exercice 01: Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres:

$$\frac{3+6i}{3-4i}, \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}, \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i},$$

Exercice 02: Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants
1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 03: Calculer le module et l'argument de $u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 04: Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}}, \; e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 05: Calculer les racines carrées de 1, i, $3 + 4i$, $8 - 6i$, et $7 + 24i$.

Exercice 06: Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes
$z^2 + z + 1 = 0$; $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$; $z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$.

Exercice 07:
1. Résoudre $z^3 = 1$ et montrer que les racines s'écrivent 1, j, j^2. Calculer $1 + j + j^2$ et en déduire les racines de $1 + z + z^2 = 0$.
2. Résoudre $z^n = 1$ et montrer que les racines s'écrivent $1, \varepsilon, ..., \varepsilon^{n-1}$. En déduire les racines de $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0$. Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $1 + \varepsilon^p + \varepsilon^{2p} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)p}$.

Exercice 08: Trouver les racines cubiques de $2 - 2i$ et de $11 + 2i$.