Cours de Mathématiques pour première année licence ST et SM

MORSLI KARIMA

02-04-2021
1.0

Table des matières

Objectifs

A l'issue de ce cour l'étudiant doit être capable de

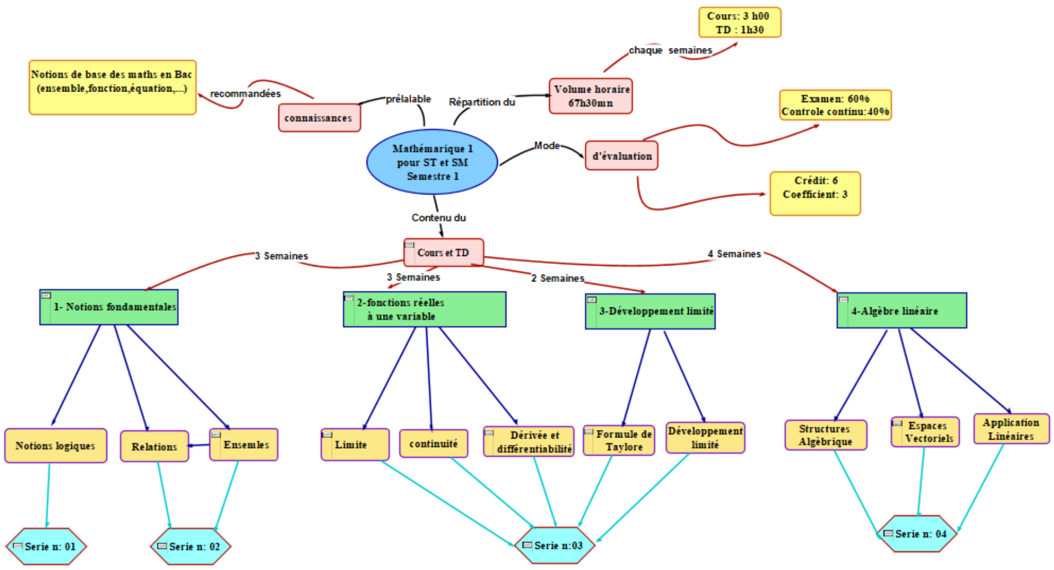
- *Savoir* comment utiliser les différentes types de raisonnement
- Se *familiariser* avec les opérations sur les ensembles
- *Connaître* les différents types de relations
- *Consolider* ses connaissances sur les applications

Introduction

L'objectif de ce cours est de faire une transition entre les connaissances en analyse et algèbre accumulées au lycée et les bases qui formeront un des piliers dans la formation en analyse et algèbre de la licence. Étant donné que le recrutement en première année est assez hétérogène, il semble assez judicieux de commencer par rappeler les notions élémentaires qui serviront tout au long de ce cours, histoire de ne perdre personne en route.

Quand il sera nécessaire au début de chaque chapitre, nous rappellerons ce qui est censé être connu en terminal. Nous essaierons également dans la mesure du possible de fournir l'essentiel des résultats de chaque chapitre sur une page, histoire de synthétiser les connaissances à bien maîtriser pour passer au chapitre suivant.

Nous fournirons autant d'exemples et de figures nécessaires afin d'obtenir une meilleure compréhension du cours. Nous essaierons également de souligner les pièges dans lesquels chacun peut se fourvoyer soit par inattention, soit par une mauvaise maîtrise du cours.



Carte conceptuelle du cour

Exercice : Test des prés-requis

I

1. Exercice

[solution n°1 p.17]

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $a- \Rightarrow, b- \Leftrightarrow, c- \Leftarrow$

1. $x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ .. .. $x = 2$
2. $z \in \mathbb{C}, z = \overline{z}$ . ...$z \in \mathbb{R}$
3. $x \in \mathbb{R}$, $x = \pi$ .. ...$e^{2\ i\ x} = 1$

2. Exercice

[solution n°2 p.17]

Une fonction est une relation qui à chaque élément de l'ensemble de départ fait associer au plus un élément de l'ensemble d'arriver.

- vrai
- faux

3. Exercice

[solution n°3 p.17]

Quelles sont les assertions vraies ?

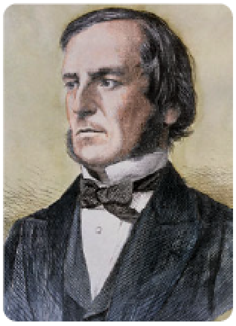
- ☐ Pour toute$x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x \geq 0$
- ☐ Pour toute $x \in \mathbb{R}$, $\mid x^3 - x \mid \geq 0$
- ☐ Il existe $x \in \mathbb{R}^+$, tel que $\sqrt{x} = x$
- ☐ Il existe$x \in \mathbb{R}$, tel que $e^x > 0$

Chapitre 1 :Logique et raisonnements

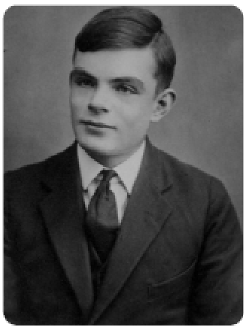
1. Logique

L'objectif ici est de bien définir le vocabulaire, les notations et le propriétés que nous utiliserons non seulement dans ce chapitre, mais également dans toutes les preuves de résultats que nous développerons que ce soit en cours ou en travaux dirigés. A partir de ce chapitre, il faudra donc construire les démonstrations de la façon la plus rigoureuse possible, en utilisant les bons quantificateurs, dans le bon ordre, mais également des stratégies de preuves (absurde,contraposée, récurrence par exemple).

(a) Auguste De Morgan (1806 - 1871) mathématicien et logicien britannique, il a fondé avec Boole la logique moderne. On le connait surtout pour les lois qui portent son nom.



(b) George Boole (1815- 1864) mathématicien britannique, créateur avec De Morgan de la logique moderne fondée sur une structure algébrique et sémantique, que l'on appelle aujourd'hui algèbre de Boole.



(c) Alan Mathison Turing (1912 - 1954), un mathématicien britannique, un des fondateurs de l'informatique.

Quelques mathématiciens célèbres liés à l'étude de la logique.

1.1. Proposition logique et prédicats

1.On appelle *proposition logique* tout phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

- Quand la proposition est vraie, on lui affecte la valeur 1 (ou V)
- Quand la proposition est fausse, on lui affecte la valeur 0 (ou F)

Ces valeurs sont appelées « *Valeurs de vérité de la proposition.* »

Ainsi, pour définir une proposition logique, il suffit de donner ses valeurs de vérités. En général, on met ces valeurs dans un tableau qu'on nommera "`Table de vérités`" ou "*Tableau de vérités*".

*2.*Un *prédicat* est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées *"variables"* tel que, quand on replace chacune des lettres par un élément donné d'un ensemble, on obtient une assertion.

Exemple : 01

1. L'énoncé " 24 est un multiple de 2", est vrai (V).
2. L'énoncé "19 est un multiple de 2", est faux (F).
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$;on a $x^2 \geq 0$: est uneassertion* vraie.
4. x est un nombre positif : ce n'est pas une proposition

Exemple : 02

L'énoncé : $P(n) =$ "n n'est pas un multiple de 2", est un prédicat, car il devient une assertion quand on donne une valeur à n. Par exemple,

- $P(10) =$ "10 est un multiple de 2"est une assertion* vraie.

- $P(11) =$ "11 est un multiple de $2"$ est une assertion fausse

1.2. Opérations Logiques

Définition : La négation

Soit P une proposition , *la négation* d'une proposition P est la proposition *non* (P), qui est

- faux lorsque P est vrai,
- vrai lorsque P est faux.

On résume en général ceci dans une table de vérité , comme suit

P	non P
V	F
F	V

Table de vérité pour non (P)

Exemple

La négation de l'assertion $3 \geq 0$ elle est l'assertion $3 < 0$.

Définition : Conjonction

Soient P et Q deux propositions. La proposition *"P et Q"* est appelé *conjonction* de P et Q. C'est une proposition qui est :

- vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément,
- faux dans tous les autres cas.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table de vérité pour la conjonction

Notation : Nous écrivons parfois $p \ \wedge Q$ pour "p et Q".

Exemple

- $2+2=4 \wedge 2\times 3=6$ est une proposition vraie .
- $2+2=4 \wedge 2\times 3=7$ est une proposition fausse.

Définition : Disjonction

Soient P et Q deux proposition. La proposition "P ou Q" est appelé *disjonction* de P et Q. C'est une proposition qui est :

- vrai lorsque l'un au moins des deux propositions est vrai,
- faux lorsque les deux propositions sont faux simultanément.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table de vérité pour la disjonction

Notation : Nous écrivons parfois $P \vee Q$pour "P ou$Q$".

Exemple

- $2+2=4 \vee 2\times 3=6$ est une proposition vraie
- $2=4 \vee 2\times 3=7$ est une proposition fausse.

Définition : Implication

Soient P et Q deux propositions. La proposition "$P \Rightarrow Q$" est appelé *implication* de P et Q. C'est une proposition qui est :

- faux lorsque P est vrai et Q est faux,
- vrai dans tous les autres cas.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité

P	Q	P $\rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Table de vérité pour l'implication

Remarque

1. Nous disons que P est une condition suffisante pour Q.
2. $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$.
3. si P est faux et Q est vrai, la proposition $P \Rightarrow Q$peut paraître curieux.

Exemple

- "$0 \leq x \leq 25 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 5$" est vraie (prendre la racine carrée).
- "$x \in]-\infty\,; -4[\Rightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$" est vraie (étudier le binôme).
- $\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0$est fausse (regarder pour $\theta = 2\pi$par exemple).
- $2 + 2 = 5 \Rightarrow \sqrt{2} = 2$ est vraie ! Eh oui, si P est fausse alors l'assertion « $P \Rightarrow Q$ » est toujours vraie.

Définition : Équivalence

Soient P et Q deux propositions. La proposition"$P \Leftrightarrow Q$" est appelé *équivalence* de P et Q. C'est une proposition qui est :

- vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux,
- faux dans tous les autres cas.

Nous pouvons résumer cela dans une table de vérité

P	Q	P $\leftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Table de vérité pour l'équivalence

Remarque

L'équivalence est définie par :

$P \Leftrightarrow Q$ est la proposition "$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$"

On dira « P est équivalent à Q» ou « P équivaut à Q » ou « Psi et seulement si Q ».

Exemple

- Pour $x, x' \in \mathbb{R}$, l'équivalence «$(x.x' = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \; ou \; x' = 0)$» est vraie.

- Voici une équivalence toujours fausse (quelque soit l'assertion P) : « $P \Leftrightarrow \overline{P}$».

1.3. Quantificateurs mathématiques

Soit E un ensemble et $P(x)$ un prédicat et $x \in E$.

- Dire que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$ se note, $\forall x \in E \ : P(x)$.
- Dire qu'il existe un x dans E pour lequel $P(x)$ est vraie se note,$\exists x \in E \ : P(x)$.
- Le symbole $\forall$ s'appelle quantificateur *universel* et le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur *existentiel.*

Exemple

Écrire les phrases suivantes en utilisant les quantificateurs.

1. Le carré de tout nombre est positive.
2. Pour tout nombre réels le carré de la somme de deux nombres est égale à la somme de leurs carrés.
3. Tout nombre entier admet un opposé.
4. Il existe au moins un nombre entier qui est opposé à tous les nombres entiers

Solution :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^2 \geq 0$................ vraie
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ (x+y)^2 = x^2 + y^2$...........fausse.
3. $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \ \in \mathbb{Z} \ \ x + y = 0$..........vraie
4. $\exists y \ \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z} \ \ x + y = 0$.............fausse.

Complément : La négation des quantificateurs

- La négation de $\forall x \in E \ : P(x)$ est $\exists x \in E \ : \overline{P}(x)$.
- La négation de $\exists x \in E \ : P(x)$ est $\forall x \in E \ : \overline{P}(x)$. [1]*

Exemle :

- La négation de $\forall x \in \mathbb{R} \ : x^2 \geq 0$ est $\exists x \in \mathbb{R} \ : x^2 < 0$.
- La négation de $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \ \in \mathbb{Z} \ \ x + y = 0$ est $\exists y \ \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{Z} \ \ x + y = 0$.

Remarque

S'il existe un et un seul élément, on peut écrire

$\exists ! x \in E \ : P(x)$

Nous dirons alors qu'il existe *un unique* élément x de E vérifiant $P(x)$.

Exemple :

L'assertion quantifiée $"\exists ! x \in \mathbb{R}_+^* \ ; \ln(x) = 0"$ est vraie.

2. Raisonnements

2.1. Raisonnement direct

1. Pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie il suffit de supposer que P est vraie et montrer que Q est vraie.
2. Pour montrer que l'équivalonce $P \Leftrightarrow Q$ est vraie il suffit de supposer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies à la fois..

Exemple

Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a + b \in \mathbb{Q}$

Démonstration :

Prenons $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}$. Rappelons que les rationnels Q sont l'ensemble des réels s'écrivant $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$

Alors $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$et un certain $q \in \mathbb{Z}^*$. De même $b = \frac{p'}{q'}$ avec $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{Z}^*$
Maintenant

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$$

Or le numérateur $pq' + qp'$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur qq' est lui un élément de $\mathbb{Z}^*$. Donc $a + b$ s'écrit bien de la forme $\frac{p''}{q''}$ avec $p'' \in \mathbb{Z}$ et $q'' \in \mathbb{Z}^*$ Ainsi $a + b \in \mathbb{Q}$.

2.2. Raisonnement indirect

2.2.1. Raisonnement par contraposée

Le raisonnement par *contraposition* est basé sur l'équivalence suivante :

la proposition "$P \implies Q$" est équivalente à "$\overline{Q} \implies \overline{P}$".

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion "$P \implies Q$", on montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair $\implies$ n est pair.

Démonstration :

Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$ avec $l = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.

Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

2.2.2. Raisonnement par l'absurde

Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer "$P \implies Q$" repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc "$P \implies Q$" est vraie.

Exemple :

Soient $a, b \geq 0$. Montrer que si a $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a} \implies a = b$.

Démonstration :

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Comme $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a(1+a) = b(1+b)$ donc $a + a^2 = b + b^2$ d'où $a^2 - b^2 = b - a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$.

Comme $a \neq b$ alors $a - b \neq 0$ et donc en divisant par $a - b$ on obtient $a + b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

2.2.3. Raisonnement par contre exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type "$\forall x \in E \ : P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de "$\forall x \in E \ : P(x)$

est "$\exists x \in E \ : \overline{P}(x)$). Trouver un tel x c'est trouver un *contre -exemple* à l'assertion "$\forall x \in E \ : P(x)$.

Exemple :

Montrer que l'assertion suivante est fausse *« Tout entier positif est somme de trois carrés »*.

(Les carrés sont les $0^2, 1^2, 3^2, \ldots$ Par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$.)

Démonstration : Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont $0, 1, 4$ mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

2.2.4. Raisonnement par cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de *disjonction* ou du *cas par cas.*

Exemple :

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $:| x - 1 | \leq x^2 - x + 1$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas. *Premier cas* : $x \geq 1$ Alors $\| x - 1 \| = x - 1$. Calculons alors $x^2 - x + 1 - \| x - 1 \|$. $x^2 - x + 1 - \| x - 1 \| = x^2 - x + 1 - x + 1 = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 0$. Ainsi $x^2 - x + 1 - \| x - 1 \| \geq 0$ et donc $x^2 - x + 1 \geq \| x - 1 \|$. *Deuxième cas* : $x < 1$ Alors $\| x - 1 \| = -(x-1)$.. Nous obtenons $x^2 - x + 1 - \| x - 1 \| = x^2 - x + 1 + x - 1 = x^2 \geq 0$. Et donc $x^2 - x + 1 \geq \| x - 1 \|$. *Conclusion*. Dans tous les cas $\| x - 1 \| \leq x^2 - x + 1$.

2.2.5. Raisonnement par récurrence

Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :

L'étape de vérification : On prouve que $P(n_0)$ est vraie ou n_0 est le premier élément qui vérifie $P(n)$.

L'étape d'hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq n_0$ et on démontre que la proposition $(P(n) \Longrightarrow P(n+1))$ est vraie.

Enfin dans *la conclusion,* on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour

tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple :

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Démonstration : voir la vidéo *exemple* suivante

Cf. "exemple"

pour un autre exemple de récurrence voire cette vidéo

Cf. "Exemple2"

2.3. Exercice : Evalution

Choisir la méthode de raisonnement convenable pour démontré que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ est divisible par 2 .
2. $\forall n \in \mathbb{N},$. $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

et démontrer le [2]*

Exercice d'apprentissage

III

1. Exercice

[solution n°4 p.17]

Soit P une assertion vraie et Q une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ P ou Q
- ☐ P et Q
- ☐ non(P) ou Q
- ☐ non(P et Q)

2. Exercice

[solution n°5 p.18]

Par quoi peut-on compléter les pointillés pour avoir une assertion vraie ?

$| x^2 | \leq 5$ .... $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

- ☐ $\Longrightarrow$
- ☐ $\Longleftarrow$
- ☐ $\Longleftrightarrow$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus ne convient

3. Exercice :

Question

[solution n°6 p.18]

Soit la suite $(x)_n, \quad n \in \mathbb{N}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > 3.$

. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - 3 > \dfrac{3}{2}(x - 3).$

. Montrer que :$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > (\dfrac{3}{2})^n + 3.$

. La suite $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

4. Évaluation et remédiation

évaluation voir Serie TD N1 - 2021**

Remédiation voir la référence[5]***

Solutions des exercices

> **Solution** n°1

Exercice p. 5

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $a- \Rightarrow, b- \Leftrightarrow, c- \Leftarrow$

1. $x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ ..a.. $x = 2$
2. $z \in \mathbb{C}, z = \bar{z}$ .b...$z \in \mathbb{R}$
3. $x \in \mathbb{R}$, $x = \pi$ ..a...$e^{2\ i\ x} = 1$

> **Solution** n°2

Exercice p. 5

Une fonction est une relation qui à chaque élément de l'ensemble de départ fait associer au plus un élément de l'ensemble d'arriver.

○ vrai

⊙ faux

> **Solution** n°3

Exercice p. 5

Quelles sont les assertions vraies ?

- [ ] Pour toute$x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x \geq 0$
- [x] Pour toute $x \in \mathbb{R}$, $| x^3 - x | \geq 0$
- [ ] Il existe $x \in \mathbb{R}^+$, tel que $\sqrt{x} = x$
- [x] Il existe$x \in \mathbb{R}$, tel que $e^x > 0$

> **Solution** n°4

Exercice p. 15

Soit P une assertion vraie et Q une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- [x] P ou Q
- [ ] P et Q

- [ ] non(P) ou Q
- [x] non$(P$ et $Q)$

> **Solution** n°5

Exercice p. 15

Par quoi peut-on compléter les pointillés pour avoir une assertion vraie ?

$| x^2 | \leq 5$ ....$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

- [ ] $\Longrightarrow$
- [ ] $\Longleftarrow$
- [x] $\Longleftrightarrow$
- [ ] Aucune des réponses ci-dessus ne convient

> **Solution** n°6

Exercice p. 15

voire ref[2]*

Glossaire

assertion

proposition

Abréviations

MRD : Méthode de raisonnement direct

MRI : Méthode de raisonnement indirect

Références

http://exo7.emath.fr/ficpdf/fic00002.pdf	Raisonnement
http://exo7.emath.fr/un.html	chapitr1
Serie TD N1 - 2021	série n1
ST1an48_lessons_math1_beddani.pdf	solution question2

Bibliographie

A. BODIN, N. BORNE, G. CHEN, G. COSTANTINI, L. DESIDERI, A. HANANI ET J.-L. ROUGET, Analyse, cours de mathématiques 1ère année, Exo7, 2016

M. Mechab : Cours d'algèbre-LMD Sciences et Techniques.

Ayadi Souad, Cours de Mathématique pour première année licence ST et SM, univ-km.2019.

K.Allab, Éléments d'analyse,fonction d'une variable réelle,1er & 2eme années d'université,Office des Publication universitaire,2012.

Algèbre et Analyse, cours de mathématiques de première année avec exercices corrigés, Stéphan Blac, 2003