

Série N°01: Les nombres réels

Exercice 01: 1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.

2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3. En déduire : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 02:

Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.

Exercice 03:

Le maximum de deux nombres x, y (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y . Démontrer que :

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}, \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Exercice 04: Déterminer la borne supérieure et inférieure (si elles existent) de : $A = \{u_n/n \in \mathbb{N}\}$ où

$$u_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ pair,} \\ 2^{-n} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 05: Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

1) $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$, 2) $]0, 1[\cap \mathbb{Q}$, 3) $\mathbb{N}$, 4) $\{(-1)^n + \frac{1}{n^2}/n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 06: Soit A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. Vrai ou faux?

1. $A \subset B \implies \sup A \leq \sup B$,

2. $A \subset B \implies \inf A \leq \inf B$,

3. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$,

4. $\sup(A + B) < \sup A + \sup B$.

5. $\sup(-A) = -\inf A$.

Exercice 07:

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, E(x + 1) = E(x) + 1$,

2. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, E(x) + E(y) \leq E(x + y)$,

3. Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Exercice 08:

1. Montrer que, pour a réel positif et n entier naturel donnés, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, a_2, \dots, a_n, n$ réels strictement positifs. Montrer que:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$