

Cours de Mathématiques pour première année licence ST et SM



MORSLIKARIMA

Table des matières



I - Chapitre 2 : Les ensembles, les relations et les applications	3
1. Les ensembles	3
1.1. Définition	4
1.2. Inclusion, union, intersection, complémentaire	4
1.3. Règles de calculs	5
1.4. Produit cartésien	5
1.5. Exercice d'apprentissage	5
1.6. Exercice	6
1.7. Exercice	6
2. Relation d'équivalence et Relation d'ordre	7
2.1. Relations binaires	7
2.2. Relations d'équivalence	7
3. Exercice :	8
Solutions des exercices	9
Glossaire	11
Références	12
Bibliographie	13

Chapitre 2 : Les ensembles, les relations et les applications

I

1. Les ensembles

vous connaissez déjà quelques ensembles :

- l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*\}$.
- l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, par exemple $3, \pi, \ln 3, \sqrt{2}, \dots$.
- l'ensemble des nombres complexes.

Nous allons essayer de voir les propriétés des ensembles, sans s'attacher à un exemple particulier.

Vous vous apercevrez assez rapidement que ce qui est au moins aussi important que les ensembles, ce sont les relations entre ensembles : ce sera la notion d'application (ou fonction)

entre deux ensembles.[1]*



(a) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), mathématicien allemand, a travaillé également sur le calcul infinitésimal (avec autres choses sur la théorie des graphes. C'est à lui que l'on doit la notation f pour les fonctions.

(b) Leonhard Euler (1707 - 1783), mathématicien suisse, a travaillé également sur le calcul infinitésimal et entre autres choses sur la théorie des graphes. C'est à lui que l'on doit la notation f pour les fonctions.

(c) Nicolas Bourbaki est un mathématicien imaginaire créé par un groupe de mathématiciens 1935 à Besse-et-Saint-Anastaise (France). A l'origine de nombreuses notations, vulgarisation de notions et de symboles, on leur doit entre autres la relation entre fonction et application.

1.1. Définition

- De façon informelle, un ensemble est une collection d'éléments.
Exemple : $\{0, 1\}, \{\text{rouge, noir}\}, \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$.
Une autre façon de définir les ensembles :
- Un ensemble est une collection d'éléments qui vérifient une propriété.
Exemple : $\{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 1\}$,

Fondamental

- Appartenance :**
Soit E un ensemble. Nous notons :
 - $x \in E$, si x appartient à un ensemble E .
 - $x \notin E$, si x n'appartient pas à un ensemble E .
- Ensemble vide :** L'ensemble vide noté, $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.
- Singleton :** L'ensemble ne contenant qu'un élément, noté $\{a\}$ est appelé singleton.
- Paire :** L'ensemble contenant deux éléments, noté $\{a, b\}$ est appelé paire. (voire $[2]^*$)

1.2. Inclusion, union, intersection, complémentaire

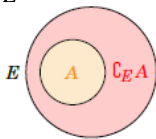
- L'inclusion :** $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F (autrement dit : $\forall x \in E (x \in F)$).
On dit alors que E est un *sous-ensemble* de F ou *une partie* de F .
- L'égalité :** $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$
- Ensemble des parties :** de E . On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Par exemple si $E = \{1, 2, 3\}$:
 $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- Complémentaire :**

Soit $A \subset E$. Le complémentaire du sous-ensemble A dans E , noté C_E^A ou $E \setminus A$ ou $\bar{A}$ est l'ensemble

des éléments de E n'appartenant pas à A , ou encore

$$C_E^A = \{x \in E ; x \notin A\}.$$

$$C_E^A = \{x \in E ; x \notin A\}.$$

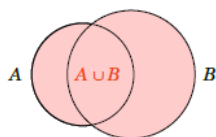


- Union :**

Soient $A, B \in E$. L'union des deux sous-ensembles A et B de E , noté, $A \cup B$ est l'ensemble des points appartenant soit à A soit à B .

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

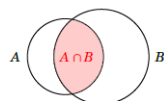
Le «ou» n'est pas exclusif: x peut appartenir à A et à B en même temps.



6. Intersection :

Soient $A, B \in E$. L'intersection des deux sous-ensembles A et B de E , noté, $A \cap B$ est l'ensemble des points appartenant à la fois à A et à B .

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$



Remarque : Lorsque $A \cap B = \emptyset$ nous disons que les ensembles A et B sont *disjoints*.

1.3. Règles de calculs

On peut voir la démonstration de ces propositions dans [4]^{*}, [1]^{*}

Règles de calculs

Proposition 5 (Propriétés sur l'intersection)

Soient $A, B, C \subseteq E$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $A \cap B = B \cap A$.
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
4. $A \cap A = A$.
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Proposition 6 (Propriétés sur l'union)

Soient $A, B, C \subseteq E$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $A \cup B = B \cup A$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
3. $A \cup \emptyset = A$.
4. $A \cup A = A$.
5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Proposition 7 (Propriétés sur l'union et l'intersection)

Soient $A, B, C \subseteq E$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proposition 8 (Propriétés sur le complémentaire)

Soient $A, B \subseteq E$. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $\complement_E(\complement_E A) = A$.
2. $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.
3. $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow \complement_E B \subseteq \complement_E A$.

1.4. Produit cartésien

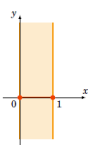
Soient E et F deux ensembles. Le *produit cartésien*, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y)

où $x \in E$ et $y \in F$ et on écrit :

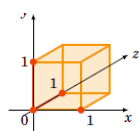
$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\},$$

 Exemple

1. Vous connaissez $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
2. Autre exemple $[0; 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$



3. $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$



1.5. Exercice d'apprentissage

1. En utilisant les définitions, montrer que: $A \neq B$ si et seulement s'il existe $a \in A \setminus B$ ou $b \in B \setminus A$.
2. Énumérer $P(\{1, 2, 3, 4\})$.
3. Montrer $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
4. Énumérer $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\}$.

1.6. Exercice*[solution n°1 p.9]*

Soit A une partie d'un ensemble E telle que $A \neq E$. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E . Quelles sont les bonnes réponses ?

☐ $A \cap \overline{A} = \emptyset$

☐ $A \cap \overline{A} = E$

☐ $A \cup \overline{A} = E$

☐ $A \cup \overline{A} = A$

1.7. Exercice*[solution n°2 p.9]*

Soit $A = [-1, 3]$ et $B = [0, 4]$. Cochez la bonne réponse :

☐ $A \cup B = \emptyset$

☐ $A \cup B = [0, 3]$

☐ $A \cup B = [-1, 4]$

☐ $A \cup B = [-1, 0]$

2. Relation d'équivalence et Relation d'ordre

2.1. Relations binaires

On appelle relation *binaire*, toute assertion* entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non. On note $x\mathcal{R}y$ et on lit “ x est en relation avec y ”.

Définition : Les propriétés d'une relation

Étant donnée une relation binaire $\mathcal{R}$ entre les éléments d'un ensemble non vide E , on dit que :

- *Réflexive* si : $x\mathcal{R}x$ c'est à dire chaque élément est en relation avec lui même.
- *Symétrique* si : $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$. Si x est en relation avec y alors y est en relation avec x .
- *Transitive* si : $[x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \implies x\mathcal{R}z$. Si x est en relation avec y et y est en relation avec z alors x est en relation avec z .
- *Anti-symétrique* si : $[x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x] \implies x = y$. Si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, ils sont égaux.

2.2. Relations d'équivalence

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation *d'équivalence* si elle est *Réflexive*, *Symétrique* et *Transitive*.

Complément : classe d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E . Soit $x \in E$, la classe d'équivalence de x est

$$cl(x) = \{y \in E ; y\mathcal{R}x\}$$

$cl(x)$ est donc un sous-ensemble de E , on le note aussi $\bar{x}$. Si $y \in cl(x)$, on dit que y un *représentant* de $cl(x)$.
[4]*

Exemple

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ multiple de } 2.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et donner la classe de 0, 1, 2, 3.

Réponse :

$\mathcal{R}$ est *réflexive* car $\forall x \in \mathbb{Z}$, on a $x - x = 0$ donc $x\mathcal{R}x$.

$\mathcal{R}$ est *symétrique* : en effet soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que $x\mathcal{R}y$.

alors $x\mathcal{R}y \implies \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 2k$.

et alors $y - x = -2k = 2k'$ avec $k' = -k \in \mathbb{Z}$ c-à-d $y\mathcal{R}x$.

$\mathcal{R}$ est *transitive* : Soient $x, y, z \in F$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, donc il existe deux entiers relatifs k, k' tels que :

$x - y = 2k$ et $y - z = 2k'$ la somme des deux équations donne :

$x - z = 2(k + k') = 2k''$ avec $k'' = k + k' \in \mathbb{Z}$ donc $x\mathcal{R}z$

Exercice :

$$cl(0) = \{x \in \mathbb{Z}, x \mathcal{R} 0\}$$

$$cl(0) = \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} ; x - 0 = 2k\}$$

$$cl(0) = \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} ; x = 2k\}$$

de la même manière on trouve

$$cl(1) = \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} ; x = 2k + 1\}$$

$$cl(2) = \{x \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z} ; x = 2k + 2\}$$

On remarque que $cl(0) = cl(2)$ et $cl(1) = cl(3)$

Donc la classe de tout nombre paire est la classe de 0, et la classe de tout nombre impaire est la classe de 1.

3.

Exercice :

Question 1

[solution n°3 p.9]

Démontrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$

Question 2

[solution n°4 p.9]

Soit $\leq$ la relation sur $\mathbb{N}$ définie par

$$x \leq y \implies x \text{ divise } y$$

Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$

Solutions des exercices

> Solution n°1

Exercice p. 6

Soit A une partie d'un ensemble E telle que $A \neq E$. On note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E . Quelles sont les bonnes réponses ?

☒ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

☐ $A \cap \bar{A} = E$

☒ $A \cup \bar{A} = E$

☐ $A \cup \bar{A} = A$

> Solution n°2

Exercice p. 6

Soit $A = [-1, 3]$ et $B = [0, 4]$. Cochez la bonne réponse :

☐ $A \cup B = \emptyset$

☐ $A \cup B = [0, 3]$

☒ $A \cup B = [-1, 4]$

☐ $A \cup B = [-1, 0]$

> Solution n°3

Exercice p. 8

On suppose $A \cup B = A \cap B$ et on montre que $A = B$

$$x \in A \implies x \in A \cup B$$

$$\implies x \in A \cap B \quad \text{car } A \cup B = A \cap B$$

$$x \in B$$

$$x \in B \implies x \in A \cup B$$

$$\implies x \in A \cap B \quad \text{car } A \cup B = A \cap B$$

$$x \in A$$

$$\text{donc } A = B$$

> **Solution n°4**

Exercice p. 8

voire la ref [5]^{*}

Glossaire

assertion

proposition

image réciproque

image inverse

Références

<i>file:///C:/Users/BIGLOBE/Desktop/fic00004.pdf</i>	Relation
--	----------

<http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00003.pdf> Application

Serie TD N1 - 2021 série n1

ST1an48_lessons_math1_beddani.
pdf solution question2

Bibliographie



A. BODIN, N. BORNE, G. CHEN, G. COSTANTINI, L. DESIDERI, A. HANANI ET J.-L. ROUGET,
Analyse, cours de mathématiques 1ère année, Exo7, 2016

M. Mechab : Cours d'algèbre-LMD Sciences et Techniques.

Ayadi Souad, Cours de Mathématique pour première année licence ST et SM, univ-km.2019.

K.Allab, Éléments d'analyse, fonction d'une variable réelle, 1er & 2eme années d'université, Office des
Publication universitaire, 2012.

Algèbre et Analyse, cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Stéphan Blac, 2003

