

Cours de Mathématiques pour première année licence ST et SM



MORSLI KARIMA

Table des matières



Objectifs	3
Introduction	4
I - Exercice : Test des Près-Requis	
II - Chapitre 3 : Les fonctions à variables réelles	5
1. Limites d'une fonction	5
1.1. Opérations algébriques sur les limites	5
1.2. Propriétés élémentaires	5
1.3. Formes indéterminées	6
2. Continuité	6
2.1. Continuité en un point	7
2.2. Prolongement par continuité :	8
3. Dérivabilité	9
3.1. Dérivée en un point	9
3.2. Opérations sur les dérivées	9
3.3. Dérivée de fonctions usuelles	10
3.4. Dérivée d'une fonction composée	10
3.5. Test d'auto évaluation	12
Solutions des exercices	13
Glossaire	14
Références	15
Bibliographie	16

Objectifs

Les objectifs de ce cours se résument en particulier aux points suivants

- *La préparation* pour le cours des primitives
- *Consolider* les connaissances sur les fonctions
- *Étudier* de nouvelles formes et déterminer
- *Connaître* de nouveaux théorèmes pour le calcul des dérivées

Pour entamer ce cour, nous aurons besoin

-



Quelques mathématiciens célèbres liés aux limites de fonctions.

Chapitre 3 : Les fonctions à variables réelles

I

1. Limites d'une fonction

Afin de faire une étude plus complète d'une application, nous avons besoin de connaître son comportement en des points particuliers et la plupart du temps aux bornes de son domaine de définition. Nous allons faire la différence entre les limites en un point, et les limites en l'infini. Puis nous verrons quelques propriétés sur les limites.

1.1. Opérations algébriques sur les limites

$f(x)$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	l
$g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	0	l'	0
$(f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	FID	0	l'	l
$(f.g)(x)$	$l.l'$	$+\infty$	$-\infty$	0	0	0
$(f/g)(x)$	l/l'	FID	FID	FID	0	∞

1.2. Propriétés élémentaires

Proposition 1 :

soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a telles que : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ et g est bornée au voisinage de a alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x).g(x) = 0$$

 *Exemple*

$$\lim_{x \rightarrow a} x. \sin \frac{1}{x} = 0,$$

$$f(x) = x, \quad g(x) = \sin \frac{1}{x}$$

Proposition 2 :

soient f, g , et h trois fonctions définies au voisinage de a telles que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$.

1.3. Formes indéterminées

On a les formes indéterminées suivantes :

$$+\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \infty \times \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

 Remarque

Les formes $1^\infty, 0^0, \infty^0$ ramène à la forme $0 \times \infty$

Proposition 3 :

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a . supposons que

$$f(x) \neq 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty$ se présente sous la forme indéterminée si :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - 1)^{g(x)} = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^l$$

 Exemple

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

en effet

$$f(x) = (1+x), \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \infty \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - 1) \cdot g(x) = 1$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^1.$$

2. Continuité

Jusqu'à présent nous ne nous sommes pas posés de questions à propos de la continuité de fonctions. Intuitivement, une fonction continue, est à nos yeux une fonction dont le graphe est en un "seul morceau", "sans coupure". c'est ce qui semble le cas pour toutes les fonctions usuelles vues dans le chapitre précédent, sauf peut-être la fonction partie entière, et les fonctions inverses et homographiques. Voyons dans ce chapitre comment formaliser mathématiquement la notion de continuité. Un peu comme nous l'avons fait pour définir la notion de limite de fonctions.

Dans tout ce chapitre, nous considérons I comme un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide, non réduit à un point, et nous considérons a comme un point de I .

2.1. Continuité en un point

Définition

- On dit que f est *continue en un point* $a \in I$ si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est *continue sur* I si f est *continue en tout point* de I .
- On note $C(I; \mathbb{R})$ ou $C^0(I; \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition

On dit que f est *continue à droite en point* $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

On dit que f est *continue à gauche en point* $a \in I$ si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Exemple

Les fonctions suivantes sont continues :

- la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$
- les fonctions $\sin$ et $\cos$ sur $\mathbb{R}$,
- la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$,
- la fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$,
- la fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

Exemple

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 4x + 5 & \text{si } x < 1 \end{cases}.$$

On a

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 = f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 9 \neq f(1)$ Dans ce cas on dit que f n'admet pas une limite en 1.

f est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1.

donc f n'est pas continue en 1

2.2. Prolongement par continuité :

Soit I un intervalle, a un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0 .

Notons alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

On définit alors la fonction $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$:

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Alors $\bar{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le prolongement par continuité de f en x_0 .

Exemple

$$f(x) = x \ln x \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

alors on peut prolonger f par $\bar{f}$ continuité en par la fonction tel que

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. Dérivabilité

3.1. Dérivée en un point

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$.

f est dérivable en a si le *taux d'accroissement* $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a une limite finie lorsque x tend vers a .

La limite s'appelle alors *le nombre dérivé* de f en a et est noté $f'(a)$. Ainsi

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque : Autre écriture de la dérivée

f est dérivable en a si et seulement si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie.

Définition

f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la *fonction dérivée* de f , elle se note f' ou $\frac{df}{dx}$.

Complément : Interprétation graphique

Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Si f est dérivable en a alors C_f admet au point d'abscisse a une tangente de pente $f'(a)$. l'équation de la tangente est

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

3.2. Opérations sur les dérivées

Proposition

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I . Alors pour tout $x \in I$.

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \text{ où } \lambda \text{ est un réel fixé}$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x).$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} \text{ si } f(x) \neq 0$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = -\frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)} \text{ si } g(x) \neq 0$$

3.3. Dérivée de fonctions usuelles

u représente une fonction $x \mapsto u(x)$

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$e^u u'$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

3.4. Dérivée d'une fonction composée

Proposition

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 de dérivée :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

On a les dérivées suivantes

Fonction	Dérivée
U^n	$n \cdot U' \cdot U^{n-1}$
$\frac{1}{U}$	$-\frac{U'}{U^2}$
$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$
$\exp U$	$U' \exp U$
$\ln U$	$\frac{U'}{U}$
$\cos U$	$-U' \sin U$

 Exemple

voir <http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00013.pdf>***

 Complément : Dérivée de la fonction réciproque

Soit I est un intervalle et soit $f : I \rightarrow J$ une fonction bijective et dérivable sur I

Si f ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur et on a

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(f'(f^{-1}(x)))}$$

 Exemple

$f :]1 ; +\infty[\rightarrow]-1 ; +\infty[$

$$f(x) = x \ln x - x$$

comme f est bijective et $f^{-1}(0) = 0$ on a

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{\ln e} = 1$$

 Rappel : Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit f' sa dérivée.

Si f' est dérivable sur I on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f . Si f'' est dérivable sur I on note $f^{(3)} = (f'')'$.

Si f est n fois dérivable sur I on note la dérivée d'ordre n par f^n avec $n \in \mathbb{N}$, et $f^{(0)} = f$.

 Méthode : Règle de l'Hôpital

Règle de l'Hôpital*** : Supposons f et g deux fonctions dérivables sur $]a, b[$ avec $g(x) \neq 0 \forall x \in]a, b[$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots\dots\dots$$

3.5. Test d'auto évaluation

Exercice

[solution n°1 p.13]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

- ☐ vrai
- ☐ faux

Exercice

[solution n°2 p.13]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

- ☐ vrai
- ☐ faux

Solutions des exercices

> **Solution n°1**

Exercice p. 12

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

☐ vrai

☒ faux

> **Solution n°2**

Exercice p. 12

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

☒ vrai

☐ faux

Glossaire



*

Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital

Guillaume François Antoine de L'Hôpital, parfois orthographié de L'Hospital, marquis, est un mathématicien français. Il est connu pour la règle qui porte son nom : la règle de L'Hôpital, qui permet de calculer la valeur d'une limite pour une fraction où le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers zéro. Wikipédia

Date et lieu de naissance : 1661, Paris, France

Date et lieu de décès : 2 février 1704, Paris, France

Renommé pour : Travaux sur le calcul différentiel

Connu pour : Calcul infinitésimal, Differential geometry of curves, Règle de L'Hôpital

Conseiller pédagogique : Jean Bernoulli

Références



<i>file:///C:/Users/BIGLOBE/Desktop/C-C-ameliorer.html</i>	carte conceptuelle
<i>file:///C:/Users/BIGLOBE/Desktop/fic00004.pdf</i>	Relation
<i>http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00002.pdf</i>	Raisonnement
<i>http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00003.pdf</i>	Aplication
<i>http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00013.pdf</i>	exercice corégé de dérivabilité
<i>http://exo7.emath.fr/un.html</i>	chapitr1
<i>Serie TD N1 - 2021</i>	série n1
<i>ST1an48_lessons_math1_beddani.pdf</i>	solution question2

Bibliographie



A. BODIN, N. BORNE, G. CHEN, G. COSTANTINI, L. DESIDERI, A. HANANI ET J.-L. ROUGET,
Analyse, cours de mathématiques 1ère année, Exo7, 2016

M. Mechab : Cours d'algèbre-LMD Sciences et Techniques.

Ayadi Souad, Cours de Mathématique pour première année licence ST et SM, univ-km.2019.

K.Allab, Éléments d'analyse, fonction d'une variable réelle, 1er & 2ème années d'université, Office des
Publication universitaire, 2012.

Algèbre et Analyse, cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Stéphane Blac, 2003